Chapitre 12

Fonction logarithme népérien

12.1 La fonction ln

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

Pour tout réel a strictement positif, d'après le TVI, l'équation $\exp(x) = a$ admet une solution unique, le logarithme népérien de a, noté $\ln(a)$.

12.1.1 Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$, qui à tout réel x strictement positif associe l'unique solution y de l'équation $l^y = x$.
$]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$
$e^y = x \ \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ y = \ln x$

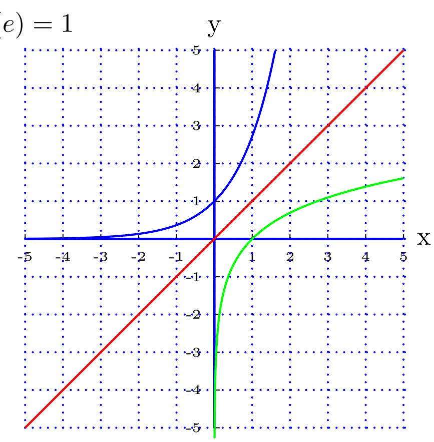
Exemple :

- $y = \ln(1) \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow e^y = 1 \\ \Leftrightarrow y = 0 \end{array}$ donc $\ln(1) = 0$
- $y = \ln(e) \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow e^y = e \\ \Leftrightarrow y = 1 \end{array}$ donc $\ln(e) = 1$
- $y = \ln(e^2) \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow e^y = e^2 \\ \Leftrightarrow y = 2 \end{array}$ donc $\ln(e^2) = 2$
- $y = \ln(\frac{1}{e}) \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow e^y =^{-1} \\ \Leftrightarrow y = -1 \end{array}$ donc $\ln(\frac{1}{e}) = -1$

12.1.2 Premières propriétés

Propriétés

1. L'ensemble de définition de ln est $]0; +\infty[$
2. Pour tout réel y, $\ln(e^y) = y$
3. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$
4. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$



Dans un repère orthonormé, $C_{\ln}$ est l'image de $C_{\exp}$ par la symétrie d'axe de la droite $\Delta : y = x$.

12.2 Propriétés algébriques

12.2.1 Propriété fondamentale

Pour tous réels strictement positifs a et b,
$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Démonstration

$$\left.\begin{array}{l} e^{\ln(ab)} = ab \\ \text{et } e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab \end{array}\right\} \begin{array}{l} e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \\ \Leftrightarrow \ln(ab) = \ln a + \ln b \end{array}$$

Exemple $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$
Pour tout $x > 0$, $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$
et $\ln(x^2) = \ln x + \ln x = 2\ln x$
Pour tout $x > 0$, $x \times \frac{1}{x} = 1$
donc $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(1)$
$\ln x + \ln(\frac{1}{x}) = 0$
donc $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$

12.2.2 Conséquences

$]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R}$	$x > 0$, $e^{ln(x)} = x$
$x \mapsto \ln(x)$	$y \in \mathbb{R}$, $\ln(e^y) = y$
$1 \mapsto 0$	
$e \mapsto 1$	
$a > 0$, $b > 0$	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Pour tous réels strictement positifs a et b,

1. $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$
2. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
3. Pour tout entier $n > 0$, $\ln(a^n) = n\ln a$

Démonstration

1. $b \times \frac{1}{b} = 1$ donc $\underbrace{\ln(b \times \frac{1}{b})}_{\ln b + \ln\frac{1}{b}} = \underbrace{\ln 1}_{0}$

   d'où $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$

2. $$\begin{aligned} \ln(\tfrac{a}{b}) &= \ln(a \times \tfrac{1}{b}) \\ &= \ln a + \ln(\tfrac{1}{b}) \\ &= \ln a - \ln b \end{aligned}$$

3. **Par récurrence :**

   - $n = 1$ $\qquad \ln(a^1) = 1\ln a$ vérifié pour $n = 1$
   - Si $\ln(a^n) = n\ln(a)$

     alors $$\begin{aligned} \ln(a^{n+1}) &= \ln(a^n \times a) \\ &= \ln(a^n) + \ln(a) \\ &= n\ln(a) + \ln(a) \end{aligned}$$

     d'où $\ln(a^{n+1}) = \ln(a) \times (n+1)$
   - **Conclusion :** Pour tout $n \geq 1$, $\ln(a^n) = a\ln(a)$

4. $\ln((\sqrt{a})^2) = \ln(a)$
   d'où $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$
   Soit $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ $\qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Exemple

1. L'ensemble de définition de f :
   $f(x) = \ln(1 - x^2)$
   $f(x)$ est défini lorsque $1 - x^2 > 0$
   $1 - x^2$ est un polynôme du 2^{nd} degré qui a 2 racines : -1 et 1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $D_f =]-1; 1[$
2. $f(x) = \ln(3 - 2x)$
   $f(x)$ est définie lorsque $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 3$
   $\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ $D_f =]-\infty; \frac{3}{2}[$

12.3 Étude de la fonction $\ln$

12.3.1 Équations — Inéquations

Propriété Pour tous réels strictements positifs a et b :

1. $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
2. $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

En effet

1. $\ln a = \ln b \Leftrightarrow e^{\ln a} = e^{\ln b} \Leftrightarrow a = b$
2. $\ln a < \ln b \Leftrightarrow e^{\ln a} < e^{\ln b} \Leftrightarrow a < b$

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln x = \ln(x + 1)$
   $\ln x$ est définie pour $x \in]0; +\infty[$
   et $\ln(x + 1)$ est définie pour : $x + 1 > 0$ soit $x \in]-1; +\infty[$ $\Rightarrow$ a pour ensemble de validité $]0; +\infty[$
   $\ln x = \ln(x + 1)$
   $\Leftrightarrow x = x + 1$
   $\Leftrightarrow 0x = 1$: pas de solution $S = \emptyset$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln 2x = \ln(x - 1)$
   $\ln 2x$ est définie pour : $2x > 0$ soit $x \in]0; +\infty[$
   $ln(x - 1)$ est définie pour : $x - 1 > 0$ soit $x \in]1; +\infty[$
   Ensemble de validité : $]1; +\infty[$

12.3.2 Dérivée de $\ln$

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln x = \frac{1}{x}$

On admet que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$
$g(x) = e^{lnx} = e^{u(x)} = x$
où $u(x) = \ln(x)$
$g'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = 1$
donc $ln'(x) \times x = 1$
$ln'(x) = \frac{1}{x}$

12.3.3 Sens de variation

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$	$+$	
$\ln(x)$	$\|$	$\nearrow$	

Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$

La fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

12.3.4 Limites en 0 et $+\infty$

Propriété $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln x > M \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^M$
$\Leftrightarrow x > e^M$
Si $x > e^M$ alors $\ln x > M$
Soit $x > 0$
$\ln x = -\ln(\frac{1}{x})$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$

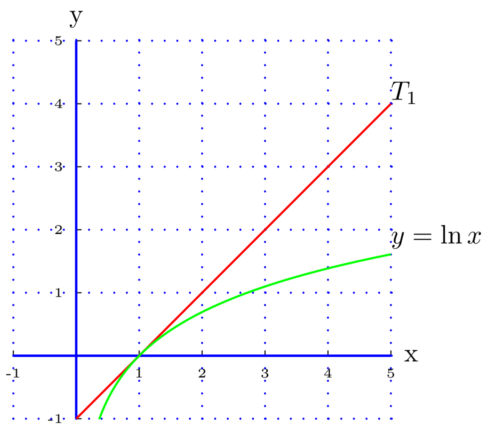
x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Une limite à connaître ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1$
donc $\lim\limits_{h \to 0} (\dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}) = 1$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

12.3.5 Représentation graphique

Tangente T_1 au point d'abscisse 1.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\qquad f'(1) = 1$
$y = 1(x-1) + 0$ $\qquad f(1) = 0$
$y = x - 1$



$h(x) = \ln x - (x-1)$
$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Sur $]0;+\infty[$ $x > 0$
$1 - x > 0$ lorsque $x < 1$
$h(1) = \ln 1 - 0 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$h(x) = \ln(x) - (x-1)$
D'après le tableau de variation : $h(x) \leq 0$ sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$ sur $]0;+\infty[$
C_h est en dessous de T_1 sur $]0;+\infty[$.

12.3.6 Croissance comparée

Propriété $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Démonstration Si $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \frac{X}{e^X}$ où $X = \ln x$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \text{et} \ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0 \end{array}\right\} \text{donc} \ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Interprétation géométrique Soit $M(x; \ln x)$ sur $C_{\ln}$.
Le coefficient directement de (OM)