Chapitre 1

Suites numériques - récurrence

1.1 Rappels à propos des suites numériques

1.1.1 Notion de suite

Notations On considère une suite numérique u.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme de rang n de la suite est l'image par u de n, notée u_n ou $u(n)$.
- La suite est notée u ou (u_n).

Il y a deux façons de définir une suite :

- Par une formule explicite exprimant u_n en fonction de n.

  Exemple $u_n = 2n - 1$.
  Ici, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1$.
  $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$

- Par récurrence : par son ou ses premier(s) terme(s) et un procédé permettant de calculer chaque terme en fonction du ou des terme(s) précédent(s).

  Exemple $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$
  Ici, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2f(x) - 1$.
  $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -3$,
  $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times (-3) - 1 = -7$

1.1.2 Sens de variation

Définition Une suite numérique (u_n) est :

- **croissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- **décroissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- **constante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes. Par exemple, la suite définie pour tout n par $u_n = (-1)^n$:
$u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$
Une suite (u_n) est **monotone** signifie qu'elle est soit **croissante**, soit **décroissante**.

Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

Ex. 1 p.11

- Étudier le signe de la différence de $u_{n+1} - u_n$:
  Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
  Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.
- Dans le cas où pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$, comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
  Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
  Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

- Lorsque $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f :
  Si f est **croissante** sur $\mathbb{R}+$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
  Si f est **décroissante** sur $\mathbb{R}+$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

1.1.3 Suites arithmétiques

Définition (u_n) est une suite **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la **raison** de la suite.

Schéma général $u_0 \underset{+r}{\rightarrow} u_1 \underset{+r}{\rightarrow} u_2 \underset{+r}{\rightarrow} u_3 \cdots u_n \underset{+r}{\rightarrow} u_{n+1}$

Caractérisation Une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$ est une suite **arithmétique** lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs quelconques de la suite est **constante**.

Expression de u_n en fonction de n Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 + n \times r$.
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_p alors $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Expression de $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ Si (u_n) est une suite arithmétique, pour tout entier naturel n strictement positif, $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \dfrac{(u_1 - u_n) \times n}{2}$.

À retenir La somme de termes consécutifs de (u_n) est égale à $\dfrac{\text{nombre de termes}}{2} \times (1^{\text{er}}\text{terme} + \text{dernier terme})$.

Exemple La suite u des entiers naturels impairs : $u_1 = 1$, $u_2 = 3$
Le n^{e}entier naturel impair est : $u_n = u_n + (n-1) \times r = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$.
La somme $S = 1 + 3 + \cdots + 99$ vaut : $\frac{50}{2} \times (1 + 99) = 2500$.

1.1.4 Suites géométriques

Définition (u_n) est une suite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé **raison** de la suite.

Schéma général $u_0 \underset{\times q}{\rightarrow} u_1 \underset{\times q}{\rightarrow} u_2 \underset{\times q}{\rightarrow} u_3 \cdots u_n \underset{\times q}{\rightarrow} u_{n+1}$

Caractérisation Une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$ est une suite **géométrique** lorsque le quotion $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs quelconques de la suite est **constant**.

Expression de u_n en fonction de n Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, de premier terme u_p alors $u_n = u_p \times q^{n-p}(n \geq p)$.

Somme de termes successifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ Pour tout entier naturel n strictement positif, $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

À retenir La somme de termes consécutifs de (u_n) est égale à : premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de terme}}}{1 - q}$.

1.2 Récurrence

Principe de récurrence Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer qu'une propriété Pn est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on peut démontrer que P_{n_0} est vraie (initialisation) et démontrer que pour tout entier $n \geq n_0$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (hérédité). On peut alors conclure que Pn est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n + 4 \end{cases}$
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 6$. (ici $n_0 = 0$)
Soit Pn : "$u_n \leq 6$"

- **Initialisation :** $u_0 = 3$ donc $u_0 < 6$ donc P_0 est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que pour un entier n : $u_n \leq 6$.
  Démontrons que sous cette hypothèse on a : $u_{n+1} \leq 6$.
  Si $u_n \leq 6$ alors $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{6}{3}$ d'où $\frac{1}{3}u_n + 4 \leq \frac{1}{3} + 4$
  $u_{n+1} \leq 6$
- **Conclusion :** Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq 6$.

Attention L'hérédité ne suffit pas pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier n.

Exemple (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$ $Qn =$ "$u_n > 6$"
Démontrer que Q est héréditaire.
Si $u_n > 6$ on démontre que $u_{n+1} > 6$.
$\frac{1}{3}u_n > \frac{6}{3}$
$\frac{1}{3}u_n + 4 > 2 + 4$
$\frac{1}{3}u_n + 3 > 6$
donc $u_{n+1} > 6$.
Q_n est héréditaire.