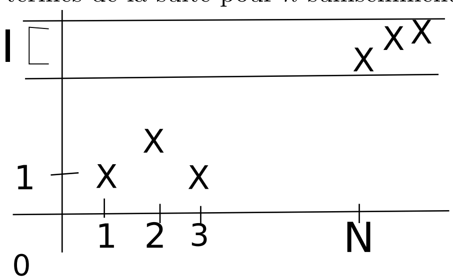
Chapitre 2

Limites de suite

2.1 Limite finie d'une suite

Définition Soit (u_n) une suite et l un nombre réel.
La suite (u_n) admet pour limite l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $\mathbb{I}$ de centre l contient tous les termes de la suite pour n suffisement grand.

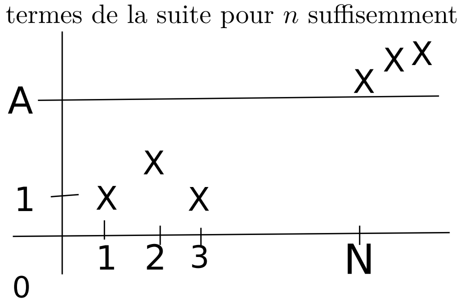


On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Limites de suites de référence $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0\,;\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0\,;\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
Pour tout entier $p \geq 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

2.2 Limite infinie d'une suite

Définition Soit (u_n) une suite.
La suite (u_n) a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que pour tout réel A, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite pour n suffisement grand.



Si $n \geq N$ alors $u_n > A$.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} = +\infty$

Limites de suites de référence $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty\,;\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty\,;\ \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Vocabulaire

- Une suite est dite **convergente** lorsqu'elle a une **limite finie l** ($l \in \mathbb{R}$).
- Une suite qui n'est pas **convergente** est **divergente**.
- Une suite est **divergente** lorsque :
  - Elle a une **limite infinie**. Exemple : $u_n = n^2$
  - Elle n'a **pas de limite**. Exemple : $u_n = (-1)^n$

2.3 Opérations et limites de suites

2.3.1 Limite d'une somme

Soit l et l' des réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Exemple $U_n = 2n^2$; $V_n = -n^2$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$
$U_n + V_n = 2n^2 - n^2 = n^2$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = +\infty$

2.3.2 Limite d'un produit

Soit l et l' des réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n \times V_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Exemple

1. $U_n = n^2$ et $V_n = \frac{1}{n^2}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$
   or $U_v \times V_n = n^2 \times \frac{1}{n^2} = 1$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \times V_n = 1$
2. $U_n = n^2$ et $V_n = \frac{1}{n}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$
   or $U_v \times V_n = \frac{n^2}{n} = n$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \times V_n = +\infty$

2.3.3 Limite d'un quotient

$l \in \mathbb{R}$, $l' \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} Vn \neq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n \times V_n)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

- $\lim\limits_{n\to+\infty} Vn = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l ou $+\infty$ ou $-\infty$	$l \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	0 avec $\frac{U_n}{V_n} > 0$ à partir d'un certain rang	0 avec $\frac{U_n}{V_n} < 0$ à partir d'un certain rang	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n \times V_n)$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Cas d'indétermination

- $+\infty - \infty$
- $0 \times +\infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

2.3.4 Exemples

2.3.5 Lever une indétermination

1. $U_n = P(n)$ où P est polynôme.

   Méthode On met le terme de plus haut dégré en facteur.

   Exemple $U_n = 2n^2 - n + 3$
   Pour tout $n \neq 0$, $U_n = n^2(2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{-1}{n} = 0)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} = 2$
   Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2. $U_n = Q(n)$ où Q est une fonction rationelle.

   Méthode On met en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

   Exemple $U_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n + 1}$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{n(1 + \frac{1}{n})} = n \times \dfrac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$
   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

3. Avec des racines carrées.

   Méthode On multiplie et on divise par l'expression conjuguée.

   Exemple $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   $U_n = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
   $U_n = \dfrac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2.4 Limite et comparaison

2.4.1 Théorème

On considère deux suites numériques (U_n) et (V_n)

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir d'un rang N, $U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir d'un rang N, $U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Exemple $U_n = n + (-1)^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leq U_n \leq n + 1$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$, donc par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Démonstration $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ signifie que pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow V_n > A$
Soit $n_1 = max(n_0, N)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } n \geq n_1 \geq n_0 & V_n > A \\ \text{Et } n \geq n_1 \geq N & U_n \geq V_n \end{array}\right\} \text{donc } U_n > A \text{ On a prouvé } \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty.$$