

Question préliminaire:

- Induction: pour $n=1$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, 1 + \lambda \geq 1 + \lambda.$$

Donc vraie au rang 1.

- Hérité:

On suppose $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Revenons: $\forall \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, $\prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i) &\geq \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) (1 + \lambda_{n+1}) \\ &\geq \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \lambda_{n+1}\right) \\ &\geq \left(1 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\right) \end{aligned}$$

- Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

1/ $M = \text{Mat}_B(\varphi)$ et $I_n = \text{Mat}_{B'}(\varphi)$

$$R = \text{Pass}(B', B)$$

$$\text{Donc: } {}^t R I_n R = I_n$$

$$\text{Donc: } I_n = ({}^t R)^{-1} \times R^{-1}$$

$$I_n = {}^t (R^{-1}) \times R^{-1}$$

Rappel: Soit $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$

$$\text{Notons } B = A^{-1}$$

$$AB = I_n$$

$$A(B) = I_n$$

$${}^t B {}^t A = I_n$$

$$\text{Donc } {}^t B = ({}^t A)^{-1}$$

$$\text{Donc } (A^{-1})^t = ({}^t A)^{-1}$$

2/ On a: $C = {}^t R N R$.

De plus N est symétrique et positive.

• Montrons que C est symétrique:

$$C = {}^t R N R.$$

$$\text{Donc } {}^t C = {}^t ({}^t R N R)$$

$$= {}^t R {}^t N R.$$

Or N est symétrique:

$$\text{Donc } {}^t N = N.$$

$$\text{Finalement: } {}^t C = {}^t R N R = C.$$

C est égale à sa transposée donc C est symétrique.

$$D' \xrightarrow{\quad} B \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto R x \mapsto {}^t (R x) I_n (R x)$$

$$\xrightarrow{\quad} {}^t x I_n x$$

Donc $\forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^t x x = {}^t x {}^t (R I_n R) x \text{ donc } I_n = {}^t R I_n R.$$

• (Parfois) C est positive.

Soit $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, vérifions que ${}^t X C X$ est pos. h.P.

$${}^t X C X = {}^t X {}^t R N R X = {}^t (R X) N (R X) \geq 0$$

Donc C est positive.

3. On veut montrer: $\exists Q \in M(\mathbb{R}) / {}^t Q C Q = D$.

On C étant symétrique à coefficients réels, ^(cours) il existe une matrice diagonale D et $Q \in O_n(\mathbb{R})$ h.g. ${}^t Q C Q = D$

4. On peut dire que $d_1, \dots, d_n$ sont les valeurs propres de C
 C étant positive, $d_1, \dots, d_n$ sont positifs.

5. ${}^t Q C Q = D$

donc ${}^t R N R Q = D$.

donc ${}^t (R Q) N (R Q) = D$.

donc $N = ({}^t (R Q))^{-1} D (R Q)^{-1}$
 $= {}^t (R Q)^{-1} D (R Q)^{-1}$

On pose $P = (R Q)^{-1}$

Vérifions $N = {}^t P \times P$.

$${}^t P \times P = {}^t ((R Q)^{-1}) \times (R Q)^{-1}$$

$$= {}^t (Q^{-1} R^{-1}) \times Q^{-1} R^{-1}$$

$$= {}^t R^{-1} \times ({}^t Q^{-1} Q^{-1} / R^{-1})$$

$$= {}^t R^{-1} \times I_n \times R^{-1}$$

$$= {}^t R^{-1} \times R^{-1}$$

car $Q \in O_n(\mathbb{R})$

$$= I_n$$