

# Chapitre 10

## Convergence des suites monotones

### 10.1 Suites majorées, minorées, bornées

#### Définition

- Une suite  $(U_n)$  est majorée signifie qu'il existe un réel  $M$  tel que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \leq M$ .
- Une suite  $(U_n)$  est minorée signifie qu'il existe un réel  $M$  tel que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \geq M$ .
- Une suite  $(U_n)$  est bornée signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée.

**Exemple**  $U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$  donc  $(U_n)$  est majorée.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+1 \geq 1$  donc  $1 - \frac{1}{n+1} \geq 0$  d'où  $(U_n)$  est minorée.
- $(U_n)$  est donc borné.

### 10.2 Convergence des suites monotones

#### 10.2.1 Théorème (admis)

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout nombre entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 20]$  par  $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$ .

a) Etudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; 20]$ .

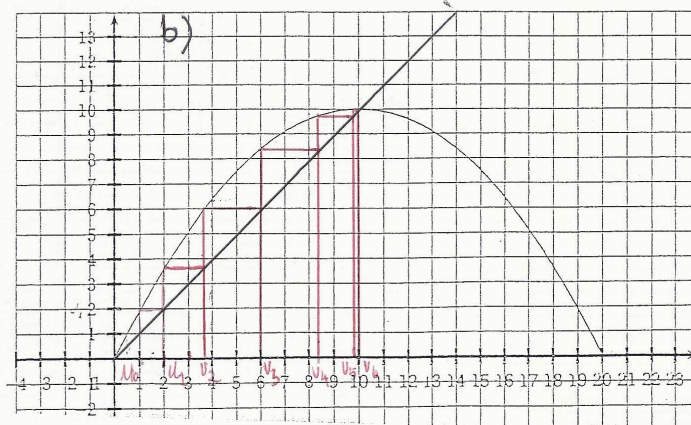
b) On donne, la courbe représentative  $C$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal du plan.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide du graphique, les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

2. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ .

3. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

4. On note  $\ell$  sa limite. Justifier que  $\ell$  vérifie  $\ell = \frac{1}{10} \ell(20 - \ell)$ . En déduire la valeur de  $\ell$ .



**Exemple**

$$\begin{aligned}
1(a) \quad & f = u \times v \quad f' = u'v + v'u \\
& f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x) \\
& u(x) = \frac{1}{10}x \quad v(x) = 20 - x \\
& u'(x) = \frac{1}{10} \quad v'(x) = -1 \\
& f'(x) = \frac{1}{10}(20 - x) - \frac{1}{10}x \\
& f'(x) = 2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{10}x \\
& f'(x) = 2 - \frac{1}{5}x \\
& f'(x) = \frac{10-x}{5} > 0 \\
& \Leftrightarrow 10 - x > 0 \\
& \Leftrightarrow x < 10
\end{aligned}$$

2. Soit  $P_n : "1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 10"$  Vérifions que  $P_0$  est vraie :  $U_0 = 1$  et  $U_1 = 1,9$  donc  $1 \leq U_0 \leq U_1 \leq 10$   
Donc  $P_n$  est vraie au rang 0.

On suppose que pour un entier  $n$ ,  $1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 10$ , on doit démontrer que  $1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 10$ .  
Comme la fonction est croissante sur  $[0; 10]$

$$f(1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(10)$$

$$\text{Soit } 1 \leq 1,9 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 10$$

Donc  $P_n$  est héréditaire, et par le principe de récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 10$ .

3. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \leq U_{n+1}$  donc  $(U_n)$  est croissante.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \leq 10$  donc  $(U_n)$  est majorée.

D'après le théorème,  $(U_n)$  est convergente.

4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = \frac{1}{10}U_n(20 - U_n)$

$$\text{Soit } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10}U_n(20 - U_n) = \frac{1}{10}l(20 - l).$$

$$\text{D'autre par, } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$$

$$\text{Donc } l = \frac{1}{10}l(20 - l)$$

$$\Leftrightarrow 10l = 0l - l^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 10l - l^2$$

$$\Leftrightarrow l(10 - l) = 0$$

$$l = 0 \text{ ou } l = 10$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq U_n \leq 10$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0.$$

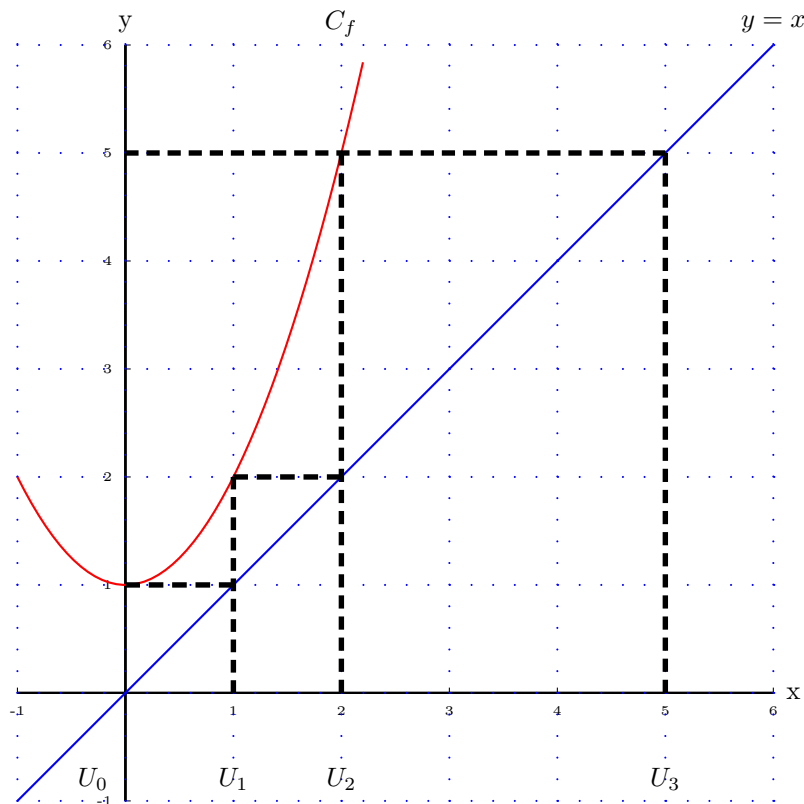
Par conséquent,  $l = 10$ .

### 10.2.2 Théorème

Si une suite est croissante et non majorée, alors elle a pour limite  $+\infty$ .

**Exemple** On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = 1 + U_n^2$ . Soit  $f : x \mapsto 1 + x^2$ .

1. Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé. En déduire les 4 premiers termes sur l'axe des abscisses. Conjecturer le comportement de  $(U_n)$ .



$(U_n)$  semble croissante de limite  $+\infty$ .

2(a) Démontrer que  $(U_n)$  est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = 1 + U_n^2 - U_n$$

$$= U_n^2 - U_n + 1$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$$

$U_n^2 - U_n + 1$  est du signe de 1, c'est à dire positif.

(b) Démontrer que  $(U_n)$  n'est pas majorée.

Si  $(U_n)$  était majorée comme  $(U_n)$  est croissante alors  $(U_n)$  serait convergente de limite  $l$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + U_n^2) = 1 + l^2$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$$

$$l \text{ vérifierait : } l = 1 + l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2 - l + 1 = 0$$

$$\Delta = -3 \Rightarrow \text{Pas de solution.}$$

**Contradiction** Par conséquence,  $(U_n)$  n'est pas majorée.

(c) En déduire la limite de  $(U_n)$ .

$(U_n)$  est croissante et non majorée donc par théorème  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

**Démonstration** Soit  $A$  un réel.

$A$  n'est pas un majorant de  $(U_n)$ .

Il existe un terme  $U_N$  tel que  $U_N > A$ .

Pour tout entier  $n > N$ ,  $U_n \geq U_N > A$  donc  $U_n \in ]A; +\infty[$

$]A; +\infty[$  contient tous les termes à partir d'un certain rang.

**Conclusion**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

### 10.2.3 Suite croissantes et convergentes

ROC **Théorème** Si une suite  $(U_n)$  est croissante et convergente de limite  $l$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \leq l$ .

**Démonstration** On démontre ce théorème par l'absurde.

Soit  $(U_n)$  une suite croissante et convergente de limite  $l$ .

Supposons qu'il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $U_N > l$ .

Comme  $(U_n)$  est croissante pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \geq N$  alors  $U_n \geq U_N > l$ .

$U_n > l$

$U_N = l + \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ )

L'intervalle  $]l - \epsilon; \underbrace{l + \epsilon}_{U_N}[$  ne contient aucun des termes  $U_n$  pour un  $n \geq N$ .

Cela contredit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ .

