Chapitre 9

Continuité

9.1 Notion de continuité

9.1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{I}$.

1. Dire qu'une fonction f est continue en a ($a \in \mathbb{I}$) signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. Dire qu'une fonction f est continue sur $\mathbb{I}$ signifie que f est continue en tout $a \in \mathbb{I}$

Conséquence graphique Une fonction f est continue sur un intervalle $\mathbb{I}$ lorsque sa représentation graphique sur $\mathbb{I}$ peut être tracé sans lever le crayon.

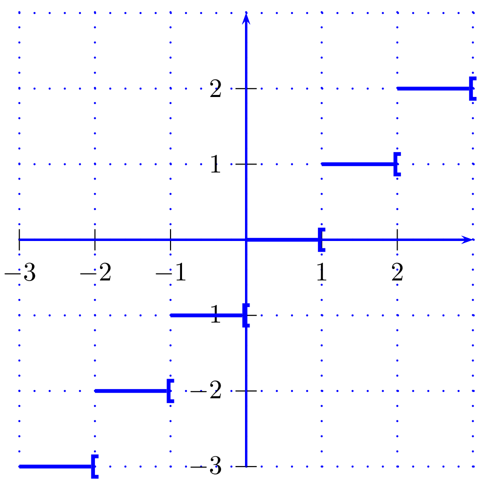
Exemples

1. La fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}$
2. La fonction inverse est continue sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$
3. $x \mapsto \mid x \mid \begin{cases} = x \text{ si } x > 0 \\ = -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \mid 0 \mid = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \mid x \mid = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \mid x \mid = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -x = 0 \end{array}\right\} \text{La fonction } x \mapsto \mid x \mid \text{ est continue en } 0.$$

Contre exemple La fonction partie entière E :
Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que : $n \leq E(x) \leq n + 1$
Par définition : $E(x) = n$

•Si $x \in [-3;-2[$ $\quad E(x) = -3$
•Si $x \in [-2;-1[$ $\quad E(x) = -2$
•Si $x \in [-1;0[$ $\quad E(x) = -1$
•Si $x \in [0;1[$ $\quad E(x) = 0$
•Si $x \in [1;2[$ $\quad E(x) = 1$
•Si $x \in [2;3[$ $\quad E(x) = 2$



$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} E(x) = -1$
$E(x) = 0$
E n'est pas continue en 0

Conséquence La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle $\mathbb{I}$ sont continues sur $\mathbb{I}$.

9.1.2 Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur un intervalle $\mathbb{I}$ alors f est continue sur $\mathbb{I}$.

Démonstration f est dérivable en a signifie que
$t : h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite $\underset{(f'(a))}{\text{finie}}$ en 0.
$t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
$h \cdot t(h) = f(a+h) - f(a)$
$f(a) + h \cdot t(h) = f(a+h)$

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = f'(a)$
donc $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
donc f est continue en a.

Attention la réciproque de cette propriété est fausse :

1. $f(x) = \mid x \mid$ sur $\mathbb{R}$
   f n'est pas dérivable en 0 mais f est continue en 0.
2. $g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$
   g n'est pas dérivable en 0 mais g est continue en 0.

9.1.3 Continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationelles sont dérivables donc continues sur les intervalles sur lesquelles elles sont définies.
- La fonction exp est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

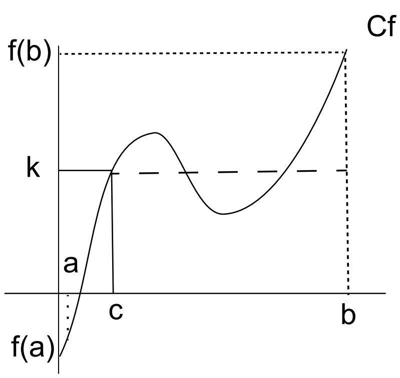
9.2 Fonctions continues et résolution d'équations

Convention Dans un tableau de variation, une flèche $\nearrow$ ou $\searrow$ indique que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle.
Par exemple :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction carrée est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

9.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires



Théorème (admis) Si f est continue sur un intervalle $[a; b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(h)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(a) = k$

9.2.2 Fonctions continues et strictement monotones sur $[a; b]$

Corollaire Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c dans $[a; b]$ tel que $f(a) = k$