Exercice 1 Soient E un espace euclidien, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

1. $(f^\star)^\star = f$.
2. $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.
3. $(f + g)^\star = f^\star + g^\star$.
4. $(\lambda f)^\star = \lambda f^\star$.

Exercice 2 (Quelques questions de cours)

- E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie
- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E
- $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$
- $\varphi \in \mathcal{BL}(E)$
- $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$
- $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$
- $x \in E$ de matrice de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$
- $y \in E$ de matrice de coordonnées Y dans la base $\mathcal{B}$

1. On note $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice A. Compléter :
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} = \dots\dots\dots\dots$$
2. Dans le cas où φ est un produit scalaire et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour ce produit scalaire , on a :
$$A = \dots\dots$$
3. Compléter : $\varphi(x, y) = \dots\dots\dots\dots$
4. Ecrire la relation entre A, B et P :
5. On suppose maintenant que φ est une forme bilinéaire symétrique :
   (a) φ est positive **si et seulement si** ....
   (b) φ est définie **si et seulement si** ....
   (c) φ est définie positive **si et seulement si** ....
   (d) A est positive **si et seulement si** ....
   (e) A est définie **si et seulement si** ....
   (f) A est définie positive **si et seulement si** ....
6. On suppose que E est espace euclidien et que $f \in \mathcal{L}(E)$
   (a) f est symétrique **si et seulement si** ....
   (b) Enoncer le théorème spectral.
   (c) Quelle est la conséquence du théorème spectral pour les matrice réelles symétriques ?

Exercice 3 (preuve de la proposition 34 du cours)

Soient E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme symétrique.

- u est **positif si et seulement si** ses valeurs propres sont positives.
- u est **défini positif si et seulement si** ses valeurs propres sont strictement positives.

Exercice 4

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = {}^tMM$.

Montrer que les valeurs propres de A sont positives.

Exercice supplémentaire

Exercice 5

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(u^\star \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
2. En déduire que : $\mathrm{rg}(u^\star \circ u) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u \circ u^\star)$.
3. Montrer que : $\mathrm{Ker}(u^\star) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$.
4. Montrer que : $\mathrm{Im}(u^\star) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$.
5. On suppose que $u^2 = \tilde{0}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$u + u^\star \text{ inversible} \iff \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$$