Chapitre 7

Fonction exponentielle

7.1 Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un interval $\mathbb{I}$ et a et b deux réels.
Si pour tout x appartenant à un intervalle $\mathbb{J}$, $(ax+b) \in \mathbb{I}$ alors la fonction composée $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{J}$ et pour tout $x \in \mathbb{J}, g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Exemples

1. $g(x) = (-2x+3)^3$
   $x \mapsto \underset{X}{-2x+3} \overset{f}{\underset{\mapsto}{\mapsto}} \underset{X^3}{(-2x+3)^3} = f(-2x+3) = g(x)$
   $f'(x) = 3X^2$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $g'(x) = -2x \times f'(-2x+3) = (-2) \times 3(-2x+3)^2 = -6(-2x+3)^2$
2. $g(x) = \sqrt{-2x+4}$ sur $[2; +\infty]$
   $x \mapsto \underset{X}{2x-4} \overset{f}{\underset{\mapsto}{\mapsto}} \underset{\sqrt{X}}{\sqrt{2x-4}}$
   f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]2; +\infty[, 2x-4 > 0$ donc g est dérivable sur $]2; +\infty[$ et $g'(x) = 2$

7.2 La fonction exponenielle

7.2.1 La fonction

Nous admettons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Propriété des fonctions f vérifiant ces conditions : $f' = f$ et $f(0) = 1$
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$
On introduit g :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \times f(-x) \end{aligned}$$

g est un produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g = u \times v \qquad \begin{aligned} &u(x) = f(x) \text{ et } v(x) = f(-x) \\ &u'(x) = f'(x) \text{ et } v'(x) = \underbrace{-}_{a} \underbrace{f'(-x)}_{f'(ax+b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)] \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) && \text{car } f' = f \\ &= 0 \end{aligned}$$

g est constante sur $\mathbb{R}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = g(0) = f(0) \times f(-0) = 1$

Propriété Si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$
2. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

7.2.2 Unicité d'une telle fonction

On suppose qu'il existe 2 fonctions f_1 et f_2 dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$f_1' = f_1$ et $f_1(0) = 1$
$f_2' = f_2$ et $f_2(0) = 1$
Soit φ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \end{aligned}$$

φ est un quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'après 7.2.1, f2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{f_1'(x) \times f_2(x) - f_1(x) \times f_2'(x)}{(f_2(x))^2} \\ &= \frac{f_1(x) \times f_2(x) - f_1(x) \times f_2(x)}{(f_2(x))^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$
On a démontré que si cette fonction existe, alors elle est unique.

Théorème et définition Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est la fonction exponentielle notée exp.

Conséquence

1. $\exp(0) = 1$
2. exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp)' = \exp$
3. exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

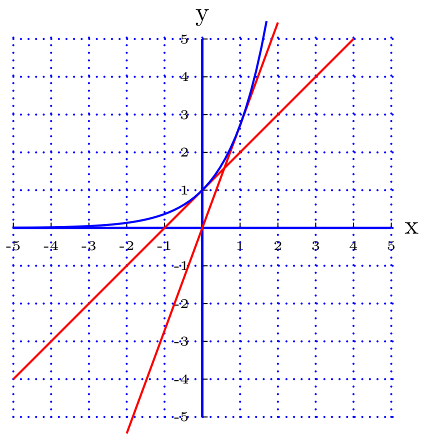
7.2.3 Le nombre e

On pose : $e = \exp(1)$ $\quad e \approx 2,718281826$
Équation de la tangeante à la courbe de exp au point d'abscisse 0 :

$$\begin{aligned} y &= \exp(0)(x-0) + \exp(0) \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

Au point d'abscisse 1 :

$$\begin{aligned} y &= \exp(1)(x-1) + \exp(1) \\ y &= e(x-1) + e \\ y &= ex \end{aligned}$$



7.3 Propriétés algébriques

7.3.1 Propriété fondamentale

Propriété Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration On fixe $a \in \mathbb{R}$
Soit g_a :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_a = \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) &= \exp(a+x) \text{ et } v(x) = \exp(x) \\ u'(x) &= 1 \times \exp'(a+x) \text{ et } v'(x) = \exp(x) \\ &= \exp(a+x) \end{aligned}$$

g_a est dérivable.

$$\begin{aligned} g_a'(x) = &\frac{\exp(a+x) \times \exp(x) - \exp(x) \times \exp(a+x)}{(\exp(a+x))^2} \\ = &0 \end{aligned}$$

Donc g_a est constante.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, g_a(x) = g_a(0) = \dfrac{\exp(a+0)}{\exp(0)} = \exp(a)$.
$\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)} = \exp(a)$
Soit $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

Conséquence Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) \\ &= \exp(\frac{x}{2}) \times \exp(\frac{x}{2}) \\ &= (\exp(\frac{x}{2}))^2 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$

7.3.2 Corollaire

Pour tous réels a et b, et tout entier relatif n :

1. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
2. $\exp(n \times a) = (\exp(a))^n$
3. $\exp(\frac{a}{2}) = \sqrt{\exp(a)}$

Remarque Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$
De façon générale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\exp(x) = e^x$.

7.3.3 Notation e^x

Pour tout réel $x, \exp(x) = e^x$
Nouvelle écriture des propriétés :
Pour tout réels a, b et tout entier b,

1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$
2. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
3. $e^{na} = (e^a)^n$
4. $e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$

7.4 Étude de la fonction exp

7.4.1 Variations

Propriétés La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration $(\exp)'(x) = \exp(x)$ et on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ d'où le résultat.

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
e^x	$\nearrow$	e^a $\nearrow$	e^b	$\nearrow$

7.4.2 Équations, inéquations

Propriétés Pour tous réels a et b :

1. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
2. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x^2} = (e^{-x})^2 \times e^3 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^{-2x+3} \Leftrightarrow x^2 = -2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0$
   $\Delta = 4 - 4 \times -3 = 16$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_2 = -3$
   $\mathcal{S} = \{1; -3\}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(e^x)^3 \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^{-1} \Leftrightarrow 3x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{3}$
   $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{-1}{3}]$

7.4.3 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Propriété $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

ROC

Démonstration Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - (1 + x)$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$

$$\begin{aligned} & e^x - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & e^x \geq 1 \\ \Leftrightarrow & e^x > e^0 \\ \Leftrightarrow & x \geq 0 \end{aligned}$$

$g(0) = e^0 - 1 = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \ e^x - (1 + x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \ e^x \geq 1 + x \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x) = +\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$, $X = -x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{donc } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \text{d'où } \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}$$

7.4.4 Croissances comparées

Propriétés $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Démonstration On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
2. En déduire la comparaison de e^x et $\dfrac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer alors la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$.
4. En posant $X = -x$, en déduire la limite de xe^x en $-\infty$.

1. $f(x) = e^x - x$
   On a vu : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x + 1$
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 1 > 0$
   $f(0) = e^0 - 0 = 1$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$

   Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$

2. $e^x - \dfrac{x^2}{x} > 0$ donc $e^x > \dfrac{x^2}{2}$
3. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

$\left.\right) \div x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

4. $X = -x$ $\qquad$ $xe^x = -Xe^{-X} = \dfrac{-X}{e^x} = \dfrac{-1}{\frac{e^X}{X}}$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\frac{e^X}{X}} = 0 \Rightarrow$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Exemples

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} -x$ $e^x - x = x(\dfrac{e^x}{x} - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{e^x}{x} - 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = +\infty$$

2. Déterminer $e^x(x-1)$
   $e^x(x-1) = xe^x - e^x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to -\infty} e^x(x-1) = 0$$

7.4.5 Une limite à retenir

f est dérivable en 0 signifie que $h \mapsto \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ a une limite finie en 0 qui est $f'(0)$

exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x}$

donc $1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

7.5 Fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$

Cas particulier Soient $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$.
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction composée $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = a \times e^{ax+b}$

Exemple

1. $f(x) = e^{-x}$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x}$
2. $f(x) = e^{2x}$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x}$

Cas général Si une fonction u est dérivable sur un intervalle $\mathbb{I}$, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{I}$ et pour tout $x \in \mathbb{I}, f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple Soit k un réel strictement positif : f_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = e^{-kx}$
f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = -ke^{-kx}$
Comme $-k < 0$ et $e^{-kx} > 0$ (On a $f_k'(x) < 0$)
f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -kx = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X + \infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} e^{-kx} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -kx = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to -\infty} e^{-kx} = +\infty$$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^{-kx}	$+\infty$ $\searrow$	0

Asymptote horizontale d'équation $y = 0$

Conjecture Toutes les courbes passent par $A(0; 1)$
En effet, $f_k(0) = e^{-k \cdot 0} = e^0 = 1$

- Si $k < k'$
  - Sur $]0; +\infty[, Ck'$ est en dessous de Ck
  - Sur $]-\infty; 0[, Ck'$ est en dessous de Ck
- - Si $x > 0, k < k'$
    Donc $-kx > -k'x$
    D'où $e^{-kx} > e^{-k'x}$ car exp est croissante sur $\mathbb{R}$
  - Si $x < 0, k < k'$
    Donc $-kx < -k'x$
    D'où $e^{-kx} < e^{-k'x}$
    car exp est croissante sur $\mathbb{R}$