Chapitre 8

Nombres complexes

8.1 L'ensemble des nombres complexes

8.1.1 Écriture algébrique d'un nombre complexe

Théorème et définition On admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes contenant $\mathbb{R}$, tel que :

- $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que $i^2 = -1$
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolonge celles de $\mathbb{R}$ et ont les mêmes propriétés

Vocabulaire Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)

Cas particuliers

- Si $b = 0, z = a, a \in \mathbb{R}$ z est un nombre réel
- Si $a = 0, z = ib, b \in \mathbb{R}$ z est un imaginaire pur

Propriété a, b, a', b' sont des réels $a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

8.1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z &= a + ib, \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \\ z' &= a' + ib', \text{ où } a' \in \mathbb{R} \text{ et } b' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Somme : } z + z' &= (a + a') + i(b + b') \\ \bullet \text{ Produit : } z \times z' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + aib' + iba' + i^2bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} z &= 2 + 3i \\ z' &= -5 + i \end{aligned}$$

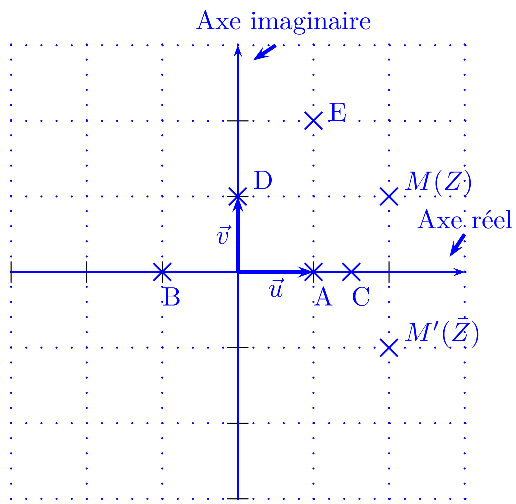
$$\begin{aligned} z + z' &= (2 - 5) + i(3 + 1) \\ &= -3 + 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zz' &= -10 + 2i - 15i - 3 \\ &= -13 - 13i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= (2 + 3i)^2 \\ &= 2^4 + 9i^2 + 12i \\ &= -5 + 12i \end{aligned}$$

8.1.3 Le plan complexe

- Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
  on peut lui associer le point $M(x, y)$ dans un repère orthonormé. On dit que M est **l'image de z dans le plan complexe**.
- Tout point $M(x, y)$ dans un repère orthonormé est l'image d'un unique nombre complexe $z = x + iy$
  z est **l'affixe du point M**.



- Le point A d'affixe 1 a pour coordonnées $(1; 0)$
- Le point B d'affixe -1 a pour coordonnées $(-1; 0)$
- Le point C d'affixe $1,5$ a pour coordonnées $(1,5; 0)$
- Le point D d'affixe i a pour coordonnées $(0; 1)$
- Le point E d'affixe $1 - 2i$ a pour coordonnées $(1; 2)$

8.2 Conjugué d'un nombre complexe

8.2.1 Définition

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), le conjugué de z noté $\bar{z}$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

Remarque Si M est le point d'affixe z, le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (O, i)

8.2.2 Propriétés

Pour tous complexes z et $\bar{z}$

1. $z + z' = \bar{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
3. Si $n \in \mathbb{N}*$: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Démonstration

$$z = x + iy \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$
$$z' = x' + iy' \text{ où } x' \in \mathbb{R} \text{ et } y' \in \mathbb{R}$$

1.

$$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= \overline{(x+x')+i(y+y')} \\ &= x+x'-i(y-y') \\ &= x+x'-y-y' = \bar{z}+\overline{z'}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{xx'-yy'+i(xy'+yx')} \\ &= xx'-yy'-i(xy'+yx') \\ \bar{z}\times\overline{z'} &= (x-iy)(x'-iy') \\ &= xx'-i^2yy'-iyx'-ixy' \\ \text{d'où } \overline{zz'} &= \bar{z}\times\overline{z'}\end{aligned}$$

Remarque

1. Si $z = x+iy$ $(x\in\mathbb{R},\, y\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2-i^2y^2 \\ z\bar{z} &= x^2+y^2\end{aligned}$$

   Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z\bar{z}$ est un réel positif.

2. $z = x+iy$ $(x\in\mathbb{R},\, y\in\mathbb{R})$
   $z+\bar{z} = x+iy+x-iy = 2x$
   $\Re z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$
3. $z = x+iy$ $(x\in\mathbb{R},\, y\in\mathbb{R})$
   $z-\bar{z} = x+iy-x+iy = 2iy$
   $\Im z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Conséquence

- Un nombre complexe z est réel si $z=\bar{z}$
- Un nombre complexe est un imaginaire pur si $z=-\bar{z}$

8.2.3 Inverse et quotient

Propriété Tout nombre complexe z non nul admet un inverse $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}$
En effet, $z=x+iy$ $(x\in\mathbb{R},\, y\in\mathbb{R})$, $z\neq 0$
$z\bar{z}=x^2+y^2\neq 0$ (réel non nul)
$z\times\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z}}=1$

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{1}{3+4i} &= \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{3-4i}{3^2+4^2} \\ &= \frac{3}{25}-\frac{4}{25}i \\ &= \frac{1}{3+4i}\end{aligned}$$

Méthode Pour obtenir la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe z, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}$
$\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$

Quotient Pour tout nombre complexe z et z', $z' \neq 0$ le quotient $\frac{z}{z'}$, est le nombre : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

Exemple

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+i}{1+i} \\ &= \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2-2i-i^2+i}{1^2+1^2} \\ &= \frac{3-i}{2} \end{aligned}$$

8.2.4 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété Soient a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est notée (E)
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0, (E)$ admet 2 solutions réelles
  $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0, (E)$ admet 1 solution réelle
  $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0, (E)$ admet 2 solutions complexes conjuguées
  $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration

$$\begin{aligned} ax^2 + bz + c &= a(z^2 + \frac{b}{a} \cdot z + \frac{c}{a}) \\ &= a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}] \\ &= a[(z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})] \\ &= a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$
  $-\Delta > 0$
  $\Delta = (i \times \sqrt{-\Delta}^2)$
  Donc $az^2 + bz + c = 0$

  $\Leftrightarrow a[(z + \frac{b}{2a}) - (\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})^2] = 0$

$\Leftrightarrow z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + z + 1 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= -3 < 0 \\ -\Delta &= 3 \end{aligned}$$

Donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ou $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$