Chapitre 11

Forme trignonométrique des nombres complexes

11.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

11.1.1 Module et arguments d'un nombre complexe

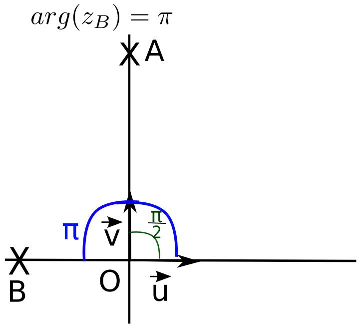
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$.

Définition Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.

- Le module de z noté $\mid z \mid$ est égale à la distance OM.
- Si $z \neq 0$, un argument de z noté $arg(z)$ est une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

Exemple

- $P(1+i)$
  $z_P = 1 + i$
  $\mid z_P \mid = OP = \sqrt{2}$
  et $arg(z_P) = (\vec{u}; \overrightarrow{OP}) = \frac{\pi}{4}$
- $z_A = 3i$
  $\mid z_A \mid = OA = 3$
  $arg(z_A) = \frac{\pi}{2}$
- $z_B = -2$
  $\mid z_B \mid = 2$
  $arg(z_B) = \pi$



Propriété Si un nombre complexe $z = x + iy$ avec x, y réels :
$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Remarque Si z est un réel, $\Im z = y = 0$
$\mid z \mid = \sqrt{x^2} = \mid x \mid$
Le module de z est égale à sa valeure absolue.

Propriété Pour tout $z \in \mathbb{C}$

1. z est un réel strictement positif si et seulement si $arg(z) = 0[2\pi]$
2. z est un réel strictement négatif si et seulement si $arg(z) = \pi[2\pi]$
3. z est un imaginaire pur non nul si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \text{ou } arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array} \right.$

11.1.2 Forme trigonométrique

Théorème et définition Pour tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ, z s'écrit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exemples

- $z_1 = 1 + i$ On a vu que $\mid z_1 \mid = \sqrt{2}$ et $arg(z_1) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$
  z_1 a pour forme trigonométrique :
  $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
- $z_2 = 3i$ On a vu que $\mid 3i \mid = 3$ et $arg(3i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
  z_2 a pour forme trigonométrique
  $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
- $z_3 = -2$ $\mid -2 \mid = 2$ et $arg(-2) = \pi[2\pi]$
  z_3 a pour forme trigonométrique
  $z_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

Théorème Deux nombres complexes non nuls z et z' sont égaux si et seulement si : $\begin{array}{l} \mid z \mid = z' \\ arg(z) = arg(z') + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{array}$

En effet

- Si $z = z'$ alors $\begin{cases} \mid z \mid = \mid z' \mid \\ arg(z) = arg(z')[2\pi] \end{cases}$
- Réciproquement :
  Si $\begin{cases} \mid z \mid = \mid z' \mid = r \\ arg(z) = arg(z') + 2k\pi k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
  $\left.\begin{array}{l} z = r(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)) \\ z' = r(\cos(arg(z')) + i\sin(arg(z')) \end{array}\right\}$ d'où $z = z'$

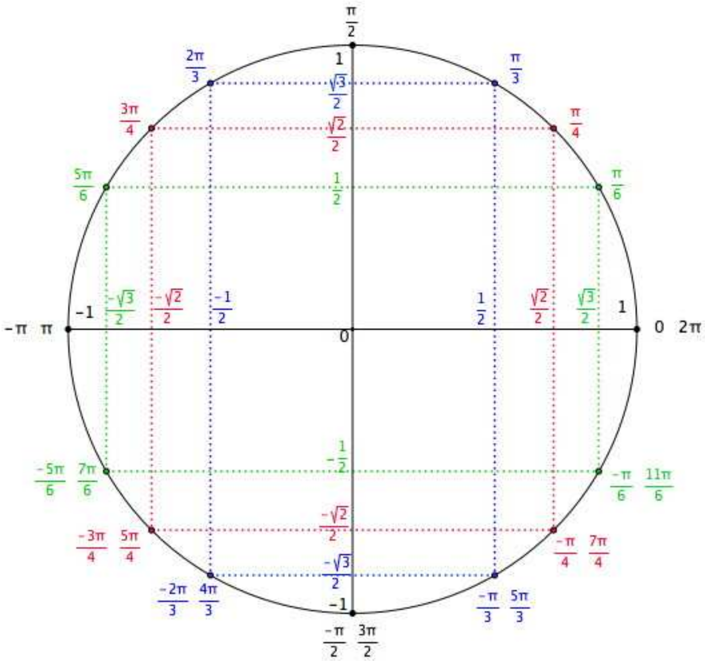
Lien entre forme trigonométrique et forme algébrique.

Forme algébrique	Forme trigonométrique
$z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\leftarrow$$
$$a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta$$
$$\rightarrow$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \cos\theta = \frac{a}{r},\ \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Exemples

1. Écrire $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ sous forme algébrique.
   $z = z(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$
2. Écrire $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
   $\mid z \mid = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$
   $arg(z) = \theta$ vérifie $\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
   $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$
   $z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$



11.1.3 Forme trigonométrique et opérations

Propriété Pour tout nombre complexe z non nul et $z' \in \mathbb{C}*$:

- **Conjugué :** $\mid \bar{z} \mid = \mid z \mid$ et $arg(\bar{z}) = -arg(z)[\pi]$
- **Opposé :** $\mid -z \mid = \mid z \mid$ et $arg(-z) = arg(z) + \pi[2\pi)$
- **Produit :** $\mid zz' \mid = \mid z \mid \times \mid z' \mid$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$

Démonstration

$$\mid z \mid = r,\ arg(z) = \theta : z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\mid z' \mid = r',\ arg(z') = \theta : z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')] \quad \text{donc } \mid zz' \mid = rr' = \mid z \mid \times \mid z' \mid \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

et $arg(zz') = \theta + \theta' = arg(z) + arg(z')$

Rappel : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$

Exemple

$$z = \sqrt{3} + i$$
$$z' = 1 + i$$

- $\bar{z}\bar{=}\sqrt{4} = 2$

  $arg(z) = \theta$ vérifie $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$

  donc $arg(z) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

  $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

- $\bar{z}'\bar{=}\sqrt{2}$

  $arg(z') = \theta'$ vérifie $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

  donc $arg(z') = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

  $z' = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Donc $\mid zz' \mid = 2\sqrt{2}$
$arg(zz') = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}[2\pi]$
$zz' = 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$

Déterminer la forme algébrique de zz'
$zz' = (\sqrt{3}+i)(1+i)$
$zz' = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$
Que peut-on en déduire ?
$2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3}-1$
Donc $\cos\frac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
et $2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3}+1$
Donc $\sin\frac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Conséquences Pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

- **Inverse :** $\mid \frac{1}{z} \mid = \frac{1}{|z|}$ et $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)[2\pi]$
- **Quotient :** $\mid \frac{z}{z'} \mid = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}*$,
  $\mid z^n \mid = \mid z \mid^n$ et $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$

Démonstration
$z \times \frac{1}{z} = 1$
donc $arg(z) + arg(\frac{1}{z}) = 0[2\pi]$
d'où $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)[2\pi]$
et $\mid z \times \frac{1}{z} \mid = 1$
donc $\mid z \mid \times \mid \frac{1}{z} \mid = 1$
d'où $\mid \frac{1}{z} \mid = \frac{1}{|z|}$

11.1.4 Affixe d'un vecteur — Distance AB

Affixe dun vecteur

Étant donné deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

En effet :
$z_A = x_A + iy_A$, x_A et y_A réels.
$z_B = x_B + iy_B$, x_B et y_B réels.
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$
$z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$
$z_{\overrightarrow{AB}} = x_B + iy_B - (x_A + iy_A)$
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et k un réel :

1. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z = z'$
2. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$
3. $k\vec{u}$ a pour affixe kz

Distance

Propriété Étant donné deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B, la distance $AB =\mid z_B - z_A \mid$.

En effet,
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= (x_B - x_A + i(y_B - y_A)) \\ &= (z_B - z_A) \end{aligned}$$

Exercice 1 Déterminer la nature d'une figure.
$A(-1 + i\sqrt{3})$, $B(-1 - i\sqrt{3})$ et $C(2)$

1. Nature du triangle ABC
2. Affixe du centre et rayon du cercle C circonscrit à ABC.

$AB =\mid z_B - z_A \mid=\mid -a - i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} \mid=\mid -2i\sqrt{3} \mid= \sqrt{0^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$AC =\mid z_C - z_A \mid=\mid 2 - (-1 + i\sqrt{3}) \mid=\mid 3 - i\sqrt{3} \mid= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$BC =\mid z_C - z_B \mid=\mid 2 - (-1 - i\sqrt{3}) \mid=\mid 3 + i\sqrt{3} \mid= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

Donc $AB = AC = BC$: ABC est équilatéral. $OA =\mid z_A \mid= \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$OB =\mid z_B \mid= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$OC =\mid z_C \mid= 2$

Le centre de C est 0 et son rayon est 2.

11.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

11.2.1 Introduction

Soit f la fonction qui à tout réel θ associe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
Pour tous réels θ et θ' :

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ f(\theta) \times f(\theta') &= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= f(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Définition Pour tout réel θ, le nombre comprexe de module 1 et d'argument θ est noté : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Définition Tout nombre complexe non nul z d'argument θ s'écrit $z =\mid z \mid \times e^{i\theta} = re^{i\theta}$ où $r =\mid z \mid$
Cette écriture est une forme exponentielle du nombre complexe z.

Exemples

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

$\mid z_1 \mid= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$z_1 = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$z_1 = 2\sqrt{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = e^{i\pi} = -1(= \cos\pi + i\sin\pi)$

$z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}(= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i$

11.2.2 Propriétés

Pour tous réels θ et θ' :

1. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
3. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}*$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exemple $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$zz' = 3\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$zz' = 3\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}$

$zz' = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\frac{1}{z} = \dfrac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Remarque Pour tout réel θ,

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

donc $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Exemple

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= (\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^2 \\ &= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}{4} \\ &= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4}\end{aligned}$$

Or $\cos 2\theta = \dfrac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}$

Donc $cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}$

$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$