CHAPITRE 1

# Suites numériques

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Suites**<br>Raisonnement par récurrence. | • Savoir mener un raisonnement par récurrence. | Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites. |
| Limite finie ou infinie d'une suite. | ♦ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante $(u_n)$ et un nombre réel $A$, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel $u_n$ est supérieur à $A$. | Pour exprimer que $u_n$ tend vers $\ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang ».<br>Pour exprimer que $u_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang ».<br>Comme en classe de Première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie.<br>On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite. |
| Limites et comparaison. | ■ Démontrer que si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites telles que :<br>– $u_n$ est inférieur ou égal à $v_n$ à partir d'un certain rang ;<br>– $u_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ;<br>alors $v_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$. | ■ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite $\ell$, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $\ell$.<br>Le théorème dit « des gendarmes » est admis. |
| Opérations sur les limites. | • Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. | |
| Comportement à l'infini de la suite $(q^n)$, $q$ étant un nombre réel. | ■ Démontrer que la suite $(q^n)$, avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.<br>• Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique. | On démontre par récurrence que pour $a$ réel strictement positif et tout entier naturel $n$ : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.<br>On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique. |
| Suite majorée, minorée, bornée. | • Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées. | Ce théorème est admis.<br>■ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.<br>Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice.<br>♦ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre.<br>AP *Approximations de réels ($\pi$, e, nombre d'or, etc.).* |

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

## 2. Intentions des auteurs

Dans ce premier chapitre sur les suites numériques :
• on fait le point sur les connaissances de Première, en particulier : sens de variations d'une suite, suites arithmétiques et géométriques ;
• on met en place un nouveau type de raisonnement : le raisonnement par récurrence ;
• on fait une étude approfondie de la notion de limite d'une suite : définitions précises, opérations sur les limites, théorèmes de comparaison, cas des suites monotones.

Toutes ces notions sont abordées à travers la résolution de problèmes le plus souvent liés à la vie courante ou aux autres disciplines par une modélisation de phénomènes discrets. De nombreux QCM, « Vrai ou faux ? » permettent de faire le point rapidement sur la compréhension du cours et aussi la mise en place de raisonnements par contre-exemple.

Un objectif important est de préparer la notion de limite d'une fonction numérique.
Une attention particulière est portée sur le raisonnement : la récurrence bien sûr, mais aussi le raisonnement par condition suffisante.
Les algorithmes permettent également d'appréhender les phénomènes discrets décrits par les suites, sans être forcément formalisés, c'est la démarche algorithmique qui importe.
Tout au long de ce chapitre se précise l'utilisation de logiciels : calculatrices graphiques, traceurs de courbes, tableurs, logiciels de géométrie dynamique ou de programmation. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel doit permettre, en fonction des élèves, de surpasser les difficultés du calcul algébrique.

# Partir d'un bon pied

**Objectif**

*Réactiver chez l'élève :*
*– les différentes façons de définir une suite ;*
*– les variations d'une suite numérique ;*
*– la lecture d'un algorithme.*

**A** 1 **b.** et **c.** 2 **b.** et **c.** 3 **a.** 4 **a.** et **c.**

**B** 1 Faux. 2 Vrai. 3 Faux. 4 Vrai.

**C** 1 Vrai. 2 Faux. 3 Faux.

**D** 1 Vrai. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Faux. 5 Vrai.

# Découvrir

## Activité 1 Vers le raisonnement par récurrence

**Objectif :** *Aborder le raisonnement par récurrence en distinguant les différentes étapes.*

**1** ▸ $P_1$ : « $1 + a \geqslant 1 + a$ ». Propriété vraie.
▸ $Q_1$ : « $10^1 - 1$ est divisible par 9 ». Propriété vraie.
▸ $R_1$ : « $1 \times 2 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{3}$ ». Propriété vraie.

**2 a.** ▸ $P_{n+1}$ : « $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a.$ »
▸ $Q_{n+1}$ : « $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9 ».
▸ $R_{n+1}$ : « $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n+1) \times (n+2)$
$$= \frac{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}{3} \text{ ».}$$

**b.** ▸ Si $P_n$ est vraie, alors $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. Donc en multipliant par $1 + a$, on obtient :
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2.$$
Comme $a^2 \geqslant 0$, on a :
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a.$$
Donc $P_{n+1}$ est vraie.
▸ La propriété $Q_n$ se traduit par $10^n = 9k + 1$, avec $k$ un entier.
Donc $10^{n+1} - 1 = 10(9k+1) - 1 = 90k + 9$
$= 9(10k + 1)$.
Donc $Q_{n+1}$ est vraie.
▸ On a :
$$A = [1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1)] + (n+1)(n+2).$$
Donc en utilisant $R_n$,
$$A = \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3).$$
Donc $R_{n+1}$ est vraie.

## Activité 2 La balle au rebond

**Objectif :** *Modéliser une situation simple et utiliser la calculatrice ou un tableur.*

**1** On a $u_1 = \dfrac{3}{4} \times 1 = 0{,}75$ et $u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = 0{,}5625$.
On modélise cette situation par la suite $u$ de terme général $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
$u_{10} \approx 0{,}056$ ;
$u_{1000} = 1{,}15 \times 10^{-125}$.

**2** En utilisant un tableau (voir ci-contre), à partir du 97e rebond, la hauteur de la balle est inférieure à $10^{-12}$ m.

| n | un |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0,75 |
| 2 | 0,5625 |
| 91 | 4,2714E-12 |
| 92 | 3,2036E-12 |
| 93 | 2,4027E-12 |
| 94 | 1,802E-12 |
| 95 | 1,3515E-12 |
| 96 | 1,0136E-12 |
| 97 | 7,6023E-13 |
| 98 | 5,7017E-13 |

## Activité 3 Un calcul d'aire

**Objectif :** *Résoudre un problème classique qui a joué un rôle historique d'Archimède à Riemann en :*
*– faisant intervenir un raisonnement par récurrence ;*
*– abordant une limite « naturelle ».*

**1 a. b.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, les rectangles ont pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$, où $k$ est l'entier désignant le numéro du rectangle (de 0 à $n-1$).
**c.** On conjecture que la somme des aires de ces rectangles tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**2** D'après **1 a.**, $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

**3** Démontrons par récurrence la propriété $P_k$ :
« $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ » pour tout entier $k \geqslant 1$.

▸ **Initialisation :** $k = 1$.
$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$. Donc $P_1$ est vraie.

▸ **Hérédité :** soit un entier $k \geqslant 1$ tel que $P_k$ est vraie.
Montrons que $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
On a $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$.
Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{(k+1)}{6}\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$
$$= (k+1)[2k^2 + 7k + 6].$$
Donc $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
Donc $P_{k+1}$ est vraie.

▸ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

**4** On a :
$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$
Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

## Activité 4 Convergence vers 0

**Objectifs**
*– Lire et modifier un algorithme.*
*– Approcher la définition mathématique de la convergence d'une suite vers 0.*

**1 a.** L'algorithme donne la valeur $N$ de $n$ à partir de laquelle $u_n < 10^{-3}$.
**b.** Modification : « TantQue $u \geqslant 10^{-6}$ ».
**c.** Soit $\varepsilon > 0$. On a :
$$0 < u_n < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}.$$
On en déduit que si $n \geqslant 1 + E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$, alors $0 < u_n < \varepsilon$.

**2** Soit $\varepsilon > 0$. On a $0 < v_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$.
On en déduit que si $n \geqslant 1 + E\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, alors $0 < v_n < \varepsilon$.
Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

## Activité 5 Variations et équations

**Objectif**
*Mettre en place un large panel de techniques de base pour étudier une suite récurrente : représentation graphique, conjectures, sens de variations, utilisation d'une suite auxiliaire.*

**1** La fonction $f$ est affine de coefficient 0,5, donc elle est croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau ci-dessous.

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 ↗ | 2 |

Pour tout $x \in [0\,;2]$ on a $f(x) \in [1;2]$, donc :
$$f(x) \in [0\,;2].$$

**2 a.** $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1{,}5$, $u_3 = 1{,}75$.
**b.** La suite $u$ semble être croissante.
**c.** Pour tout entier naturel $n$, démontrons la propriété $P_n$ : « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
▸ **Initialisation :** $u_0 \leqslant u_1$ (voir **2 a.**), donc $P_0$ est vraie.
▸ **Hérédité :** soit un entier naturel $n$ tel que $P_n$ est vraie.
Démontrons qu'alors $P_{n+1}$ : « $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ » est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$. Comme la fonction $f$ est croissante, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Donc $P_{n+1}$ est vraie.
▸ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Donc la suite $u$ est croissante.

**3 a.** En B3, il faut écrire **=0,5*B2+1**
**b.** La suite $u$ semble converger vers 2.

**4 a.** En C2, écrire =B2-2 (voir ci-contre). La suite $v$ semble être une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $-2$.

| n | un | vn |
|---|---|---|
| 0 | 0 | -2 |
| 1 | 1 | -1 |
| 2 | 1,5 | -0,5 |
| 3 | 1,75 | -0,25 |
| 4 | 1,875 | -0,125 |
| 5 | 1,9375 | -0,0625 |
| 6 | 1,9688 | -0,0313 |
| 7 | 1,9844 | -0,0156 |
| 8 | 1,9922 | -0,0078 |
| 9 | 1,9961 | -0,0039 |
| 10 | 1,998 | -0,002 |
| 11 | 1,999 | -0,001 |
| 12 | 1,9995 | -0,0005 |
| 13 | 1,9998 | -0,0002 |
| 14 | 1,9999 | -0,0001 |
| 15 | 1,9999 | -6E-05 |
| 16 | 2 | -3E-05 |

**b.** Pour tout entier naturel $n$,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 0{,}5 \times u_n + 1 - 2$
$= 0{,}5 \times (u_n - 2)$.
Donc, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 0{,}5 v_n$.
Donc la suite $v$ est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -2$.
**c.** Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = -2 \times (0{,}5)^n$.
Donc $u_n = 2 + v_n = 2 - 2 \times (0{,}5)^n$.
**d.** La suite $u$ est donc convergente vers 2, car $\lim_{n \to +\infty} 2 \times (0{,}5)^n = 0$.

# Exercices d'application

## Savoir faire Mener un raisonnement par récurrence

**1** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $P(n)$ la propriété :

$$« 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ».$$

◗ **Initialisation :** pour $n = 1$,

on a $1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$.

Donc $P(1)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2$

$= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2] + (n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2$

$$= (n+1) \times \left( \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right)$$

$$= (n+1) \times \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}.$$

Or, $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3)$
$= 2n^2 + 7n + 6$.

Donc :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**2** Démontrons, pour tout entier naturel $n$, la proposition $P(n)$ : « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

◗ **Initialisation :** $2^0 - 1 = 0$ qui est un multiple de 7.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier, $P(n)$ est vraie. Montrons alors $P(n+1)$ : « $2^{3n+3} - 1$ est un multiple de 7 ».

D'après l'hypothèse de récurrence, $2^{3n} = 1 + 7k$, où $k$ est un entier. En multipliant par 8, on obtient $2^{3n+3} = 8 + 56k$, donc $2^{3n+3} - 1 = 7(7 - 8k)$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

**3** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = (n+1)^2$ »

◗ **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.

Donc $P(0)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n = (n+1)^2$.

Alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$,

c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (n+1)^2$.

**4** Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ la propriété : « le nombre de cordes reliant $n$ points du cercle est $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ».

◗ **Initialisation :** pour $n = 2$ on a une seule corde possible et $\dfrac{2(2-1)}{2} = 1$. Donc $P(2)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier, $P(n)$ est vraie. Montrons alors $P(n+1)$ : « le nombre de cordes reliant $n+1$ points du cercle est $\dfrac{(n+1)n}{2}$ ».

Pour obtenir $n+1$ points du cercle, on ajoute un point aux $n$ déjà existants. Donc on ajoute $n$ cordes au nombre total de cordes. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $\dfrac{n(n-1)}{2} + n$ cordes, soit $\dfrac{(n+1)n}{2}$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 2$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout entier $n \geqslant 2$, le nombre de cordes reliant $n$ points du cercle est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

## Savoir faire Déterminer la limite d'une suite à l'aide de la définition

**5** On conjecture :

**a.** la suite $u$ semble ne pas admettre de limite ;

**b.** la suite $v$ semble converger vers 0,5 ;

**c.** la suite $w$ semble diverger vers $+\infty$.

| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 90 | 90 | .47568 |
| 95 | -95 | .47692 |
| 100 | 100 | .47805 |
| 105 | -105 | .47907 |
| 110 | 110 | .48 |
| 115 | -115 | .48085 |
| 120 | 120 | .48163 |

n=120

| n | v(n) | w(n) |
|---|---|---|
| 90 | .47568 | 7920 |
| 95 | .47692 | 8835 |
| 100 | .47805 | 9800 |
| 105 | .47907 | 10815 |
| 110 | .48 | 11880 |
| 115 | .48085 | 12995 |
| 120 | .48163 | 14160 |

w(n)=14160

**6** **1** ◗ On conjecture que la suite $u$ converge vers 0.

◗ Soit $\varepsilon > 0$, on a $|u_n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{5}{n+1} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$.

On en déduit que si $n \geqslant 1 + E\left(\dfrac{5}{\varepsilon} - 1\right)$, alors $u_n < \varepsilon$.

La suite $u$ converge vers 0.

**2** **a.** À partir de $N = 500$, on a $|u_n| \leqslant 0{,}01$.

**b.** À partir de $N = 5 \times 10^{12}$, on a $|u_n| \leqslant 10^{-12}$.

**7** **1** **a. i.** $v_n > 10^5 \Leftrightarrow n^2 + n - 10^5 > 0$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \times 10^5}}{2}$$

Comme $n$ est un entier naturel, $n \geqslant 316$.

**ii.** $v_n > 10^{10} \Leftrightarrow n^2 + n - 10^{10} > 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+4\times 10^{10}}}{2}$.

Comme $n$ est un entier naturel, $n > 99999$.

**b.** On conjecture que la suite $v$ diverge vers $+\infty$.

**2** Soit $A \geqslant 0$, on a $v_n > A \Leftrightarrow n^2 + n - A > 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+4\times A}}{2}$.

Comme $n$ est un entier naturel,

$$n \geqslant 1 + E\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\times A}}{2}\right).$$

Donc la suite $v$ diverge vers $+\infty$.

## Savoir faire Étudier le comportement à l'infini d'une suite

**8** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Multiplication des limites.

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\sqrt{n}+5) = +\infty$.
Multiplication des limites. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Division des limites.

**9** **a.** Pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$u_n = 4\times\frac{1-\dfrac{1}{4n}}{1+\dfrac{4}{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{4n}}{1+\dfrac{4}{n}} = 1$ (somme et quotient de limites). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$u_n = 2n\times\frac{1-\dfrac{5}{2n}+\dfrac{3}{2n^2}}{1+\dfrac{4}{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\dfrac{5}{2n}+\dfrac{3}{2n^2}}{1+\dfrac{4}{n}} = 1 \text{ (somme et quotient de limites).}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**10** **a.** En utilisant l'algorithme ci-dessous, on obtient en entrant $A = 10^{-5}$ : $N = 100\,000$.

**ALGO**

```
Entrer (A) ;
N ← 2 ;
Tant que |(N² − 1) ÷ (N³ + 1)| > A Faire
        N ← N + 1
FinTantQue ;
Afficher (N).
```

## Savoir faire Déterminer une limite par comparaison

**11** **a.** Pour tout entier $n$ non nul, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

**b.** Pour tout entier $n$ non nul, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, donc :

$$1-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

**12** **1** **a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n - (n-6) = \frac{n^2-3n+5}{n+3} - n + 6$$
$$= \frac{n^2-3n+5-n(n+3)+6(n+3)}{n+3} = \frac{23}{n+3}.$$

Or, $n+3 > 0$, car $n$ est un entier naturel.
Donc $u_n - (n-6) \geqslant 0$, c'est-à-dire que $u_n \geqslant n-6$.

**b.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n-6 = +\infty$, d'après le théorème de minoration $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**2** Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = n\frac{n-3+\dfrac{5}{n}}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)} = \frac{n-3+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3+\dfrac{5}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n} = 1$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**13** **1** On conjecture que la suite $v$ diverge vers $-\infty$.

**2** Pour tout entier naturel $n$, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a $v_n \leqslant -2n+1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+1) = -\infty$, d'après le théorème de minoration, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

**3** Pour avoir $v_n < -1000$, il suffit d'avoir :
$-2n+1 < -1000$, soit $n > 500{,}5$.
Dès que l'entier $n$ est supérieur à 501, on a : $v_n < -100$.

## Savoir faire Déterminer le comportement à l'infini d'une suite récurrente

**14** **1** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $4 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ ».

- **Initialisation :** on a $v_0 = 6$, $v_1 = 4{,}5$, donc $4 \leqslant v_1 \leqslant v_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** démontrons que si pour **un** entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $4 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$ » est vraie.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{4} + 3$ est une fonction affine croissante, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence $4 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$, on a $f(4) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$, soit $4 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n$, $P(n)$ est vraie.
Donc, pour tout entier naturel $n$, $4 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

**2** La suite $v$ est décroissante et minorée, donc elle converge.
On note $\ell$ la limite de $v$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{4} + 3 = \dfrac{\ell}{4} + 3$.

Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{\ell}{4} + 3$. Donc $\ell = 4$.

**3** $w_{n+1} = v_{n+1} - 4 = \dfrac{u_n}{4} + 3 - 4 = \dfrac{1}{4}(v_n - 4)$.

Pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} = \dfrac{1}{4} w_n$. Donc la suite $w$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

Donc pour tout entier naturel $n$, $w_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. On en déduit $v_n = 4 + 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

**15** **a.** Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. En multipliant par 0,1 (positif), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**b.** Comme $|-0{,}5| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}5)^n = 0$. En multipliant par 100, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**c.** Comme $\dfrac{5}{2} > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{2}\right)^n = +\infty$. En multipliant par 2 (positif), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^n = +\infty$.

Comme $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$. En multipliant par 4, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{3^n} = 0$.
Donc, par différence, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

# Travaux pratiques

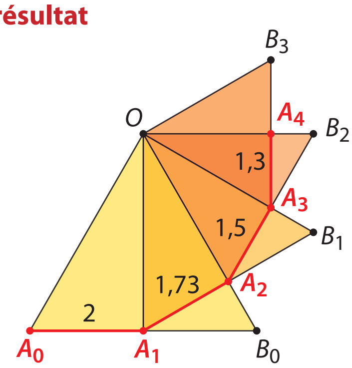
## 16 Longueur d'une spirale

### ① Se faire une idée du résultat

**1** Faire la construction.

**2** $a_0 = 2$ ; $a_1 \approx 1{,}73$ ; $a_2 \approx 1{,}5$ et $a_3 \approx 1{,}3$.
On a :
$\ell_2 \approx 2 + 1{,}73 \approx 3{,}73$ et
$\ell_3 \approx 5{,}2$.

**3** La suite $a$ semble géométrique de raison 0,8.






### ② Valider la conjecture formulée

**1** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $OA_nB_n$ est équilatéral ».

**Initialisation :** $OA_0B_0$ est équilatéral. Donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** démontrons que si pour **un** entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $OA_{n+1}B_{n+1}$ est équilatéral » est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $OA_nB_n$ est équilatéral.
La droite $(OA_{n+1})$ est la médiatrice du segment $[A_nB_n]$, donc $\widehat{A_{n+1}OA_n} = 30°$. Donc, par construction du symétrique $B_{n+1}$, le triangle $OA_{n+1}B_{n+1}$ est équilatéral.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie. Donc, pour tout entier naturel $n$, le triangle $OA_nB_n$ est équilatéral.

**2** On a, pour tout entier naturel $n$ : $c_{n+} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} c_n$. La suite $c$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme 4. Comme $a_n = \dfrac{c_n}{2}$, la suite $a$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme 2.

**3** $\ell_n$ est la somme des $n$ premiers terme d'une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premiers termes 2, donc :

$$\ell_n = 2 \times \frac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1}.$$

On a donc : $\ell_n = 4(2+\sqrt{3})\left(1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$.

**4** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ inférieure à 1 en valeur absolue), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = 4(2+\sqrt{3})$ (opération sur les limites).

## 17 Convergence d'une suite

**Objectifs :** *Construire un algorithme pour étudier une somme. Utiliser le théorème des gendarmes.*

### Partie A

**1** Extrait de l'algorithme complété :

ALGO
```
Pour i allant de n à 1 Faire
  u ← u + sin i/n²
FinPour ;
```

**2** Après avoir programmé cet algorithme, on obtient : $u_{10} \approx 0{,}549$, $u_{50} \approx 0{,}505$ et $u_{100} \approx 0{,}504$.

**3** Il semble que la suite $u$ soit décroissante et converge vers 0,5.

### Partie B

**1** On a $v_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}$.

Donc $v_n = \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

**2** Pour tout entier $i$ compris ente 1 et $n$, $\frac{i}{n^2} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\frac{i}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{i}{n^2}\right)^3 \leqslant \sin\frac{i}{n^2} \leqslant \frac{i}{n^2}$, soit, en sommant membres à membres ces inégalités pour $i$ variant de 1 à $n$, $v_n - \frac{1}{6n^6}\left[1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right] \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Donc, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$v_n - \frac{1}{24}\frac{(n+1)^2}{n^4} \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

**3** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{24}\frac{(n+1)^2}{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{24n^2} = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (d'après le théorème des gendarmes).

## 18 Étudier une suite arithmético-géométrique par deux méthodes

**Objectif :** *Mettre en œuvre deux méthodes de base pour démontrer la convergence d'une suite.*

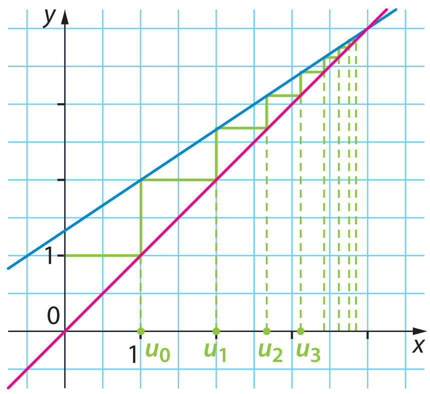
**1** $u_1 = 2$,

$u_2 = \frac{8}{3}$,

$u_3 = \frac{28}{9}$.

**2 a. b.** Voir le graphique ci-contre.

**c.** La suite $u$ semble croissante et majorée par 4.




**3 a.** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

◗ **Initialisation :**

$u_0 = 1$, $u_2 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ :

« $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$ » est vraie.

La fonction $f$ est une fonction affine croissante.

D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, donc $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$ et comme $f(4) = 4$, on obtient $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. La suite $u$ est croissante et majorée par 4.

**b.** La suite $u$ est croissante et majorée par 4, donc elle converge.

Sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $x = \frac{2x+4}{3}$, soit $x = 4$. La suite $u$ converge vers 4.

**4 a.** On a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{2u_n + 4}{3} - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 4)$.

Donc, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. La suite $v$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -3$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = -3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Donc $u_n = 4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

**c.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement inférieure à 1). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

## 19 Étudier le comportement à l'infini d'une suite

**Objectif :** *Conjecturer et prendre des initiatives dans le type de démonstration à utiliser.*

**1** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \neq 0$ ».

◗ **Initialisation :** $u_0 = a \neq 0$, $P(0)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $u_{n+1} \neq 0$ » est vraie.

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n)^2 + 1}{u_n}$, donc $u_{n+1} \neq 0$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier naturel $n$, $u_n \neq 0$. La suite $u$ est bien définie.

**2 a.** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

◗ **Initialisation :** $u_0 = a > 0$, $P(0)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $u_{n+1} > 0$ » est vraie.

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n)^2 + 1}{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ d'après ce qui précède. Donc la suite $u$ est croissante.

Si la suite $u$ est majorée, alors, comme elle est croissante, elle converge vers $\ell$ solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$.

Cette équation n'a pas de solution, donc la suite n'est pas majorée. Et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

**b.** Dans le cas $a < 0$, en utilisant les mêmes méthodes, on prouve que la suite $u$ est négative, décroissante et qu'elle tend vers $-\infty$.

## 20 Des « 1 » partout !

**Objectif :** *Conjecturer, faire des recherches et bâtir une démonstration.*

◗ Par construction, le réel cherché (s'il existe) est la limite de la suite $u$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

◗ Si la suite $u$ converge, elle converge vers une solution de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

Cette équation admet deux solutions $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\varphi}$, où $\varphi$ est le nombre d'or.

Comme la suite $u$ est simplement minorée par 1, elle ne peut converger que vers $\varphi$.

Comme $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on a :

$$u_{n+1} - \varphi = 1 + \frac{1}{u_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}$$

soit : $$|u_{n+1} - \varphi| = \frac{|u_n - \varphi|}{u_n \varphi}.$$

Donc, comme pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi}|u_n - \varphi| \ (1).$$

Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété :

$$« |u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |u_0 - \varphi| ».$$

**Initialisation :** $|u_0 - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^0 |u_0 - \varphi|$, donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** démontrons que si, pour un entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |u_0 - \varphi|$ » est vraie.

D'après l'inégalité (1), $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}|u_n - \varphi|$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi} \times \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |u_0 - \varphi|.$$

Donc $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |u_0 - \varphi|$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie. Comme $\dfrac{1}{\varphi} < 1$, la suite géométrique de terme général $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |u_0 - \varphi|$ converge vers 0.

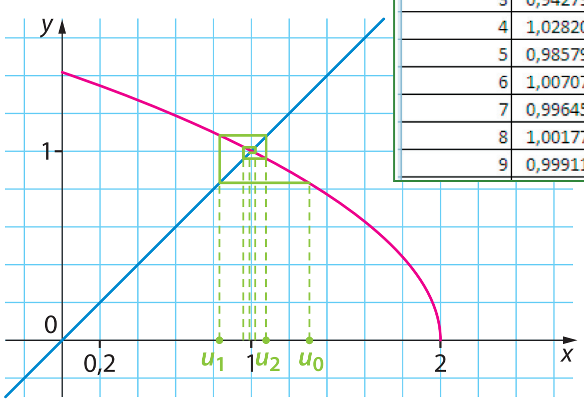
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \varphi| = 0$. La suite $u$ converge vers $\varphi$.

## 21 Que de racines !

**Objectif :** *Conjecturer, faire des recherches et bâtir une démonstration.*

Que ce soit à l'aide de Geogébra ou à l'aide d'un tableur, on conjecture que la suite $u$ n'est pas monotone, mais semble converger vers 1.

| n | un |
|---|---|
| 0 | 1,41421356 |
| 1 | 0,76536686 |
| 2 | 1,1111404 |
| 3 | 0,9427934 |
| 4 | 1,02820549 |
| 5 | 0,98579638 |
| 6 | 1,0070767 |
| 7 | 0,9964553 |
| 8 | 1,0017707 |
| 9 | 0,9991142 |




Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété :

« $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$ ».

**Initialisation :** $\dfrac{1}{2} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \dfrac{3}{2}$, $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$ » est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Donc $\dfrac{1}{2} \leqslant 2 - u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$, soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{2-u_n} \leqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Comme $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \leqslant \dfrac{3}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie.

$$u_{n+1} - 1 = \sqrt{2-u_n} - 1 = \frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2-u_n} + 1}$$
$$= (1 - u_n) \times \frac{1}{\sqrt{2-u_n} + 1}.$$

Comme $\dfrac{1}{2} \leqslant \sqrt{2-u_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$, on a :

$$\frac{3}{2} \leqslant 1 + \sqrt{2-u_n} \leqslant \frac{5}{2}.$$

Donc : $$\frac{1}{\sqrt{2-u_n} + 1} \leqslant \frac{2}{3}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel $n$ :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété :

$$« |u_n - 1| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |\sqrt{2} - 1| ».$$

**Initialisation :** $|\sqrt{2} - 1| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 |\sqrt{2} - 1|$, $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** démontrons que si, pour un entier $n$, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ : « $|u_{n+1} - 1| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} |\sqrt{2} - 1|$ » est vraie. On a vu que $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$.

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |\sqrt{2} - 1|$, soit :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |\sqrt{2} - 1|.$$

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $P(n)$ est vraie. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, la suite géométrique de terme général $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n |\sqrt{2} - 1|$ converge vers 0.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$. La suite $u$ converge vers1.

# Faire le point

**25** **1** **a.** et **b.** **2** **c.** **3** **a.** et **c.** **4** **c.**
**5** **a.** et **b.** **6** **b.** et **c.** **7** **b.** **8** **c.**

**26** **1** **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux.
**2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

# Exercices d'application

## 1 Raisonnement par récurrence

**27** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai. **5** Vrai.

**28** **1** **a.** Vrai, car si $6^n - 1 = 5k$, alors :
$6^{n+1} - 1 = 6 \times 6^n - 1 = 6 \times (5k + 1) - 1 = 5(6k + 1)$.
**b.** Vrai. **c.** Faux.
**2** **a.** Vrai, car si $6^n + 1 = 5k$, alors :
$6^{n+1} + 1 = 6 \times 6^n + 1 = 6 \times (5k - 1) + 1 = 5(6k - 1)$.
**b.** Faux. **c.** Vrai, par exemple $n = 1$.

### Démontrer par récurrence

**29** **1** Propriété pour tout entier $n \geqslant 1$ :
$$P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
**Initialisation :** $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ ; vrai.
Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3.$$
Donc, en factorisant :
$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right].$$
Donc $1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2}{4}[(n+2)^2]$.
La propriété $P(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
**2** Propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ :
$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$
**Initialisation :** pour $n = 1$,
$$\frac{1}{1\times2\times3} = \frac{1}{6} \text{ et } \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}.$$
Donc $P(1)$ est vraie.
Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.
$$\text{Soit } A = \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$
Donc $A = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
soit, en factorisant :
$$A = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n(n+3)}{4} + \frac{1}{(n+3)}\right] = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+3)}\right];$$
donc :
$$A = \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)};$$
la propriété $P(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

**30** Propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ :
« la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $(f_n)'(x) = nx^{n-1}$ ».
**Initialisation :** $f_0 : x \mapsto 1$. Donc, pour tout réel $x$, $(f_0)'(x) = 0$, donc $P(0)$ est vraie.
Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.
Soit $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \times f_n(x)$,
donc $(f_{n+1})'(x) = f_n(x) + x \times (f_n)'(x)$ soit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$(f_{n+1})'(x) = x^n + x \times nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$
La propriété $P(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** pour tout entier $n$, $(f_n)'(x) = nx^{n-1}$.

**31** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $P(n)$ la propriété : « $n! \geqslant 2^{n-1}$ ».
**Initialisation :** pour $n = 1$, on a $1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$.
Donc $P(1)$ est vraie.
**Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $n! \geqslant 2^{n-1}$.
On a $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$$(n+1)! \geqslant (n+1) \times 2^{n-1}.$$
Or, $n \geqslant 1$. Donc $n + 1 \geqslant 2$ et $(n+1) \times 2^{n-1} \geqslant 2 \times 2^{n-1}$.
On en déduit que $(n+1)! \geqslant 2^n$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

**32** Soit $P(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par :
« $4^n + 1$ est divisible par 3 ».
Ce raisonnement est inexact, car on ne peut pas initialiser la récurrence.

**33** Soit la propriété : « $1! + 2! + \ldots + (n-1)! \leqslant n!$ ».
**Initialisation :** $P(2)$ : $1! \leqslant 2!$ est vraie.
Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors :
$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n! \leqslant (n+1)!$$
On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n! \leqslant n! + n!$$
Mais $2n! \leqslant (n+1)!$. On a donc :
$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n! \leqslant (n+1)!$$
**Conclusion :** pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! \leqslant n!$$

**34** Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :
$$P(n) : \text{« } 2^n \geqslant (n+1)^2 \text{ ».}$$
**1** Supposons que $2^n \geqslant (n+1)^2$, démontrons que :
$$2^{n+1} \geqslant (n+2)^2.$$
D'après l'hypothèse de récurrence $2 \times 2^n \geqslant 2(n+1)^2$.

On a :

$$2(n+1)^2-(n+2)^2=n^2-2\geqslant 0 \text{ si } n\geqslant 2.$$

Donc $2(n+1)^2\geqslant(n+2)^2$. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.

**2** $P(6)$ est vraie, donc pour tout entier $n\geqslant 6$ :

$$2^n\geqslant(n+1)^2.$$

## Étudier des suites

**35** **1** $v_1=1$, $v_2=4$, $v_3=9$, $v_4=16$.

On conjecture que pour tout entier naturel $n$, $v_n=n^2$.

**2** Propriété $P(n)$ pour tout entier $n\geqslant 0$ : « $v_n=n^2$ ».

- **Initialisation :** $0^2=0=v_0$.
- Démontrons que si, pour un entier $n$, $v_n=n^2$, alors $v_{n+1}=(n+1)^2$.

On a :

$$v_{n+1}=v_n+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **En conclusion**, pour tout entier naturel $n$, $v_n=n^2$.

**36** **1** La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y=0{,}5x+1$ ; la droite $\Delta$ a pour équation $y=x$.

On lit $u_1=-0{,}5$ ; $u_2\approx 0{,}8$ et $u_3\approx 1{,}4$.

**2** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété :

« $u_n\leqslant 2$ ».

- **Initialisation :** pour $n=0$, on a :

$$u_0=-3\leqslant 2.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $u_n\leqslant 2$.

On en déduit que :

$$0{,}5u_n+1\leqslant 0{,}5\times 2+1,$$

soit $0{,}5u_n+1\leqslant 2$.

Ainsi $u_{n+1}\leqslant 2$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_n\leqslant 2$.

**3** Pour tout entier $n$,

$u_{n+1}-u_n=0{,}5u_n+1-u_n=1-0{,}5u_n=0{,}5(2-u_n)$.

Comme $u_n\leqslant 2$, on a :

$$2-u_n\geqslant 0.$$

On en déduit que pour tout entier $n$, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.

Donc la suite $u$ est croissante.

**37** **1** Voir le schéma ci-après.

La suite $v$ semble croissante.

**2** On pose pour tout entier $n$, $P(n)$ :

« $v_n\geqslant 0$ ».

- **Initialisation :** $v_0=0$, donc $P(0)$ est vraie.
- Démontrons que si $v_n\geqslant 0$, alors $v_{n+1}\geqslant 0$.

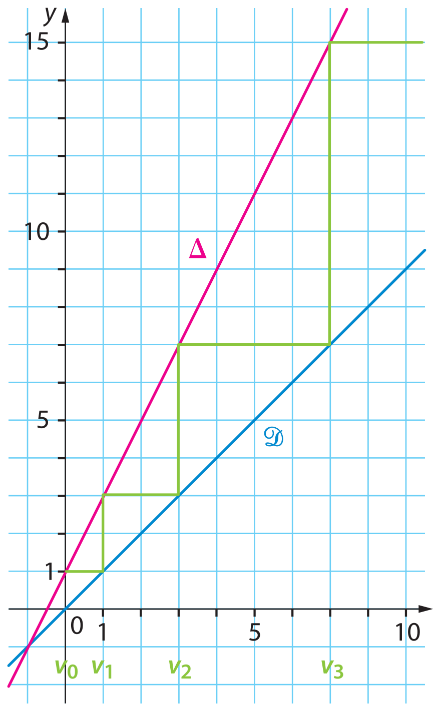
Si $v_n\geqslant 0$, alors $2v_n+1\geqslant 1$,

donc $v_{n+1}\geqslant 0$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $v_n\geqslant 0$.

**3** $v_{n+1}-v_n\geqslant v_n+1\geqslant 0$ d'après la question précédente. Donc, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1}\geqslant v_n$. La suite $v$ est croissante.






**38** On pose, pour tout entier naturel $n$,

$$P(n) : u_n=4\times 3^n-1.$$

- **Initialisation :** $u_0=4\times 3^0-1=3$. $P(0)$ est vraie.
- Démontrons que si $P(n)$ est vraie alors :

$$u_{n+1}=4\times 3^{n+1}-1.$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence,

$u_{n+1}=3u_n+2=3(4\times 3^n-1)+2=4\times 3^{n+1}-1$.

- **Conclusion :** pour tout entier $n$, $u_n=4\times 3^n-1$.

**39** Démontrons par récurrence la propriété :

$$P(n) : « 1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n ».$$

- **Initialisation :** comme $u_1=\sqrt{8+1}=3$, $P(0)$ $1\leqslant u_1\leqslant u_0$ est vraie.
- Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors :

$$1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}.$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence et comme $f : x\longmapsto\sqrt{x+1}$ est une fonction croissante, on a :

$$f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n),$$

donc comme $1\leqslant\sqrt{2}$, on a : $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

- **Conclusion :** la suite $u$ est minorée par 1 et décroissante.

**40** **1** Pour tout réel $x\in\,]-1;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{6}{(x+1)^2}>0.$$

La fonction $f$ est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

**1** Démontrons par récurrence la propriété :

$$P(n) : « u_n>2 ».$$

- **Initialisation :** $P(0) : u_0=3>2$ est vraie.
- Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $u_{n+1}>2$.

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence et comme $f$ est une fonction croissante, on a $f(u_n)>f(2)$, donc comme $f(2)=2$, on a $u_{n+1}>2$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n>2$.

**3** Pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n)^2+3u_n-2}{u_n+1}=\frac{(2-u_n)(u_n-1)}{u_n+1}.$$

Comme $u_n > 2$, $2 - u_n < 0$ et $u_n - 1 \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite $u$ est décroissante.

**41** Démontrons par récurrence la propriété :
$P(n)$ : « pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ ».

**Initialisation :**
comme $u_0 = \dfrac{3^0 - 1}{2} = 0$ et $u_1 = \dfrac{3^1 - 1}{2} = 1$, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Soit un entier $n \geqslant 1$. Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.
En tenant compte de l'hypothèse de récurrence
$$u_{n+1} = 4\frac{3^n - 1}{2} - 3\frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{4 \times 3^n - 4 - 3^n + 3}{2},$$
soit : $$u_{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

## 2 Limite finie ou infinie d'une suite

**42** a. Faux. b. Faux. c. Vrai. d. Faux.

**43** a. Faux. b. Vrai. c. Vrai. d. Faux.

**44** 1 Faux. 2 Faux.

### Utiliser des définitions

**45** 1 a. $0 \leqslant u_n < e \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < e \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{e} \geqslant E\left(\dfrac{1}{e}\right)$.
b. Pour tout réel $e$ strictement positif, il existe un entier $p = 1 + E\left(\dfrac{1}{e}\right)$ tel que dès que $n \geqslant p$, on a $0 \leqslant u_n < e$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2 On démontre de même que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

**46** 1 Comme la suite $u$ converge vers $\ell$, pour $\varepsilon < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$, il existe un entier $p$ tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \in ]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon[$.
2 Comme la suite $u$ converge vers $\ell'$, pour $\varepsilon < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$, il existe un entier $m$ tel que si $n \geqslant m$, alors $u_n \in ]\ell' - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon[$.
Comme les deux intervalles précédents sont disjoints, dès que $n \geqslant \sup(p, m)$ il y a impossibilité. Donc les limites $\ell$ et $\ell'$ ne peuvent pas être différentes.

**47** Soit $e$ un réel strictement positif.
1 Pour $x \in [0\,;+\infty[$, $\dfrac{3}{2x+1} < e \Leftrightarrow x > \dfrac{3 - e}{2e}$.
2 a. On pose $p = 1 + E\left(\dfrac{3 - e}{2e}\right)$. Pour tout entier $n \geqslant p$, on a $0 \leqslant u_n < e$.
b. On en déduit que la suite $u$ converge vers 0.

**48** a. • La suite $u$ est décroissante.
• On conjecture que la suite $u$ converge vers 0.
• Pour $n \geqslant 20\,000$, $u_n \in ]-10^{-4}\,;10^{-4}[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\dfrac{2}{e}\right)$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n| < e$.
Donc la suite $u$ converge vers 0.
b. • La suite $u$ est décroissante.
• On conjecture que la suite $u$ converge vers 0.
• Pour $n \geqslant 99\,980\,001$, $u_n \in ]-10^{-4}\,;10^{-4}[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)^2\right)$ tel que si $n \geqslant p$ alors $|u_n| < e$.
Donc la suite $u$ converge vers 0.

**49** a. • La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 - 3x}{x + 2}$ est telle que $f'(x) = \dfrac{-7}{(x+2)^2} < 0$. Donc la fonction $f$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite $u$ est décroissante.
• On conjecture que la suite $u$ converge vers $-3$.
• Pour $n \geqslant 69\,999$, $u_n \in ]-3 - 10^{-4}\,;-3 + 10^{-4}[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\dfrac{7}{e}\right)$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n + 3| < e$.
Donc la suite $u$ converge vers $-3$.
b. • La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ est telle que $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2} \geqslant 0$. Donc la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite $u$ est croissante.
• On conjecture que la suite $u$ converge vers 1.
• Pour $n \geqslant 100$, $u_n \in ]1 - 10^{-4}\,;1 + 10^{-4}[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n - 1| < $ e (il suffit que $p^2 > \dfrac{1}{e} - 1$ ).
Donc la suite $u$ converge vers 1.

**50** 1 On considère une suite $u$ qui converge vers $\ell$. Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p$ tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \in ]\ell - e\,;\ell + e[$.
On pose $M$ le plus grand des réels $u_0, u_1, \ldots, u_p, \ell + e$.
Alors, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant M$.
Donc la suite $u$ est majorée.
On démontre de même que la suite $u$ est minorée.
2 Une suite peut être bornée sans pour autant converger, par exemple, la suite géométrique de raison $-1$.

**51** 1 Soit un réel $A$.
• $A < 0$, pour tout entier naturel $u_n > A$.
• Si $A \geqslant 0$, alors $u_n > A \Leftrightarrow n > A^2$.
2 Quel que soit le réel $A$, dès qu'on a $n > A^2$, on a $u_n > A$.
Donc la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

**52** 1 On résout :
$u_n > 10 \Leftrightarrow \dfrac{n^2 + 3}{n} > 10 \Leftrightarrow n^2 - 10n + 3 > 0$, car $n \geqslant 1$.
On calcule $\Delta = 88$ ; $x_1 = 5 - \sqrt{22} \approx 0{,}3$ et $x_2 = 5 + \sqrt{22} \approx 9{,}7$.
Comme $n$ est entier, on a $u_n > 10 \Leftrightarrow n \geqslant 10$.

Ainsi, à partir du rang $n_0 = 10$, tous les termes de la suite $u$ appartiennent à l'intervalle $]10\,;+\infty[$.

**2** On résout :

$$u_n > A \Leftrightarrow \frac{n^2+3}{n} > A \Leftrightarrow n^2 - A\times n + 3 > 0, \text{car } n \geqslant 1.$$

On calcule $\Delta = A^2 - 12$.

• Si $|A| < \sqrt{12}$, on a $\Delta < 0$, et, pour tout entier $n$, $n^2 - A\times n + 3 > 0$. On peut choisir $n_0 = 0$.

• Si $|A| = \sqrt{12}$, on a $\Delta = 0$, et, pour tout entier $n \neq \frac{A}{2}$, $n^2 - A\times n + 3 > 0$. On peut choisir $n_0 = 0$.

• Si $|A| > \sqrt{12}$, on a $\Delta > 0$, et pour tout entier $n > \frac{A+\sqrt{A^2-12}}{2}$, $n^2 - A\times n + 3 > 0$.

On peut choisir $n_0 = E\left(\frac{A+\sqrt{A^2-12}}{2}\right)+1$.

Ainsi, à partir du rang $n_0$, tous les termes de la suite $u$ appartiennent à l'intervalle $]A\,;+\infty[$.

**3** Par définition, la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**53** **1** • La fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 3$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite $u$ est croissante.

On conjecture que la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

**i.** Pour $n \geqslant 224$, alors $u_n \geqslant 10^5$.

**ii.** Pour $n \geqslant 707\,107$, alors $u_n > 10^{12}$.

• Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p \geqslant \sqrt{\frac{A+3}{2}}$ tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \geqslant A$.

Donc la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

**2** • La fonction $f : x \longmapsto 2\sqrt{x}+5$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite $u$ est croissante.

On conjecture que la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

**i.** Pour $n \geqslant 3\times 10^9$, alors $u_n > 10^5$.

**ii.** Pour $n \geqslant 3\times 10^{23}$, alors $u_n > 10^{12}$.

• Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p \geqslant \left(\frac{A-5}{2}\right)^2$ tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \geqslant A$.

Donc la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

**54** Soit $A > 0$. On a $-2n^2 + 3 < -A \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A+3}{2}}$.

Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\sqrt{\frac{A+3}{2}}\right)$ tel que si $n \geqslant p$, alors $v_n \leqslant -A$.

La suite $v$ diverge vers $-\infty$.

## Utiliser des opérations sur les limites

**55** **1** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - n^2 = -\infty$.

**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$.

**d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ;

$u_n + v_n = (-1)^n$ qui n'a pas de limite.

**2** **a.** $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

**b.** $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

**c.** $u_n = n^2$ et $v_n = -\frac{1}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$

**d.** $u_n = n$ et $v_n = \frac{4}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$.

**56** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -4n = -\infty$.

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

**57** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

**58** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2n} = 0$.

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$.

**59** **a.** Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{5}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

**b.** Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n}+1\right)} = \frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{3}{n}+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} + 1 = 1$.

Donc, par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**60** **a.** La suite $u$ est divergente.

**b.** On a $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

**61** **a.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**b.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

**62** **a.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**b.** On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

**63** **a.** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$.

**b.** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} 3 = 3$.

**64** **a.** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n^2}{2n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

**b.** $v_n = \dfrac{n^2 + n - 1^{-1/n}}{2n^2}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2}{2n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

## En situation

**65** **1** Il semble que la suite $u$ converge vers 0 :

| n | u(n) |
|---|---|
| 29 | .03226 |
| 30 | .03125 |
| 31 | .0303 |
| 32 | .02941 |
| 33 | .02857 |
| 34 | .02778 |
| 35 | .02703 |

u(n)■u(n−1)/(1+...

**2** Pour tout entier naturel $n$ :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 1 = \frac{1 + u_n}{u_n} + 1 = \frac{1}{u_n} + 1 + 1 = v_n + 1.$$

Donc la suite $v$ est arithmétique de raison 1 et de terme initial $v_0 = \dfrac{1}{u_n} + 1 = 2 + 1 = 3$.

**3** Pour tout entier $n$, $v_n = 3 + 1 \times n = 3 + n$.

Or, $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$. Donc $u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{1}{2 + n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2 + n} = 0$, la suite $u$ converge vers 0.

**66** **1** La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x + 1}{2x^3 + 1}$ est telle que :

$$f'(x) = -\frac{4x^3 + 6x^2 - 1}{(2x^3 + 1)^2} < 0 \text{ sur } [1 ; +\infty[.$$

Donc la fonction $f$ est décroissante.
La suite $u$ est décroissante.

**2** On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2n^3} = 0$.

**3** **a.** La distance entre $u_n$ et 0 est égale à $\dfrac{n + 1}{2n^3 + 1}$.

**b.** On modifie l'algorithme comme ci-dessous.

**c. i.** Pour $e = 10^{-2}$ on obtient $N = 8$.

**ii.** Pour $e = 10^{-5}$ on obtient $N = 225$.

**ALGO**

Variables :
  $N$ : entier ; $e$ : réel
Début :
  *Entrer (e)*
  $N \leftarrow 0$ ;
  TantQue $\dfrac{N + 1}{2N^3 + 1} \geqslant e$ faire
    $N \leftarrow N + 1$ ;
  FinTantQue
  Afficher ($N$) ;
Fin.

## 3 Limites et comparaison

**67** **1** **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai.
**2** Faux.

**68** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

### Théorème de majoration, de minoration

**69** **1** C'est la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

**2** Comme à partir du rang $p$, $v_n < A$ et $u_n \leqslant v_n$, on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n < A$. On en déduit que la suite $u$ diverge vers $-\infty$.

**70** **a.** Pour tout entier naturel $n$, $n^2 - n \leqslant u_n \leqslant n^2 + n$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - n = +\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $-3n \leqslant u_n \leqslant -n$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

**71** **1** La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
Donc pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

**2** Pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, \frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, \ldots \,;$$
$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$u_n \geqslant \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ termes}}$. Donc $u_n \geqslant n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

**3** Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, d'après le théorème de minoration, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**72** **1** Il semble que la suite $u$ diverge vers $-\infty$.

**2** **a.** Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : « $v_n \leqslant 0$ ».

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $v_0 = 0 \leqslant 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $v_n \leqslant 0$.
On en déduit que $2v_n - 3 \leqslant -3$, soit $v_{n+1} \leqslant -3$.
Ainsi, $v_{n+1} \leqslant 0$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_n \leqslant 0$.
Or, $v_{n+1} - v_n = 2v_n - 3 - v_n = v_n - 3$.
Donc : $\qquad v_{n+1} - v_n \leqslant -3$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$,

$$v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \ldots + (v_1 - v_0).$$

Et, comme pour tout entier $k$, $v_k - v_{k-1} \leqslant -3$, on a :

$$v_n \leqslant \underbrace{(-3)+(-3)+\ldots+(-3)}_{n \text{ termes}}.$$

Donc $v_n \leqslant -3n$.

**c.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$, d'après le théorème de majoration, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Ainsi, la suite $v$ diverge vers $-\infty$.

**73** **1** $f(x)-(x+1) = \dfrac{x^2}{4} - x + 1 = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2 \geqslant 0$.

Donc, pour tout réel $x$, $f(x) \geqslant x+1$.

**2** D'après **1**, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 1$. La suite $u$ est croissante.

**3** $u_n - u_0 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-1}) + \ldots$
$+ (u_1 - u_0)$.

Donc d'après **2**, $u_n - u_0 \geqslant 1 + 1 + \ldots + 1$, soit $u_n \geqslant n + 3$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**4** Pour que $u_n \geqslant 10^6$, il suffit que $n+3 \geqslant 10^3$, soit $n \geqslant 10^3 - 3$ ; on prend, par exemple, $N = 997$.

## Théorème des gendarmes

**74** **a.** Pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

**b.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a $\dfrac{-1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

**75** **1** La suite de terme général $v_k = \dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$ est décroissante. Donc $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit que :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

**2** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

**76** **1** Pour tout entier $n \geqslant 2$ :

$$u_n - 3 = \frac{3n + (-1)^n\cos(n)}{n-1} - 3$$

$$= \frac{3n + (-1)^n\cos(n) - 3n + 3}{n-1} = \frac{3 + (-1)^n\cos(n)}{n-1}.$$

**2** Pour tout entier $n \geqslant 2$ :

$-1 \leqslant (-1)^n\cos(n) \leqslant 1$, donc $2 \leqslant 3 + (-1)^n\cos(n) \leqslant 4$.

Comme $n - 1 \geqslant 1$, on obtient :

$$\frac{2}{n-1} \leqslant u_n - 3 \leqslant \frac{4}{n-1}.$$

On en déduit que $|u_n - 3| \leqslant \dfrac{4}{n-1}$.

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n-1} = 0$, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 3| = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

**3** Pour que $|u_n - 3| \leqslant 0{,}01$, il **suffit** que $\dfrac{4}{n-1} \leqslant 0{,}01$, c'est-à-dire que $n \geqslant 401$.

À partir du rang $N = 401$, on est sûr que la distance entre $u_n$ et 3 est inférieure à 0,01.

**77** **1** $u_{10} \approx 1{,}9964$ et $u_{100} \approx 2$.

La suite $u$ semble converger vers 2.

**2** Pour tout entier naturel $n$, $-3 \leqslant -3\sin n \leqslant 3$. On en déduit que, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

On en déduit que la suite $u$ converge vers 2 en utilisant le théorème des gendarmes.

**3** **a.** D'après **2**, pour tout entier $n$ :

$$\frac{-5}{n^2+1} \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$

**b.** On a donc $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{5}{n^2+1}$.

Pour que la distance entre $u_n$ et 2 soit inférieure à $10^{-3}$, il suffit que $\dfrac{5}{n^2+1} \leqslant 10^{-3}$, soit $n \geqslant 71$.

**c.** Non, $u_{74} \approx 2{,}0002$.

# 4 Convergence de certaines suites

**78** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai.

**79** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

## Cas des suites monotones

**80** **1** La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et la fonction $x \longmapsto 1 + x$ ont même sens de variations sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$. Donc la fonction $f$ est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

**2** *Remarque* : l'équation $f(x) = x$ admet bien une unique solution, car :

$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$ et $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ et $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On sait que $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

La fonction $f$ est croissante sur $[-1\,;+\infty[$, donc sur $[1\,;a]$. Donc, pour tout réel $x$ de $[1\,;a]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$.
Or, $f(1)=\sqrt{2}$, et $f(a)=a$. Donc $\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant a$.
On en déduit que $1 \leqslant f(x) \leqslant a$, c'est-à-dire $f(x) \in [1\,;a]$.

**3** Pour tout entier naturel $n$, on note la propriété : « $1 \leqslant u_n \leqslant a$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

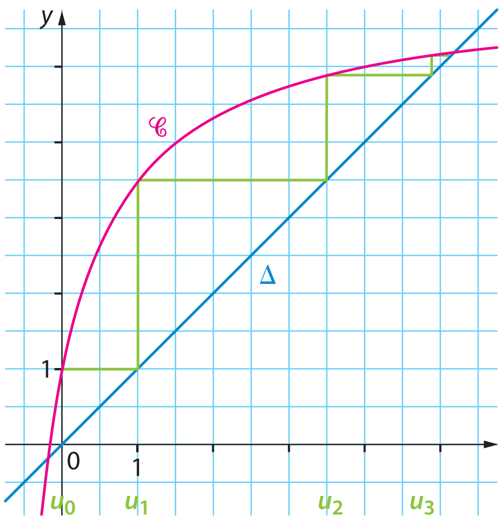
**Initialisation :** pour $n=0$, on a $u_0=1$.
Donc $1 \leqslant u_0 \leqslant a$.
Et $u_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Donc $u_0 \leqslant u_1$.
Donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :
$$1 \leqslant u_n \leqslant a \text{ et } u_n \leqslant u_{n+1}.$$
D'après la question **2**, $f(u_n) \in [1\,;a]$.
Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant a$.
De plus, la fonction $f$ est croissante sur $[1\,;a]$.
Donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$.
On en déduit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
Ainsi, la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.
Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $1 \leqslant u_n \leqslant a$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.

**4** D'après la question **3**, la suite $u$ est croissante et majorée (par $a$).
Donc la suite $u$ converge.

**81** **1**




Il semble que la suite $u$ soit croissante et converge vers un réel compris entre 5 et 6.

**2 a.** $f(x)=x \Leftrightarrow x^2-5x-1=0$, qui admet pour solution $\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ dans $[0\,;+\infty[$.

**b.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

**Initialisation :** $u_1=1$.
Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.

**Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie, alors :
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$
La fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et
$f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}$, donc $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence,
$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha).$$
Comme $f(0)=1$ et $f(\alpha)=\alpha$ on a bien :
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

**3** La suite $u$ est croissante et majorée. Donc elle converge vers la solution de l'équation $f(x)=x$.
Donc sa limite $\ell$ est égale à $\alpha$.

**4 a.** ALGO

```
Variables :
    e, U, L : réels ; N : entier ;
Début :
    Entrer(e) ;
    N ← 0 ;
    U ← 0 ;
    L ← (5 + √29)/2 ;
    TantQue L – U ⩾ e Faire
      N ← N + 1 ;
      U ← 6 – 5/(U + 1) ;
    FinTantQue ;
    Afficher(N) ;
Fin.
```

**b. i.** $N=6$ ; **ii.** $N=10$.

**82** **1** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 0$.

**Initialisation :** $u_0=0$.

**Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} \geqslant 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n^2+3u_n+1 \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 0$ :
$$u_{n+1}-u_n=u_n^2+2u_n+1 \geqslant 0.$$
Donc la suite $u$ est croissante.

**2** Si la suite $u$ est majorée, comme elle est croissante, elle converge vers une solution de l'équation $x=x^2+3x+1 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$.

**3** La suite étant positive, elle ne peut pas converger vers $-1$.
Donc la suite $u$ n'est pas majorée. Comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

**4 a.** ALGO

```
Variables :
    A, U : réels ; N : entier ;
Début :
    Entrer(A) ;
    N ← 0 ;
    U ← 0 ;
    TantQue U ⩽ A Faire
    N ← N + 1 ;
    U ← U² + 3U + 1 ;
    FinTantQue ;
    Afficher(N) ;
Fin.
```

**b. i.** $N=4$ ; **ii.** $N=5$.

**83** **1** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant w_n \leqslant 1$.

**Initialisation :** $w_0 = 0{,}6$, donc $w_0 \in [0\,;1]$.

**Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant w_n \leqslant 1$ est vraie, alors $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant 1$.

La fonction $f : x \longmapsto 0{,}7x + 0{,}1$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $f(0) \leqslant f(w_n) \leqslant f(1)$. Comme $f(0) = 0{,}1$ et $f(1) = 0{,}8$, on a bien $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant 1$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

**2** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

**Initialisation :** $w_1 = 0{,}56$, donc $w_1 \leqslant w_0$.

**Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ est vraie, alors $0 \leqslant w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$.

La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $f(w_{n+1}) \leqslant f(w_n)$.

Donc on a bien $w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

La suite $w$ est décroissante.

**3** La suite $w$ est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$, qui est ici $\frac{1}{3}$.

## Limite d'une suite géométrique

**84** **a.** La suite de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Donc elle converge vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ (opération sur les limites).

**b.** $v_n = 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right)$. La suite de terme général $\left(\frac{6}{7}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{6}{7}$, donc elle converge vers 0 ; la suite de terme général $7^n$ est géométrique de raison 7, donc elle diverge vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (opération sur les limites).

**85** **a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{5^{n+3}}{8^n} = 5^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

Or, $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**b.** On factorise par les termes dominants au numérateur et au dénominateur. Pour tout entier naturel $n$ :

$$v_n = \frac{4^n \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)}{3^n \times \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Par produit et quotient, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$

**86** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et la suite de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, donc elle converge vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (opération sur les limites).

**b.** $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, donc convergeant vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

**87** Démontrons par récurrence pour tout entier $n \geqslant 1$ que : pour tout entier non nul $k \leqslant n$, $u_k = 2 \times 3^k - 2^k$.

**Initialisation :**

$u_1 = 2 \times 3^1 - 2^1 = 4$ et $u_2 = 2 \times 3^2 - 2^2 = 14$ vérifiées.

**Hérédité :** soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrons que si pour tout entier $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $u_k = 2 \times 3^k - 2^k$, alors $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} = 5(2 \times 3^n - 2^n) - 6(2 \times 3^{n-1} - 2^{n-1}).$$

Donc : $u_{n+1} = 10 \times 3^n - 5 \times 2^n - 4 \times 3^n + 3 \times 2^n$.

Donc : $u_{n+1} = 6 \times 3^n - 2 \times 2^n = 2 \times 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 2 \times 3^n - 2^n$$
$$u_n = 2 \times 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

La suite de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ qui converge vers 0. La suite de terme général $(3)^n$ est une suite géométrique de raison qui diverge vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**88** Il s'agit de calculer la limite de la suite de terme général $s_n = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$, c'est-à-dire la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Donc : $$s_n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Toute suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ converge vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{3\pi}{2}$. Le ressort a pour longueur $\frac{3\pi}{2}$ cm.

**89** **1** La suite de terme général $u_k = \frac{1}{10^k}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Donc :

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

**2** $v_n = 1{,}2 + 7\left(\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}\right)$, donc :

$v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90}$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{115}{90}$.

## Prépa Bac

### Exercices guidés

**90** **1** Vrai. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

▶ **Initialisation :** $u_0 = \dfrac{0}{1} = 0$ vraie.

▶ **Hérédité :** démontrons que si $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

▶ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

**2** Faux. Pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$S_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

La suite de terme général $\dfrac{1}{2n}$ est décroissante et elle converge vers $\dfrac{1}{2}$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

**3** Vrai. Pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant 1 + (-1)^n \sin n \leqslant 2$, donc $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{2}{n+1} \leqslant 2$. La suite $v$ est bornée par 0 et 2, et elle converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

**91** **1 a.** Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;14]$, $f'(x) = 1{,}4 - 0{,}1x \geqslant 0$. Donc la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;14]$.

**b.** Sur $[0\,;14]$, $f(x) = x \Leftrightarrow x(0{,}4 - 0{,}05x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 8$.

**c.** La fonction $f$ est croissante sur $[0\,;14]$. Si $0 \leqslant x \leqslant 8$, alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(8)$, soit $f(x) \in [0\,;8]$.
De même, si $x$ appartient à l'intervalle $[8\,;14]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[8\,;14]$.

**2 a.**


On peut conjecturer que la suite $u$ est croissante et semble converger vers 8.

**b.** Démontrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

▶ **Initialisation :** $u_0 = 6$ et $u_1 = 6{,}6$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$.

▶ **Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 8$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$ et comme $f$ est croissante sur $[0\,;8]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(8)\,;$$

donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 8$.

▶ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8.$$

La suite $u$ est donc croissante et majorée par 8.

**c.** La suite $u$ est croissante et majorée par 8. Donc elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire 0 ou 8. Or, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant u_0$, soit $u_n \geqslant 6$.
Donc la suite $u$ converge vers 8.

**3** On a $f(8) = 8$.

▶ Si $u_0 \in\, ]0\,;8[$, la suite $u$ est croissante et converge vers 8 comme vu ci-dessus.

▶ Si $u_0 \in\, ]8\,;14]$, la suite $u$ est décroissante à partir du deuxième terme et converge vers 8.

▶ Si $u_0 = 8$, la suite $u$ est stationnaire à 8.

▶ Si $u_0 = 0$, la suite $u$ est stationnaire à 0.

**92** **1 a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times v_n.$$

Donc la suite $v$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 1 = 12$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. Donc :

$$u_n = 1 + v_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Comme $0 < \dfrac{1}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

**2 a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$S_{n+1} - S_n = (u_0 + \ldots + u_n + u_{n+1} - (n+1) - 1)$$
$$-(u_0 + \ldots + u_n - n - 1) = u_{n+1} - 1 = 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

Donc $S_{n+1} - S_n > 0$. La suite $S$ est croissante.

**b.** D'après la question **2 a.**, $S_1 - S_0 = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^1$, $S_2 - S_1 = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2, \ldots, S_n - S_{n-1} = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

En sommant ces égalités, on obtient :

$$S_n - S_0 = 12 \times \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$
$$= 12 \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = 3\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

Comme $S_0 = u_0 - 1 = 12$, on a :

$$S_n = S_0 + 3 - 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 15 - 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

**c.** Comme $0<\frac{1}{5}<1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=15$.

**3** **a.** L'algorithme donné est erroné. De proche en proche, on calcule la somme des termes $u_n$, puis le terme $S_n$, jusqu'à ce que la distance entre $S_n$ et 15 soit inférieure à $10^{-3}$.

**ALGO**

```
Variables :
    N : entier ;
    U , Somme , S : réels ;
Début :
    N ← 0 ;
    U ← 13 ;
    Somme ← U ;
    S ← Somme – N – 1 ;
    TantQue |S − 15| > 10^−3 Faire
      N ← N + 1 ;
      U ← U / 5 + 4/5 ;
      Somme ← Somme + U ;
      S ← Somme – N – 1 ;
    FinTantQue ;
    Afficher (N) ;
Fin.
```

**b.** Il s'agit de rajouter l'instruction : « Entrer ($e$) ; » et de modifier la condition dans la boucle TantQue : « TantQue $|S-15|>e$ Faire ».

**c. i.** $N=4$ ; **ii.** $N=8$.

## Exercices d'entraînement

**93** **1** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}-u_n=u_n{}^2\geqslant 0$.
La suite $u$ est croissante.

**2** **a.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=2x+1$. Doù le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $+\infty$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$ | ↗ | $0$ | $+\infty$ |

On en déduit que, pour tout $x$ appartenant à $]-1;0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à $]-1;0[$.

**b.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $-1<u_n<0$.

- **Initialisation :** $u_0=a$ et $a\in]-1;0[$.
- **Hérédité :** démontrons que si $-1\leqslant u_n\leqslant 0$, alors $-1<u_{n+1}<0$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_n\in]-1;0[$ et en utilisant la question **2** **a.** on a : $h(u_n)\in]-1;0[$, donc $-1<u_{n+1}<0$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $-1<u_n<0$.

**3** La suite $u$ est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers une solution de l'équation $h(x)=x$, soit $x^2=0$, c'est-à-dire 0.

**4** **a.** Voir ci-après l'algorithme complété.

**b.** Modifier les lignes :
Variables :
$N$ : entier ; $a$, $\boldsymbol{e}$, $u$ réels ;
Entrer($e$) ;
TantQue $|u|\geqslant \boldsymbol{e}$.

**ALGO**

```
Variables :
    N : entier ; a ,u réels ;
Début :
    Entrer (a) ;
    N ← 0 ; u ← a ;
    TantQue |u| ⩾ 0,01 Faire
    N ← N + 1 ;
    u ← u² + u ;
    FinTantQue
    Afficher (N) ;
Fin.
```

**c. i.** $N=99\,987$. **ii.** $N=99\,985$.

**94** **1** $10w_{10}=(10+1)w_9+1=11\times19+1=210$, donc $w_{10}=21$.

**2** Il semble que la suite $w$ soit une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $w_n=1+2n$.

- **Initialisation :** $1+2\times0=1=w_0$.
- **Hérédité :** démontrons que si $w_n=1+2n$, alors $w_{n+1}=1+2(n+1)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$(n+1)w_{n+1}=(n+2)(1+2n)+1=2n^2+5n+3$
et $(n+1)w_{n+1}=(n+1)(2n+3)$, soit $w_{n+1}=2n+3$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $w_n=1+2n$.

$w_{2012}=4\,025$.

**95** **Partie A**

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, pour tout réel $A$, il existe un rang $N$ tel que pour tout entier $n\geqslant N$, $u_n\in]A;+\infty[$.
Comme pour tout entier $n$, $u_n\leqslant v_n$ pour tout réel $A$, il existe un rang $N$ tel que pour tout entier $n\geqslant N$, $v_n\in]A;+\infty[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

**Partie B**

**1** $u_1=-\frac{5}{3}$ ; $u_2=-\frac{14}{9}$ ; $u_3=-\frac{14}{27}$.

**2** **a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 0$.

- **Initialisation :** $u_4=\frac{1}{3}u_3+3-2=\frac{67}{81}\geqslant 0$.
- **Hérédité :** démontrons que pour $n\geqslant 4$, si $u_n\geqslant 0$, alors $u_{n+1}\geqslant 0$.

Comme $n\geqslant 4$, $n-2>0$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1}\geqslant 0$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 0$.

**b.** Comme $n\geqslant 5$, $u_n\geqslant 0$, donc $u_{n+1}\geqslant n-2\geqslant n-3$.

**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3=+\infty$. Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

**3** **a.** $v_{n+1}=-2u_{n+1}+3(n+1)-\frac{21}{2}$, soit :

$$v_{n+1}=-2\left(\frac{1}{3}u_n+n-2\right)+3(n+1)-\frac{21}{2}.$$

$$v_{n+1}=-\frac{2}{3}u_n+n-\frac{7}{2}.$$

Donc, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

La suite $v$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$.

**b.** On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et comme $u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$, donc :

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

**c.** Comme $\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ elle converge vers 0.

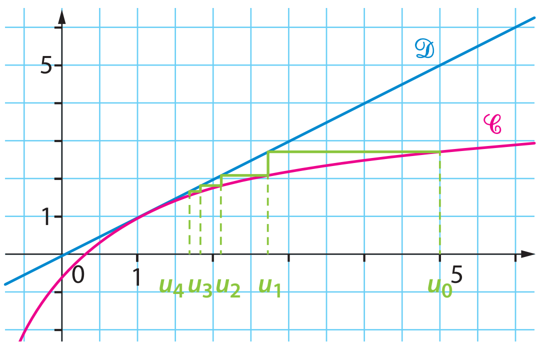
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = +\infty$.

**4** Pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$ et $u_n \geqslant n-3$. Donc :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \geqslant u_0 + \ldots + u_4 + n - 3.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison.

**96** **1 a.**




**b.** Il semble que la suite $u$ soit décroissante et converge vers 1.

**2 a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1$.

**Initialisation :** $u_0 = 5$, donc $u_0 \geqslant 1$.

**Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \geqslant 1$.

La fonction $f$ est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$. Donc la fonction $f$ est une fonction croissante sur $]-2\,;+\infty[$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \geqslant 1$ et comme $f$ est croissante sur $]-2\,;+\infty[$ on a $f(u_n) \geqslant f(1)$.

Comme $f(1) = 1$, on a $u_{n+1} \geqslant 1$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n+2} \leqslant 0$$

d'après la question précédente.

Donc la suite $u$ est décroissante.

**c.** La suite $u$ est décroissante et minorée par 1. Donc la suite $u$ converge vers un réel $\ell$, solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\ell = 1$.

**3 a.** Pour tout entier naturel $n$ :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1}$$
$$= \frac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{3}.$$

Donc la suite $v$ est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_0 = \frac{1}{u_0-1} = \frac{1}{4}$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3}$.

Donc $u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + \frac{12}{3+4n}$.

**c.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{12}{3+4n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

**97** **Partie A**

**a.** La suite $u$ est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$.

**b.** D'après la définition, l'intervalle ouvert $]\ell - 1\,; u_{n_0}[$ contient $\ell$, donc il existe un rang $N$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \in ]\ell-1\,; u_{n_0}[$.

**c.** D'après **b.**, si $n \geqslant \sup(N, n_0)$, $u_n < u_{n_0}$ ce qui contredit la question **a.**. Donc la suite $u$ est majorée par $\ell$.

**Partie B**

**1 a.** La fonction $f$ définie est dérivable sur $[0\,;20]$ et $f'(x) = \frac{1}{5}(10-x)$, d'où le tableau de variations :

| $x$ | 0 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 ↗ | 10 | ↘ 0 |

**b.** D'après le tableau ci-dessus pour tout $x \in [0\,;20]$, $f(x) \in [0\,;10]$.

**2** • Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

**Initialisation :** $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$, donc :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10.$$

**Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.

La fonction $f$ est croissante sur $[0\,;10]$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$$

et comme $f(0) = 0$ et $f(10) = 10$, on en déduit que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

**3** La suite $u$ est croissante et majorée par 10. Donc elle est convergente vers une solution de l'équation $f(x) = x$. Donc elle converge vers 10.

**4** D'après cette modélisation, le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat ne dépassera pas 10 millions.

**98** **Partie A**

**1** $P_1$ : Faux ; $P_2$ : faux ; $P_3$ : vrai ; $P_4$ : vrai.

**2** La propriété $P_3$ est la négation de la proposition $P_1$.

**Partie B**

**1** Soit un entier $p \geqslant 1$.

**a.** $4(p+1) + 1 - 4(4p+1) = 1 - 12p$.

**b.** Si $p \geqslant 1$, alors $1 - 12p < 0$.

Donc $4(4p+1) > 4(p+1) + 1$.

**2** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n > 1$, $4^n > 4n + 1$.

**Initialisation :** $4^2 > 4 \times 2 + 1$ est vraie.

**Hérédité :** démontrons que si $4^n > 4n + 1$, alors $4^{n+1} > 4(n+1) + 1$ ;

$4^{n+1} = 4 \times 4^n$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, $4^{n+1} > 4 \times (4n+1) \geqslant 4(n+1) + 1$ d'après la question **1 b.**.

**Conclusion :** pour tout entier naturel, $n > 1$,

$$4^n > 4n + 1.$$

- Pour $n = 0$ : $4^0 = 1$ et $4 \times 0 + 1 = 1$.
- Pour $n = 1$ : $4^1 = 4$ et $4 \times 1 + 1 = 5$.

**99** **1** La fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f'(x) = \dfrac{10}{(x+4)^2} > 0$, d'où le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ ↗ | $1$ |

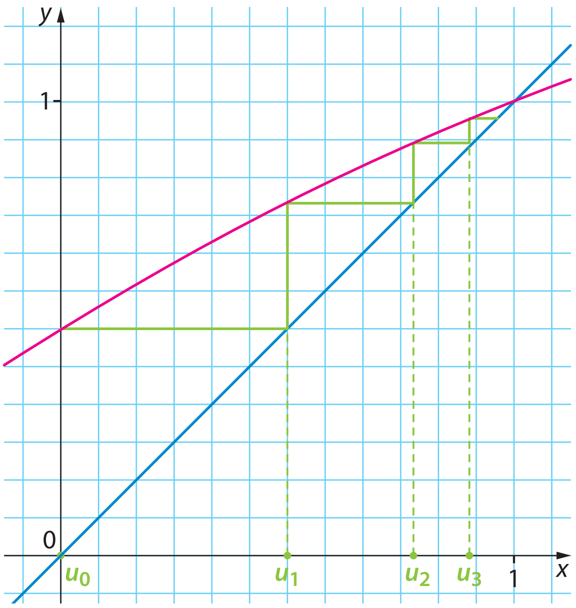
**2** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \in \mathrm{I}$.

**Initialisation :** $u_0 = 0$, donc $u_0 \in \mathrm{I}$.

**Hérédité :** démontrons que si $u_n \in \mathrm{I}$, alors $u_{n+1} \in \mathrm{I}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathrm{I}$ et le tableau de variations ci-dessus, $f(u_n) \in \mathrm{I}$. Donc $u_{n+1} \in \mathrm{I}$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n \in \mathrm{I}$.

**3 a.**




**b.** Il semble que la suite $u$ soit croissante et convergente vers 2.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$

Comme $u_n \in I$, on a $1 - u_n \geqslant 0$ et $u_n + 2 \geqslant 0$. Donc, pour tout entier $n$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite $u$ est croissante.

**d.** La suite $u$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

$\dfrac{3x+2}{x+4} = x \Leftrightarrow (1-x)(x+2) = 0$.

Les solutions sont 1 et $-2$.

La suite $u$ étant positive, elle converge vers 1.

**4 a.** Pour tout entier naturel $n$ :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10}.$$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{2}{5} v_n$.

La suite $v$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

**b.** $v_0 = -\dfrac{1}{2}$. Donc $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

Donc : $$u_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}.$$

**d.** La suite $v$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, donc elle converge vers 0. La suite $u$ converge donc vers 1 (opérations sur les limites).

**100** **Partie 1**

**1** On peut compléter un tableau de suivi des variables :

| Étapes | $n$ | $u$ | $S$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|
| Initialisation | 3 | 1 | 1 | 0 |
| Boucle « Tant Que » | | | | |
| $0 < 3$ | | $2 \times 1 + 1 - 0 = 3$ | $1 + 3 = 4$ | $0 + 1 = 1$ |
| $1 < 3$ | | $2 \times 3 + 1 - 1 = 6$ | $4 + 6 = 10$ | $1 + 1 = 2$ |
| $2 < 3$ | | $2 \times 6 + 1 - 2 = 11$ | $10 + 11 = 21$ | $2 + 1 = 3$ |
| Fin de la boucle « Tant Que » | | | | |
| Affichage : $u = 11$ et $S = 21$. | | | | |

**2**

| **Valeur de $n$** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Affichage de $u$** | 1 | 3 | 6 | 11 | 20 | 37 |
| **Affichage de $S$** | 1 | 4 | 10 | 21 | 41 | 78 |

**Partie 2**

**1** Elles représentent les valeurs successives de $u_n$ et $S_n$.

**2 a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | 3 | 6 | 11 | 20 | 37 |
| $u_n - n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |

On peut conjecturer que $u_n - n = 2^n$.

**b.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2^n + n$.

**Initialisation :** $u_0 = 2^0 + 0 = 1$ vraie.

**Hérédité :** démontrons que, si $u_n = 2^n + n$, alors $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$.

$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$. Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = 2(2^n + n) + 1 - n$ ; donc $u_{n+1} = 2^{n+1} + 2n + 1 - n$, soit $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2^n + n$.

**3** $S_n = (2^0 + 0) + (2^1 + 1) + \ldots + (2^n + n)$

$S_n = (1 + 2^1 + \ldots + 2^n) + (1 + 2 + \ldots + n)$.

Donc :

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} = 2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vérification : $S_5 = 2^6 - 1 + \dfrac{5 \times 6}{2} = 78$.

**101** **Partie A**

Soit un réel $q$. Si $q \in ]0\,;1[$, alors $\dfrac{1}{q} > 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$. Donc, comme $q^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ en utilisant les opérations sur les limites.

**Partie B**

**1 a.** Pour $n = 5$ on obtient $u = 5\,000 \times 0{,}8^5 = 1638{,}4$.

**b.** Modification :

Pour $i$ allant de 1 à $n$ faire $u \leftarrow 0{,}8u + 1500$ ; FinPour

**c.** La suite $u$ semble croissante et converger vers 7 500.

**2 a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 7\,500 = 0{,}8u_n + 1500 - 7\,500$$
$$= 0{,}8(u_n - 7\,500) = 0{,}8v_n.$$

La suite $v$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -2\,500$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = -2\,500 \times 0{,}8^n$.

Donc $u_n = v_n + 7\,500 = 7\,500 - 2\,500 \times 0{,}8^n$.

**3** • $u_{n+1} - u_n = 2\,500 \times 0{,}8^n \times 0{,}2 > 0$.

Donc la suite $u$ est croissante.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ (suite géométrique de raison qui en valeur absolue est strictement inférieure à 1).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7\,500$.

**4 a.** On calcule $u_n$ de proche en proche, jusqu'à ce que la distance à 7 500 soit inférieure à 0,1.

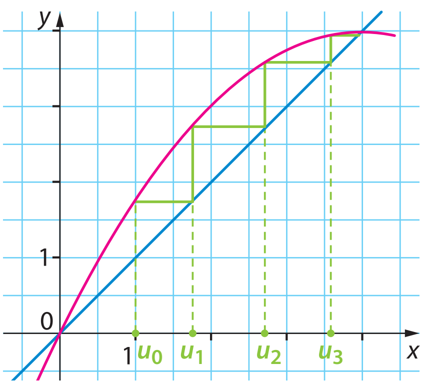
**b.** Algorithme modifié.

**ALGO**

Variables :
  $N$ : entier ; $u$ ; $e$ réels ;
Début :
  $N \leftarrow 0$ ; $u \leftarrow 5\,000$ ;
  Entrer($e$) ;
  TantQue $7\,500 - u \geqslant e$ Faire
    $N \leftarrow N + 1$ ;
    $u \leftarrow 0{,}8\,u + 1\,500$ ;
  FinTantQue
  Afficher ($N$) ;
Fin.

**c. i.** $N = 36$ ; **ii.** $N = 46$.

**102** **1 a. b.**




**c.** La suite $u$ semble croissante et converger vers 4.

**2** Si la suite $u$ converge, les limites possibles sont les solutions de l'équation $2x - \dfrac{1}{4}x^2 = x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$.

Les limites possibles sont 0 et 4.

**3** La fonction $f$ est croissante sur $[0\,;4]$.

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

▸ **Initialisation :** $u_0 = 1$, donc $u_0 \in [0\,;4]$.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ et le fait que $f$ est croissante sur $[0\,;4]$, on a $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Pour tout entier naturel $n$,

$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 - \dfrac{1}{4}u_n\right) \geqslant 0$ d'après la question précédente. La suite $u$ est donc croissante.

**4** La suite $u$ est croissante et majorée par 4, donc elle converge vers 4 d'après la question **2**.

**103** **Partie A**

**1** La suite $u$ est non majorée si pour tout réel $M$, il existe un entier naturel $n$ tel que $u_n \geqslant M$.

**2** Soit un réel $M$.

**a.** On suppose qu'il existe un entier $n_0$ tel que $u_{n_0} \geqslant M$. Comme la suite $u$ est croissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant M$.

**b.** On en conclut que la suite $u$ diverge vers l'infini.

**3** Si la suite $u$ est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**Partie B**

**1** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1$.

▸ **Initialisation :** $u_0 = 1 \geqslant 1$.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \geqslant 1$.

Si $u_n \geqslant 1$, alors $\dfrac{1}{u_n} > 0$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 1$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1$.

**2** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} \geqslant 0$.

La suite $u$ est croissante.

**3 a.** Si la suite $u$ est majorée, comme elle est croissante, elle converge.

**b.** La limite $\ell$ de la suite $u$ est solution de l'équation $x = x + \dfrac{1}{x}$ par unicité de la limite d'une suite.

**4** Comme l'équation précédente n'a pas de solution, la suite $u$ ne converge pas. Donc la suite $u$ n'est pas majorée et alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

## Problèmes

**104** **1** Pour tout entier naturel $n$ :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1}\,;$$

soit $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\dfrac{2}{3}v_n$.

La suite $v$ est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

**2** Pour tout entier naturel $n$ :

$w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1}$.

$w_{n+1} = w_n$. La suite $w$ est constante.

**3** $w_0 = 1$. Donc pour tout entier naturel $n$, $w_n = 1$.

**4** Pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

Comme $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $w_n = 1$, on a :

$$u_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5}$.

**105** **1** Vrai. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Donc pour tout entier $n$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

**2** Vrai. Car dans ce cas, $1 + u_n$ converge vers un réel non nul.

**3** Vrai. Pour tout entier $n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Comme $f$ est croissante, alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $v_n \leqslant v_{n+1}$.

**4** Faux. Pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$.

Si la suite $v$ converge vers 1, alors la suite $u$ diverge.

**106** **1** Si pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant M$, la suite $u$ est majorée par $M$.

**2** Si $P_1$ et $P_5$ sont vraies, alors la suite $u$ converge.

**3** Si $P_2$ et $P_5$ sont vraies, la suite $u$ diverge vers $+\infty$.

**4** Vrai.

**107** **1** **a.** On propose :

**ALGO**

Variables :
  $N$, $i$ : entiers ; $U$ : réel ;
Début ;
  Entrer($N$) ;
  $U \leftarrow 1$ ;
  Pour $i$ allant de 2 à $N$ faire
    $U \leftarrow U \times \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$;
  FinPour ;
  Afficher($U$) ;
Fin.

**b.** La suite $u$ semble décroissante et converger vers $\frac{1}{2}$.

**2** **a.** Pour tout entier, on a :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

donc : $$u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n.$$

**b.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ :

$$u_n = \frac{n+1}{2n}.$$

▶ **Initialisation :** $u_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\times 2}$ vraie.

▶ **Hérédité :** démontrons que si $u_n = \frac{n+1}{2n}$, alors $u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n$, soit $u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \times \frac{n+1}{2n}$.

Donc : $$u_{n+1} = \frac{(n+2)}{2(n+1)}.$$

▶ **Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{n+1}{2n}.$$

• On a pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2n(n+1)} \leqslant 0,$$

donc la suite $u$ est décroissante.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

**108** **1** Si $m \geqslant 83$, alors $u_m \geqslant 5$.

**2** Pour tout entier naturel $n$ non nul,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$. Donc la suite $u$ est croissante.

**3** Pour tout entier naturel $n$ non nul et tout entier naturel $i$ inférieur à $2^n$ on a $2^n + i \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, donc $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n + i}$.

**4** **a.** La somme $S_n$ comporte $2^n$ termes, chacun étant supérieur à $\frac{1}{2^{n+1}}$ d'après la question **3**.

Donc $S_n \geqslant \frac{2^n}{2^{n+1}}$, c'est-à-dire $S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

**b.** Pour $n \geqslant 1$,

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^n + 2^n}\right).$$

Donc $S_0 + S_1 + \ldots + S_n = u_{2^n + 2^n} = u_{2^{n+1}}$.

**c.** On a : $S_0 + S_1 + \ldots + S_n \geqslant (n+1) \times \frac{1}{2}$. Donc :

$u_{2^{n+1}} \geqslant \frac{n+1}{2}$. Donc la suite $u$ n'est pas majorée.

**5** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**109** **a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant k$, $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.

▶ **Initialisation :** pour $n = k$, $\frac{k^k}{k!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$ vraie.

▶ **Hérédité :** démontrons que si $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$, alors $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.

On a $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1}$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{k^k}{k!} \times \frac{k}{n+1} \leqslant \frac{k^k}{k!}$, car $\frac{k}{n+1} \leqslant 1$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant k$, $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

**b.** Pour tout entier $n \geqslant k$ : $\dfrac{x^n}{n!} = \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^n}{n!}$ d'après la question précédente, $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$.

**c.** La suite de terme général $\left(\dfrac{x}{k}\right)^n$ est géométrique de raison $\dfrac{x}{k}$ inférieure à 1 en valeur absolue.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

**110** **1** $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{2}{9}$, $u_5 = \dfrac{24}{625}$, $u_{10} = \dfrac{567}{1562\,500}$.

La suite $u$ semble décroissante et convergente vers 0.

**2** **a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^n}{n!}$$
$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, on a :

$\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 1 + n \times \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 2$.

**b.** La suite $u$ est strictement positive.

Pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 2u_{n+1} \geqslant u_{n+1}$.

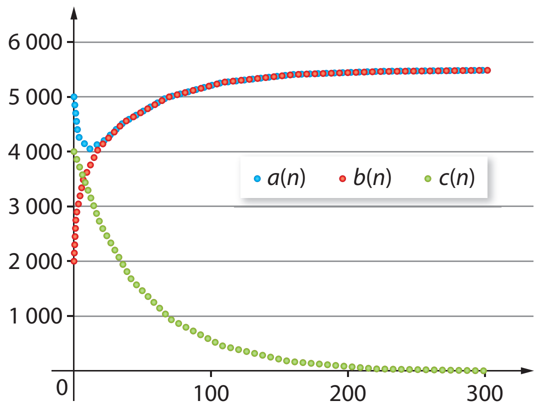
Donc la suite $u$ est décroissante.

**3** **a.** En remarquant que $\dfrac{u_n}{u_0} = \dfrac{u_1}{u_0} \times \dfrac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ et que, pour tout entier naturel $n$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a : tout entier naturel $n$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

**b.** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**111** **1** **a.** On a $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}1b_n + 0{,}01c_n \\ b_{n+1} = 0{,}9b_n + 0{,}1a_n + 0{,}01c_n \\ c_{n+1} = 0{,}98c_n \end{cases}$

**b.** À l'aide du tableur, on obtient :




On conjecture que la suite $a$ est croissante à partir d'un certain rang et converge vers 5 500, que la suite $b$ est croissante et converge vers 5 500 et que la suite $c$ est décroissante et converge vers 0.

**c.** Pour tout entier naturel $n$ :

$$d_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = (0{,}9a_n + 0{,}1b_n + 0{,}01c_n) - (0{,}9b_n + 0{,}1a_n + 0{,}01c_n).$$

Donc $d_{n+1} = 0{,}8(a_n - b_n) = 0{,}8d_n$. La suite $d$ est géométrique de raison 0,8 et de premier terme 3 000.

**1** **a.** Les suites $c$ et $d$ sont géométriques. Donc pour tout entier naturel $n$ :

$$c_n = 4\,000 \times (0{,}98)^n \text{ et } d_n = 3\,000 \times (0{,}8)^n.$$

**b.** On a pour tout entier naturel $n$ :

$$a_n + b_n + c_n = 11\,000 \text{ et } a_n = b_n + d_n.$$

Donc $b_n = 5\,500 - \dfrac{1}{2}(d_n + c_n)$, soit :

$$b_n = 5\,500 - 2\,000 \times 0{,}98^n - 1500 \times 0{,}8^n$$

et $a_n = 5\,500 - \dfrac{1}{2}(c_n - d_n)$, soit :

$$a_n = 5\,500 - 2\,000 \times 0{,}98^n + 1500 \times 0{,}8^n.$$

**c.** Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 5\,500$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 5\,500$.

Cela signifie qu'au bout d'un temps assez long, les populations des zones A et B se stabilisent chacune autour de 5 500 habitants.

**112** **1** On a naturellement pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$m_{n+1} = 3m_n \text{ et } a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n.$$

**2** En prenant $a = 1$, la suite $u$ semble converge vers 0,5. On peut conjecturer que le triangle sera entièrement recouvert.

**3** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n$ est l'aire de la surface recouverte en plus après $n+1$ étapes du processus.

$$u_{n+1} - u_n = m_{n+1} \times a_{n+1} = \frac{3}{4} m_n \times a_n.$$

D'après **1**, les suites $m$ et $a$ sont géométriques de raisons respectives 3 et $\dfrac{1}{4}$, donc $m_n = 3^{n-1}$ et $a_n = \dfrac{a^2}{8}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Donc : $$u_{n+1} - u_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} \times \frac{a^2}{2}.$$

**4** En « additionnant » les égalités :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{a^2}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{a^2}{2}$$

…

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{a^2}{2}.$$

On obtient $u_n = u_1 + \dfrac{a^2}{8}\left(\dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$ ;

donc : $$u_n = \frac{a^2}{8} + \frac{3a^2}{8}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right).$$

**5** La suite de terme général $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ inférieure à 1 en valeur absolue, donc elle converge vers 0.

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{a^2}{2}$. Donc le triangle sera entièrement recouvert.

**113** **1 a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$T_{n+1} = \frac{18T_n + 2 \times 16}{20},$$

donc : $\quad T_{n+1} = 0{,}9T_n + 1{,}6.$

**b.** On calcule le terme $T_n$ jusqu'à obtenir une valeur inférieure à 40.

**ALGO**

```
Variables :
  N : entier ; T : réel ;
Début :
  N ← 0 ;
  T ← 80 ;
  TantQue T ⩾ 40 Faire
    N ← N+1 ;
    T ← 0,9 × T + 1,6 ;
  FinTantQue ;
  Afficher(N) ;
Fin.
```

On obtient $N = 10$.

**2** Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 16 = 0{,}9T_n + 1{,}6 - 16,$$

donc : $\quad U_{n+1} = 0{,}9(T_n - 16) = 0{,}9U_n.$

La suite $U$ est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme 64.

**3** Pour tout entier naturel $n$, $U_n = 64 \times (0{,}9)^n$.

Donc $T_n = 16 + 64 \times (0{,}9)^n$

$$T_n < 40 \Leftrightarrow (0{,}9)^n < \frac{3}{8} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{3}{8}}{\ln 0{,}9}.$$

Or, $\frac{\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 9{,}3$ et $n$ est un entier.

La température de 40 °C est atteinte au bout de 10 s.

**114** **1** Si la suite $u$ converge vers 1, tout intervalle ouvert contenant 1 contient tous les termes à partir d'un rang $p$.

On choisit l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$ qui contient 1. Donc à partir du rang $p$, $u_n \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$.

Ainsi, à partir du rang $p$, la suite $u$ est positive.

**2** Même raisonnement avec l'intervalle $\left]\frac{\ell}{2} ; \frac{3\ell}{2}\right[$.

**115** **1** $u_4 = 0{,}2357$, $u_5 = 0{,}235711$.

**2** La suite $u$ est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente.



## Prendre des initiatives

**116** En utilisant un tableur, on remarque que la suite $u$ n'est pas monotone, mais qu'elle semble converger vers 1.

| n | un |
|---|---|
| 1 | -100 |
| 2 | -99 |
| 3 | -48,5 |
| 4 | -15,1666667 |
| 5 | -2,79166667 |
| 6 | 0,44166667 |
| 7 | 1,07361111 |
| 8 | 1,15337302 |
| 9 | 1,14417163 |
| 10 | 1,12713018 |
| 11 | 1,11271302 |
| 12 | 1,10115573 |
| 13 | 1,09176298 |

De plus, dès que $n \geqslant 6$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ la propriété : pour $n \geqslant 6$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

**Initialisation :**

pour $n = 6$, on a $u_6 \approx 0{,}4$.

Donc $P(6)$ est vraie.

**Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 6$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Démontrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ est vraie.

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$0 \leqslant \frac{u_n}{n} + 1 \leqslant \frac{2}{n} + 1 \leqslant 2,$$

soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 6$, alors $P(n)$ est vraie.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n}{n}$.

Donc, d'après ce qui précède, $0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{2}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

**117** On a $u_n = \frac{1 + 3 + \ldots + (2n+1)}{(2n+3) + (2n+5) + \ldots + (4n+3)}$.

- $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \frac{(n+1)(2n+2)}{2}$
$$= (n+1)(n+1).$$
- Soit $A = (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (4n+3)$

$$A = \frac{(n+1)(6n+6)}{2} = (n+1)(3n+3).$$

Donc $u_n = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(3n+3)} = \frac{1}{3}$.

La suite $u$ est constante égale à $\frac{1}{3}$.

**118** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $w_n = nu_n$.

Comme $u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$, on a $(n+1)u_{n+1} = nu_n + 4$,

donc $w_{n+1} = w_n + 4$.

La suite $w$ est arithmétique de raison 4 et de premier terme $w_0 = 1$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$w_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3.$$

On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{4n-3}{n}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4n}{n} = 4$.

# Pistes pour l'accompagnement personnalisé

## Revoir les outils de base

**119** **a.** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = 7 > 0$.
Donc la suite $u$ est croissante.
**b.** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 4 \geqslant 0$.
Donc la suite $u$ est croissante.
**c.** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 0$.
Donc la suite $u$ est décroissante.
**d.** $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et donc la suite $u$ n'est pas croissante.

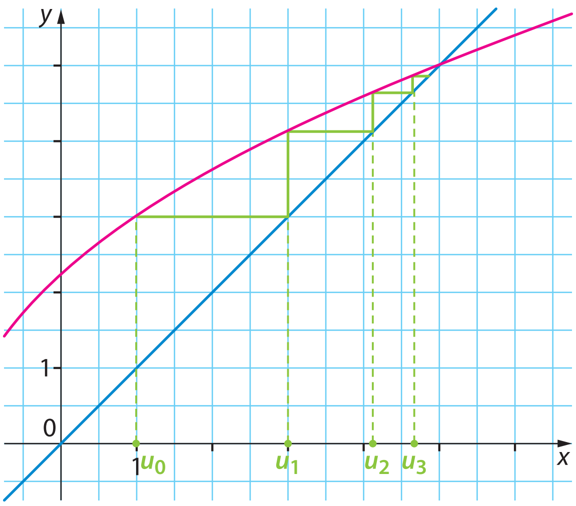
**120** **a.** Faux. $u_5 = 5$ et $u_6 = 9$.
**b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

## Les savoir-faire du chapitre

**121** Démontrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{7}{11}$.

▸ **Initialisation :** $u_0 = \frac{7}{11}$, vrai.
▸ **Hérédité :** démontrons que si $u_n = \frac{7}{11}$, alors :
$$u_{n+1} = \frac{7}{11}.$$
On a $u_{n+1} = 100u_n - 63$, donc :
$$u_{n+1} = 100 \times \frac{7}{11} - 63 = \frac{700 - 693}{11} = \frac{7}{11}.$$
▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{7}{11}$.
La suite $u$ est stationnaire.

**122**




Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant 5$.
▸ **Initialisation :** $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 5$.
▸ **Hérédité :** démontrons que si $1 \leqslant u_n \leqslant 5$, alors $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{4x+5}$ est croissante sur $\left]-\frac{5}{4} ; +\infty\right[$, car de même sens de variation que la fonction $x \longmapsto 4x + 5$ (fonction affine de coefficient directeur positif). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 5$ et comme $f$ est croissante sur $\left]-\frac{5}{4} ; +\infty\right[$, on a $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$, soit $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
▸ Conclusion : pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant 5$.
La suite $u$ est bornée.

**123** **a.** On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
**b.** On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3n} = 0$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
**c.** On a $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-n^2}{n^2} = -1$.
**d.** $t_n = 6^n - 9^n = 9^n\left(\left(\frac{6}{9}\right)^n - 1\right)$. Donc en utilisant le théorème sur la convergence des suites géométriques, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 9^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{9}\right)^n = 0$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$.

**124** **1** La suite $u$ semble croissante et converger vers 2.
**2** Pour tout entier naturel $n$ :
$$v_{n+1} = (u_{n+1})^2 - 4 = \frac{1}{4}((u_n)^2 + 12) - 4$$
$$= \frac{1}{4}(u_n)^2 - 1 = \frac{1}{4}v_n.$$
Donc la suite $v$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $-4$.
**3** La suite $v$ converge vers 0 (sa raison est en valeur absolue inférieure strictement à 1). Comme $u_n = \sqrt{v_n + 4}$, la suite $u$ converge vers 2 (composée de suites).

**125** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.

**126** **1** Faux. **1** Vrai. **3** Vrai. **4** Faux.

**127** **Partie A**
**1** On doit avoir : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$, donc $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, soit :
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
**2** Cette équation admet deux solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc le nombre d'or est $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
**3** $$1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

**Partie B**

**1** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ :

$P(n)$ : « pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $a_k \geqslant 1$ ».

**Initialisation :** $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ ; vrai.

**Hérédité :** soit un entier $n \geqslant 1$ ; démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $a_{n+1} \geqslant 1$.

On a $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $a_{n+1} \geqslant 1 + 1 \geqslant 2 \geqslant 1$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$, $a_n \geqslant 1$.

**2** • $u_0 = \dfrac{a_1}{a_0} = 1$.

• $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Donc pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

**3** Si la suite $u$ converge, alors elle converge vers $\ell$ solution de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, soit $x^2 - x - 1 = 0$.

Comme $\ell$ doit être positive, $\ell = \varphi$.

**4 a.** On a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ et $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$. On soustrait membre à membre, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - u_n}{\varphi u_n}.$$

**b.** Pour tout entier naturel $n$ :

$$|u_{n+1} - \varphi| = \frac{1}{\varphi}\frac{|u_n - \varphi|}{u_n}.$$

Comme $u_n \geqslant 1$, on obtient $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{|u_n - \varphi|}{\varphi}$.

**c.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$.

**Initialisation :** $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^0 |1 - \varphi| = |1 - \varphi| = |u_0 - \varphi|$.

**Hérédité :** démontrons que si :

$$|u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|, \text{ alors :}$$

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|.$$

On a $|u_{n+1} - \varphi| = \dfrac{|u_n - \varphi|}{\varphi}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|$.

Donc $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n$,

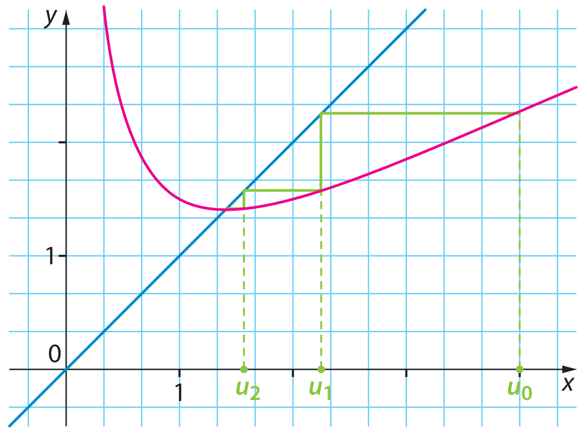
$$|u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|.$$

**d.** La suite de terme général $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\varphi}$ strictement inférieure à 1 en valeur absolue, donc elle converge vers 0, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \varphi| = 0$.

Donc la suite $u$ converge vers $\varphi$.

**128**

**1** En prenant $u_0 = 4$ :




La suite $u$ semble être décroissante et converger vers 1,4.

**2** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

**Initialisation :** $u_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ell^2 + 2}{\ell}$ ;

donc $u_1 - \sqrt{2} \geqslant \dfrac{(\ell - \sqrt{2})^2}{2\ell} \geqslant 0$. Donc $u_1 \geqslant \sqrt{2}$.

**Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant \sqrt{2}$, alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

La fonction $f$ est dérivable sur $[\sqrt{2} \,; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2} \geqslant 0$.

Donc la fonction $f$ est une fonction croissante sur $[\sqrt{2} \,; +\infty[$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \geqslant \sqrt{2}$ et $f$ est croissante sur $[\sqrt{2} \,; +\infty[$. Donc on a $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{2})$.

Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, on a $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

**3** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{2 - (u_n)^2}{2u_n}$.

Comme $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Donc la suite $u$ est décroissante. Or, elle est minorée, donc elle converge vers une solution de l'équation :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

Donc la suite $u$ converge vers $\sqrt{2}$.

**4 a.** Pour tout entier naturel $n$,

$u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2$.

Comme pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$

$u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(u_n - \sqrt{2})^2 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2$.

**b.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$.

**Initialisation :**

$$u_1 - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(u_0 - \sqrt{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}(u_0 - \sqrt{2}).$$

**Hérédité :** démontrons que si :

$$u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0 - \sqrt{2}),$$

alors : $\quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2})$.

On a $u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})^2$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0-\sqrt{2})\right)^2$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}(u_0-\sqrt{2})\times\frac{(u_0-\sqrt{2})}{2},$$

donc $u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}(u_0-\sqrt{2})$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0-\sqrt{2}).$$

**c.** Pour que $u_n$ soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-9}$ près, il suffit que :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\times(2-\sqrt{2})<10^{-9}\Leftrightarrow 2^n\ln\left(\frac{1}{2}\right)<\ln\left(\frac{10^{-9}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{2-\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\Leftrightarrow n\geqslant 5,$$

car $n$ est un entier.

**5 a.** On généralise la démarche du **4 c.**

**b. i.** $n=4$ ; **ii.** $n=4$.

**c.** L'algorithme paraît converger très vite, la valeur initiale de $\ell$ paraît sans influence sur la vitesse de convergence.

**129** **A. 1** • $f(1)=3$.

• Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;+\infty[$, $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ; donc $f'(1)=-4$.

• $T_1$ a pour équation $y=-4x+7$.

• La droite $T_1$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{7}{4};0\right)$.

**2** $f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{9}{7}$, $f'\left(\frac{7}{4}\right)=-\frac{64}{49}$. La tangente $T_2$ a pour équation $y=-\frac{64}{49}x+\frac{25}{7}$ et coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x_2=\frac{175}{64}$.

**3 a.** De même la tangente en $A_n(x_n;f(x_n))$ a pour équation $x_{n+1}=-\frac{4}{(x_n)^2}x+\frac{8-x_n}{x_n}$.

Donc $x_{n+1}=\frac{8x_n-(x_n)^2}{4}$.

**b.** On a pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $x_{n+1}=g(x_n)$ et $x_1=\frac{7}{4}$, où $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{8x-x^2}{4}$.

**1** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $x_n\leqslant 4$.

**Initialisation :** $x_1=\frac{7}{4}\leqslant 4$.

**Hérédité :** démontrons que si $x_n\leqslant 4$, alors $x_{n+1}\leqslant 4$.

La fonction $g$ est dérivable sur $[0;4]$ et

$g'(x)=\frac{4-x}{2}\geqslant 0$, donc $g$ est une fonction croissante sur $[0;4]$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $x_n\leqslant 4$ et comme $g$ est croissante sur $[0;4]$ on a $g(x_n)\leqslant g(4)$.

Comme $g(4)=4$, on a $x_{n+1}\leqslant 4$.

**Conclusion :** pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $x_n\leqslant 4$.

**2** On démontre aussi par récurrence que la suite de terme général $x_n$ est croissante.

**3** Donc, comme elle est majorée, la suite $(x_n)$ converge vers une solution de l'équation $g(x)=x$, c'est-à-dire la solution de l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire 4.

**B. 1** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

En toute abscisse $a$, la tangente à $\mathscr{C}$ admet pour équation : $y=2ax-a^2-3$ ; elle coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{a^2+3}{2a};0\right)$, c'est-à-dire en $\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right);0\right)$.

La méthode de Newton appliquée à l'équation $f(x)=0$ conduit donc à l'étude de la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(v_n+\frac{3}{v_n}\right)$, avec $v_0=3$, par exemple.

**2** On démontre par récurrence que la suite $v$ est minorée par $\sqrt{3}$.

**3** Pour tout entier naturel $n$ :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{3-(v_n)^2}{2v_n}\leqslant 0.$$

Donc la suite $v$ est décroissante.

**4** Comme la suite $v$ est décroissante et minorée, elle converge vers un réel $\ell$ solution de $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$, c'est-à-dire vers $\ell=\sqrt{3}$.

**5** On calcule :

$v_0=3$ ; $v_1=2$ ; $v_2=\frac{7}{4}$ ; $v_3=\frac{97}{56}$ et $v_4=\frac{18\,817}{10\,864}$.

## Approfondissement

**130** **1** On a $P_n=\frac{K(a+1)}{a}x_n$ et $P_{n+1}=\frac{K(a+1)}{a}x_{n+1}$ en transposant dans

$\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}=a\left(1-\frac{P_n}{K}\right)$,

on obtient :

$x_{n+1}=(1+a)x_n(1-x_n)$, soit en posant $k=1+a$ :

$$x_{n+1}=kx_n(1-x_n).$$

• Pour tout entier naturel $n$, $0\leqslant x_n\leqslant 1$.

Car si $x_n>1$, alors $x_{n+1}<0$.

**2 a.** Les seules limites possibles sont les solutions de l'équation $f(x)=x$ où la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=kx(1-x)$ ;

$$f(x)=x\Leftrightarrow x(k-1-kx)=0.$$

Les seules limites possibles de la suite $x$ sont donc 0 et $\frac{k-1}{k}$.

**b.** Si $k\leqslant 1$, alors $\frac{k-1}{k}\leqslant 0$. La seule limite possible de la suite $(x_n)$ est donc 0.

Pour tout entier naturel $n$ :

$$x_{n+1}-x_n=kx_n\left(\frac{k-1}{k}-x_n\right)\leqslant 0.$$

Donc la suite $(x_n)$ est décroissante. Or, elle est minorée par 0. Elle est donc convergente.

On en déduit que la suite $(x_n)$ converge vers 0.

**c.** On suppose que $1 < k < 2$.

• Le tableau de variations de la fonction $f$ est :

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $\frac{k}{4}$ | ↘ $0$ |

En utilisant que $0 < \frac{k}{4} < \frac{1}{2}$, on montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$, puis en utilisant le sens de variation de $f$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, on montre par récurrence que la suite $(x_n)$ est monotone à partir du rang 1.

• On en déduit que la suite $(x_n)$ est convergente.

• Si la suite $(x_n)$ est croissante à partir du rang 1, elle ne peut pas converger vers 0. Donc elle converge vers $\frac{k-1}{k}$.

• Si la suite $(x_n)$ est décroissante à partir du rang 1, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = kx_n\left(\frac{k-1}{k} - x_n\right) \leqslant 0.$$

Donc $\frac{k-1}{k} - x_n \leqslant 0$, soit $x_n \geqslant \frac{k-1}{k}$.

La suite $(x_n)$ ne peut pas converger vers 0. Donc elle converge vers $\frac{k-1}{k}$.

**131** **1** On a $S_n = \alpha + \frac{2}{3}\alpha + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\alpha$. C'est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $\alpha$.

Donc : $$S_n = \alpha \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\alpha\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

**2** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3\alpha$, car la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ inférieure à 1 en valeur absolue converge vers 0.

Ce procédé limite la profondeur du champ.

## Vers le Supérieur

**132** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 2^{n+3}$.

▸ **Initialisation :** $u_0 \geqslant 2^3$ ; vrai.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant 2^{n+3}$, alors :

$$u_n \geqslant 2^{n+4}.$$

On a $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$u_{n+1} \geqslant 3 \times 2^{n+3} - 5$, soit $u_{n+1} \geqslant 2 \times 2^{n+3} + 2^{n+3} - 5$.

Comme pour tout entier naturel $n$, $2^{n+3} - 5$ est positif, on a $u_{n+1} \geqslant 2^{n+4}$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel $n$,

$$u_n \geqslant 2^{n+3}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+3} = +\infty$ ( suite géométrique de raison 2 strictement supérieure à 1). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

**133** **1** Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $\frac{1}{n} \in \left]-\frac{\varepsilon}{2}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Si $m \geqslant n_0$, alors $\frac{1}{m} \in \left]-\frac{\varepsilon}{2}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Donc, pour tous entiers $n$ et $m$ supérieurs à $n_0$, $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \varepsilon$, car la distance entre deux points d'un intervalle est inférieure à la longueur de l'intervalle.

Donc la suite $u$ est une suite de Cauchy.

**2** **a.** En écrivant que $u_m - u_n = u_m - \ell + \ell - u_n$, on obtient $|u_m - u_n| = |u_m - \ell + \ell - u_n|$, donc en utilisant l'inégalité triangulaire, pour tous entiers $m$ et $n$ :

$$|u_m - u_n| \leqslant |u_m - \ell| + |\ell - u_n|.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Donc, à partir d'un certain rang $n_0$, on a pour tout entier $n \geqslant n_0$ : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

**b.** Si $n$ et $m$ sont deux entiers naturels supérieurs à $n_0$, alors $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_m - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ; donc, d'après **a.**, $|u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$.

La suite $u$ est une suite de Cauchy.

**134** **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Faux.

**135** **1** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.

▸ **Initialisation :** $1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$, donc vrai.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $k! \geqslant 2^{k-1}$, alors :

$$(k+1)! \geqslant 2^k.$$

On a $(k+1)! = (k+1) \times k!$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $(k+1)! \geqslant (k+1) \times 2^{k-1}$ et, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $k+1 \geqslant 2$, donc $(k+1)! \geqslant 2^k$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.

**2** D'après la question précédente,

$$u_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par ailleurs :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}},$$

car c'est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

Donc $u_n \leqslant 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3$.

Donc la suite $u$ est majorée par 3.

**3** $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$. Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite $u$ est croissante et comme elle est majorée, elle converge vers un réel inférieur à 3.

# CHAPITRE 2

# Limites et fonctions continues

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Limites de fonctions**<br><br>Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. | | Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive.<br><br>L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en Terminale. |
| Limite infinie d'une fonction en un point. | | |
| Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. | • Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. | La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale. |
| Limites et comparaison. | • Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. | |
| Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées. | • Interpréter graphiquement les limites obtenues. | |
| **Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires** | • Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné. | On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes.<br><br>Le théorème des valeurs intermédiaires est admis.<br>On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.<br><br>On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.<br><br>Ce cas particulier est étendu au cas où $f$ est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de $f$ aux bornes de l'intervalle étant supposées connues.<br><br>♦ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$. |

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.



### 2. Intentions des auteurs

Dans ce deuxième chapitre sur les « limites et fonctions continues » :

• on transpose aux fonctions numériques ce qui a été rencontré dans le chapitre 1 pour les suites au voisinage de l'infini ;

• on précise la notion de limite en un point pour introduire la notion de continuité en un point ;

• on définit la continuité sur un intervalle pour introduire le théorème des valeurs intermédiaires et déterminer les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = k$ ;

• on introduit la notion d'asymptote à une courbe à travers les asymptotes horizontales et verticales.
Toutes ces notions sont abordées à travers la résolution de problèmes le plus souvent liés à la vie courante ou aux autres disciplines.
De nombreux QCM, Vrai-Faux permettent de faire le point rapidement sur la compréhension du cours et aussi la mise en place de raisonnement par contre-exemple.

Comme au chapitre précédent une attention particulière est portée sur le raisonnement, en particulier le raisonnement par condition suffisante.

Tout au long de ce chapitre se précise l'utilisation de logiciels : calculatrices graphiques, traceurs de courbes, tableurs, logiciels de géométrie dynamique ou de programmation. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel doit permettre, en fonction des élèves, de surpasser les difficultés du calcul algébrique.

# Partir d'un bon pied

**Objectif**

*Réactiver chez l'élève :*

*– la limite d'une suite ;*

*– les lectures graphiques variées : image, antécédents , variations, signe d'une dérivée, inégalités.*

**A** **1** **b. c.** **2** **c.**
**3** **a. c.** **4** **a.**

**B** **1** Vrai.
**2** Faux , par exemple prendre $x < 0$.
**3** Vrai.
**4** Faux.

**C** **1** Faux. **2** Vrai.
**3** Vrai. **4** Vrai.

# Découvrir

## Activité 1 Droites passant par un point

**Objectif :** *Appréhender la notion de limite sur un exemple géométrique en utilisant un logiciel de géométrie.*

**1** **a. b.** Lorsque $x$ devient « très grand », le point $M$ s'éloigne de $O$ sur l'axe des abscisses, le point $N$ se rapproche de $Q$ et l'aire du triangle $ANQ$ tend vers 0.
**c.** Lorsque l'abscisse du point $M$ devient très proche de 2, le point $N$ s'éloigne du point $O$ sur l'axe des ordonnées, l'aire du triangle $ANQ$ devient « très grande ».

**2** **a.** En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle $MON$ on a : $\dfrac{OM}{QA} = \dfrac{ON}{NQ}$,

donc : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$,

soit : $x\,f(x) - x = 2\,f(x)$,

donc : $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

**b.** Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 1.

**3** **a.** On a Aire de $ANQ = \dfrac{QA \times QN}{2}$, donc :

$$g(x) = \frac{(f(x)-1)\times 2}{2} = \frac{x}{x-2} - 1 = \frac{2}{x-2}.$$

**b.** Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, l'aire de $ANQ$ tend vers 0.

## Activité 2 Notion d'asymptote horizontale

**Objectif :** *Définir l'asymptote à une courbe à l'infini par la distance entre un point de la courbe et un point sur la droite qui tend vers 0.*

**1** Le point $M$ a pour coordonnées $(x\,;f(x))$ et $N$ a pour coordonnées $(x\,;1)$, donc pour tout réel $x$, $MN = |f(x) - 1|$.

**2** **a.** On a $x_1 = 4$, $x_2 = 14$, $x_3 = 2\sqrt{499}$.

**b.** Pour tout réel $x$, $|f(x) - 1| = \dfrac{2}{x^2+4}$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$.

$MN < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{2}{x^2+4} < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 > \dfrac{2}{\varepsilon} - 4$.

Donc si $x > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon} - 4}$, alors $MN < \varepsilon$. La distance $MN$ peut être rendue aussi petite qu'on le désire dès que $x$ dépasse une certaine valeur.

**3** Si $x < -\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon} - 4}$, alors $MN < \varepsilon$. La distance $MN$ peut être rendue aussi petite qu'on le désire dès que $x$ est inférieur à une certaine valeur

## Activité 3 Comportement à l'infini des fonctions de base

**Objectif :** *On sait visualiser le comportement des fonctions de base en $+\infty$, il s'agit ici de mettre en place une définition plus rigoureuse comme il a été fait avec la convergence des suites numériques.*

**1** Voir ci dessous.

| x | $x^2$ | $x^3$ | √x |
|---|---|---|---|
| 10 | 100 | 1000 | 3,16227766 |
| 100 | 10000 | 1000000 | 10 |
| 1000 | 1000000 | 1000000000 | 31,6227766 |
| 10000 | 100000000 | 1E+12 | 100 |
| 100000 | 1E+10 | 1E+15 | 316,227766 |
| 1000000 | 1E+12 | 1E+18 | 1000 |
| 10000000 | 1E+14 | 1E+21 | 3162,27766 |

**2 a.** Si $x_0 = 10^7$, alors $f(x_0) \geqslant 10^{14}$. Comme la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant 10^{14}$.

**b.** ◗ Si $x_0 = 10^5$, alors $g(x_0) \geqslant 10^{14}$. Comme la fonction $g$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si $x \geqslant x_0$, alors $g(x) \geqslant 10^{14}$.

◗ Si $x_0 = 10^{28}$, alors $h(x_0) \geqslant 10^{14}$. Comme la fonction $h$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si $x \geqslant x_0$, alors $h(x) \geqslant 10^{14}$.

**3** Soit $A > 0$.

**a.** Si $x_0 = \sqrt{A}$, alors $f(x_0) \geqslant A$. Comme la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$.

**b.** ◗ Si $x_0 = \sqrt[3]{A}$, alors $g(x_0) \geqslant A$. Comme la fonction $g$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si $x \geqslant x_0$, alors $g(x) \geqslant A$.

◗ Si $x_0 = A^2$, alors $h(x_0) \geqslant A$. Comme la fonction $h$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, si $x \geqslant x_0$, alors $h(x) \geqslant A$.

## Activité 4

## Comportement au voisinage de 0

**Objectif :** *L'objectif est le même que pour l'activité 3 sauf que le parallèle avec les suites numériques est absent.*

**1** La courbe $\mathscr{C}_2$ représente $f$ et la courbe $\mathscr{C}_1$ représente $g$.

**2 a.** Si $\alpha = 10^{-2}$, alors pour $0 < x < \alpha$, on a $\dfrac{1}{x} > 10^2$.

Comme sur $]0\,;1]$, $\dfrac{1}{x^2} \geqslant \dfrac{1}{x}$, on a aussi $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 10^2$.

**b.** Si $-10^{-2} < x < 0$, alors $\dfrac{1}{x} < -10^2$ et $\dfrac{1}{x^2} > 10^4$.

**3** Pour $0 < x < 10^{-n}$, on a $\dfrac{1}{x} > 10^n$.

**4** On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = +\infty$.

## Activité 5 Détermination d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ par balayage

**Objectif :** *Mettre en place un algorithme de base pour la résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.*

**1** Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x - 1$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**2** Comme $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, si $f(x) < 0$, c'est-à-dire $f(x) < f(\alpha)$, on a $x < \alpha$.

De même si $f(x) > 0$, c'est-à-dire $f(x) > f(\alpha)$, on a $x > \alpha$.

On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, donc d'après ce qui précède, $0 < \alpha < 1$.

**3 a.** et **b.** Comme la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$, tant que $f(x)$ reste négatif, alors $x < \alpha$.

Dès que $f(x) > 0$, alors on a dépassé $\alpha$ ; d'où un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 1/10.

**c.** Il suffit de modifier l'affichage final par :

« Afficher$(x - 0{,}1)$ ; ».

**4** Il suffit d'ajouter « entrer $n$ » , puis de modifier l'instruction « $x \leftarrow x + 0{,}1$ » par « $x \leftarrow x + 10 \wedge (-n)$ ».

# Exercices d'application

## Savoir faire Démontrer en utilisant les définitions

**1 a.** Il semble que :

$$\lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty.$$

**b.** Pour tout réel $x$ positif, $|x| = x$ donc pour tout entier naturel $n$ non nul, si $x \geqslant 10^n$, alors $|x| \geqslant 10^n$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$.

On démontre de même que : $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.

**2** On pose $f(x) = -x^2 + 3x$.

On a :

$f(x) \leqslant -10^n \Leftrightarrow -x^2 + 3x \leqslant -10^n \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10^n \geqslant 0.$

Or $(-10^n)^2 - 3(-10^n) - 10^n = 10^{2n} + 2 \times 10^n > 0$.

Comme la fonction $x \mapsto x^2 - 3x - 10^n$ est décroissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$, pour tout réel $x \leqslant -10^n$, on a : $f(x) \leqslant -10^n$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**3 a.** On pose : $g(x) = f(x) - (-1) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

$0 \leqslant g(x) \leqslant 10^{-n} \Leftrightarrow \dfrac{2}{1+x^2} \leqslant 10^{-n}$

$\Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 \times 10^n - 1$.

Donc si $x \geqslant A$ avec $A = \sqrt{2 \times 10^n - 1}$, on a :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant 10^{-n}.$$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -1$ comme asymptote en $+\infty$.

On démontre de même que $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

**b.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

d'où le tableau de variations de $f$ ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ |

Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

**4** L'intervalle $]0{,}5\,;1{,}5[$ est ouvert et contient 1.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, il existe un réel $a$ tel que pour tout réel $x > a$, $f(x) \in\, ]0{,}5\,;1{,}5[$.

Donc pour tout réel $x \in\, ]a\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

## Savoir faire Déterminer une limite en utilisant les opérations

**5** On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour tout réel $x$ non nul, on a :

$$\frac{x^3-x}{x+2}=\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=x^2\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}=1,$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x+2}=+\infty$.

**6** Pour tout réel $x\geqslant 0$,

$f(x)=x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\times\sqrt{x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\times(\sqrt{x}-1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$, par produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

## Savoir faire Déterminer une limite

**7** On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour tout réel $x$ strictement positif,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, en utilisant les opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

**8** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}3\cos(X)=3$.

Donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}3\cos\left(\frac{2}{x}\right)=3$.

**9** On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ». Pour tout réel $x<-2$,

$$f(x)=\frac{x^2-\left(\sqrt{2x^2-3}\right)^2}{x-\sqrt{2x^2-3}}=\frac{-x^2+3}{x-\sqrt{2x^2-3}}$$

$$=\frac{-x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{x-|x|\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}=-x\times\frac{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{1+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}},$$

car ici $|x|=-x$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0$, en utilisant les opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

**10** **a.** ▸ $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,

donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$, car $x\in\,]-1;+\infty[$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to 1}\sqrt{t}=1$.

**b.** ▸ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$, donc la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, donc la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote.

## Savoir faire Étudier la continuité d'une fonction

**11** ▸ On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}x=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{1}{x}=1$ et $f(1)=1$, donc $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$. La fonction $f$ est continue en 1.

▸ Comme $f$ est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**12** Pour tout réel $x\geqslant 0$, $0\leqslant\frac{x}{x+1}<1$, donc $f(x)=0$. La fonction $f$ est continue sur $[0;+\infty[$.

**13** **a.** Pour tout réel $x\geqslant 0$, on a : $|x|=x$.

Donc : $$f(x)=\frac{3x^2+2x}{x}.$$

Ainsi pour tout réel $x>0$, $f(x)=3x+2$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=2$.

**b.** Pour tout réel $x\leqslant 0$, on a : $|x|=-x$.

Donc pour tout réel $x<0$, $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x}=3x-2$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=-2$.

**c.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)$. Il n'est pas possible de trouver une fonction $g$ continue telle que pour tout réel $x\neq 0$, $f(x)=g(x)$.

## Savoir faire Dénombrer les solutions d'une équation $f(x)=k$

**14** **a.** $f'(x)=6x^2+24x+18$.

$\Delta=144$ ; $x_1=-3$ et $x_2=-1$.

D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 9 | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

▸ Sur l'intervalle $]-\infty;-3]$, la fonction $f$ est strictement croissante, continue, et d'intervalle-image $]-\infty;9]$ contenant 0.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]-\infty\,;-3]$.

▶ Sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, le minimum de $f$ est 1. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

▶ Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Par la calculatrice, $\alpha \approx -4{,}05$.

**b.** Le tableau de signes de $f(x)$ est sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

D'où l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ admet pour ensemble-solution $[\alpha\,;+\infty[$.

**15** **a.** La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x}}$, donc $f'(x)$ est du signe de $3x-2$, d'où le tableau de variations ci-dessous.

On a $m \approx -1{,}17$.

| $x$ | 0 | | $a$ | | $\frac{2}{3}$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | | 0 | | $+$ | | |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | $m$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

▶ Sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{2}{3}\right[$, la fonction $f$ est strictement décroissante, continue, et d'intervalle-image $]m\,;1]$ contenant 0.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $a$ sur $\left[0\,;\frac{2}{3}\right[$.

▶ Sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$, la fonction $f$ est strictement croissante, continue et d'intervalle-image $[m\,;+\infty[$ contenant 0.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $b$ sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

▶ Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

**b.** $0{,}06 < a < 0{,}07$ et $1{,}60 < b < 1{,}61$.

**16** **a.** La fonction $f$ n'est pas continue en $-1$, car :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = 1 \neq f(-1).$$

**b.** Pour tout réel $k \in [-1\,;2]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

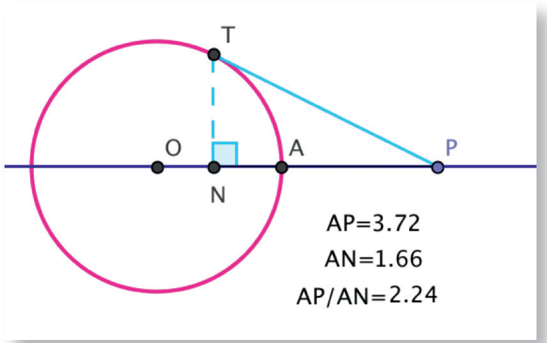
**c.** On remarque que la condition « $f$ continue sur $[a\,;b]$ » n'est pas nécessaire pour conclure.

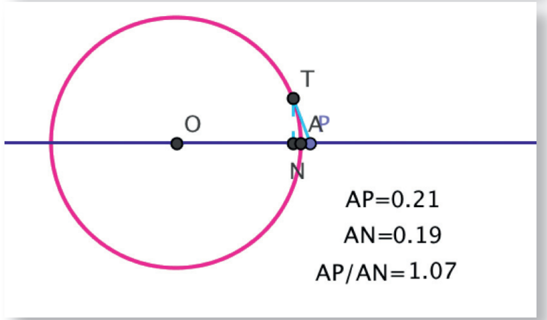


# Travaux pratiques

## 17 Des limites en géométrie

### ❶ Modéliser la situation et conjecturer




**1** Faire la construction (On a pris ici $R = 3$). Lorsque $P$ se rapproche de $A$, $AP$ tend vers 0.

**2** Le rapport $\dfrac{AP}{AN}$ tend vers 1.

### ❷ Élaborer une démarche

**1** La droite $(PT)$ est tangente au cercle en $T$, donc le triangle $OPT$ est rectangle en $T$. Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$OP^2 = OT^2 + PT^2,$$

soit : $PT^2 = OP^2 - OT^2 = (x+R)^2 - R^2$,

donc : $PT^2 = x^2 + 2xR$.

**2** Dans le triangle $OPT$ on a $\cos\widehat{OPT} = \dfrac{PT}{OP}$ et dans le triangle $PNT$, $\cos\widehat{OPT} = \dfrac{PN}{PT}$. Donc $\dfrac{PT}{OP} = \dfrac{PN}{PT}$.

On en déduit que $PN = \dfrac{PT^2}{OP} = \dfrac{x^2 + 2xR}{x+R}$.

On a donc $AN = PN - x = \dfrac{xR}{x+R}$.

Donc : $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{R}{x+R}$.

**3** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{AN}{AP} = \lim_{x \to 0} \frac{R}{x+R} = 1.$

## 18 Résolution approchée d'une équation par dichotomie

**Objectif :** *Mettre en place un autre algorithme pour déterminer les valeurs approchées d'une solution de l'équation* $f(x) = 0$.

**1** **a.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2).$$

**b.** Le signe de $f'(x)$ donne le tableau de variations ci-après.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $9$ | ↗ | $14$ | ↘ | $-18$ | ↗ | $+\infty$ |

**2 a.** ◗ Sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$, $f$ possède un minimum égal à 9, donc l'équation $f(x)=0$ n'y a pas de solution.

◗ Sur l'intervalle $[0\,;2[$, la fonction $f$ est strictement décroissante, continue, et d'intervalle-image $]-18\,;14]$ contenant 0. On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0\,;2[$ .

◗ Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, la fonction $f$ est strictement croissante, continue et d'intervalle-image $[-18\,;+\infty[$ contenant 0. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\beta$ sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

◗ Finalement, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

**b.** Par la calculatrice, $1<\alpha<2$ et $2<\beta<3$.

**3 a.** Si le produit $f(a)\times f(m)<0$, alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires.
Si le produit $f(a)\times f(m)>0$, alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe.

**b.** L'algorithme permet de déterminer des valeurs approchées par défaut $(a)$ et par excès $(b)$ de $\alpha$ avec une précision de e, et pour cela, on prend $a=1$ et $b=2$.

**c.** On obtient $\alpha\approx 1{,}042$ par excès à 0,001 près.

**d.** On prend $a=2$ et $b=3$. On obtient $\beta\approx 2{,}605$ à 0,001 près.

## 19 Comme une parabole ou comme une hyperbole ?

**Objectif :** *Préciser la notion de courbe asymptote à une autre.*

**1** ◗ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

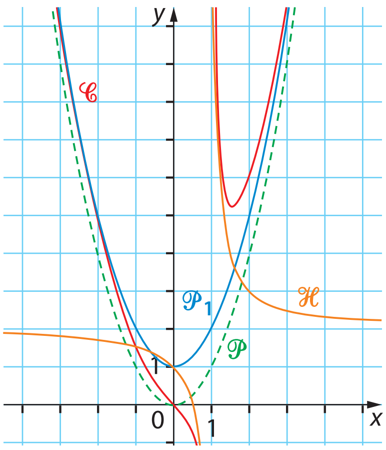
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

◗ $\lim\limits_{x\to1}(x^3-x^2+x)=1$ et $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$.

Donc en utilisant le signe de $x-1$ au voisinage de 1, on obtient :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty.$$

**2** Voir le graphique ci-dessous où on a tracé la parabole $\mathscr{P}_1$.




**3 a.** En réduisant au même dénominateur :

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}=\frac{ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x+d-c}{x-1}.$$

En identifiant, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases}a=1\\b-a=-1\\c-b=1\\d-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1\\d=1\end{cases}.$$

Donc pour tout réel $x$ différent de 1 :

$$f(x)=x^2+1+\frac{1}{x-1}.$$

**b.** On considère la parabole $\mathscr{P}_1$ d'équation $y=x^2+1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x^2+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$, la parabole $\mathscr{P}_1$ est très proche de $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
On obtient le même résultat en $-\infty$.

**4 a.** Voir la courbe $\mathscr{H}$ ci-dessus.

**b.** $f(1+h)=(1+h)^2+1+\dfrac{1}{1+h-1}$

$$=h^2+2h+\frac{1+2h}{h}.$$

Donc $f(x)=(x-1)^2+2(x-1)+\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Donc $f(x)-\dfrac{2x-1}{x-1}=(x-1)^2+2(x-1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)^2+2(x-1)\right]=0$, l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ convient.

**c.** Voir ci-dessus.

**d.** Les points d'intersection des courbes $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{H}$ ont des abscisses qui vérifient $x^2+1=\dfrac{2x-1}{x-1}$, soit $x(x^2-x-1)=0$. L'équation $x^2-x-1=0$ a pour discriminant 5, donc elle a deux solutions $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$.

Donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{H}$ ont pour trois points d'intersection de coordonnées $(0\,;1)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\,;\dfrac{5+\sqrt5}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\,;\dfrac{5-5\sqrt5}{2}\right)$.

## 20 Claudine a-t-elle raison ?

**Objectif :** *Conjecturer et prendre des initiatives dans la mise en œuvre de la démonstration.*

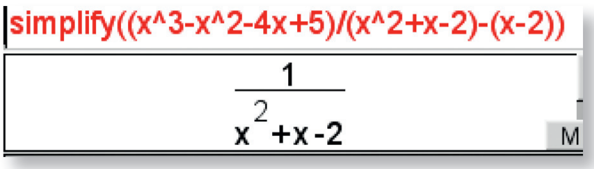
Pour que Claudine ait raison, au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ doit être très proche de $x-2$. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous qui semble confirmer cette conjecture.

```
partfrac((x^3-x^2-4x+5)/(x^2+x-2))
```

$$x-2+\frac{1}{(x-1)\cdot 3}+\frac{1}{(x+2)\cdot(-3)}$$

En posant $g(x)=f(x)-(x-2)$, on obtient :

$$g(x)=\frac{1}{x^2+x-2}.$$




$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x-2)=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Donc lorsque l'on remplace $f(x)$ par $x-2$, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$, qui est « proche de 0 » lorsque $x$ est « grand » : Claudine a raison.

### 21 Prendre des initiatives

**Objectif :** *Initier les élèves à des problèmes de recherche.*

**1** Pour $n\geqslant 2$, la fonction $f_n : x\longmapsto x+x^2+\ldots+x^n-1$ est dérivable et $f'_n(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}>0$ sur l'intervalle $[0\,;1]$. Elle est donc strictement croissante et continue.

$f_n(0)=-1$ et $f_n(1)=n-1$, donc $0\in\,]f_n(0)\,;f_n(1)[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $a_n$ dans l'intervalle $[0\,;1]$.

**2** ▸ On a $a_{n-1}+(a_{n-1})^2+\ldots+(a_{n-1})^{n-1}=1$.

Donc $f_n(a_{n-1})=(a_{n-1})^n>0$.

Comme $f_n$ est strictement croissante sur $[0\,;1]$ et $f_n(a_n)=0$, on a $a_{n-1}\geqslant a_n$.

Donc la suite $(a_n)$ est décroissante.

▸ On a $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.$$

Donc pour tout entier $n\geqslant 2$, $\frac{1}{2}\leqslant a_n$. La suite $(a_n)$ est minorée par $\frac{1}{2}$.

▸ La suite $(a_n)$ est décroissante et minorée , donc elle converge vers un réel $\ell$ tel que $\frac{1}{2}\leqslant\ell\leqslant a_n$.

▸ Comme $f_n$ est strictement croissante sur $[0\,;1]$,

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f_n(\ell)\leqslant f_n(a_n),$$

soit : $$-\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant f_n(\ell)\leqslant 0.$$

Donc la suite de terme général $f_n(\ell)$ converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

▸ $f_n(\ell)=\ell+(\ell)^2+\ldots+(\ell)^n-1=\frac{\ell-(\ell)^{n+1}}{1-\ell}-1$,

qui converge vers $\frac{\ell}{1-\ell}-1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ell)^{n+1}=0$.

Donc on a $\frac{\ell}{1-\ell}-1=0$, soit $\ell=\frac{1}{2}$.

## Faire le point

**25** **1** a. **2** c. **3** a. et c. **4** b. **5** c.
**6** b. **7** c. **8** c. **9** c. **10** b.

**26** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux.
**4** Vrai. **5** Faux. **6** Vrai.

## Exercices d'application

### 1 Limite d'une fonction à l'infini

**27** **1** **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux.
**2** Faux.

**28** **1** **b.** **2** **b.** et **c.**

#### Limites : lecture graphique

**29** ▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=+\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f_2(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_2(x)=-\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f_3(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_3(x)=+\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f_4(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_4(x)=-2$.

**30** ▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ n'existe pas.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=0$.

#### Limite finie à l'infini

**31** **Démonstrations du cours**

**1** **a.** Soit un réel $\varepsilon$ strictement positif.

$\frac{1}{x^2}\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow x\leqslant-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ ou $x\geqslant\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

**b.** ▸ Pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, dès que $x\geqslant\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, on a $\frac{1}{x^2}\leqslant\varepsilon$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

▸ Pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, dès que $x\leqslant-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, on a $\frac{1}{x^2}\leqslant\varepsilon$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

**2** ▸ Soit un réel $\varepsilon$ strictement positif :

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

**b.** ▸ Pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, dès que $x\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$, on a $\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\varepsilon$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$.

**32** **1** Pour tout réel $x$, $f'(x)=-\frac{6x}{(1+x^2)^2}$.

La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

**2** **a.** $f(x)-(-1)\leqslant 10^{-4}\Leftrightarrow\frac{3}{1+x^2}\leqslant 10^{-4}$.

$\dfrac{3}{1+x^2} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{29\,999}$ ou $x \geqslant \sqrt{29\,999}$.
Donc si $x \geqslant 174$, alors $f(x)-(-1) \leqslant 10^{-4}$.

**b.** Soit $\varepsilon > 0$, $|f(x)-(-1)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{1+x^2} \leqslant \varepsilon$.

$\dfrac{3}{1+x^2} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}-1}$ ou $x \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}-1}$.

Donc si $x \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}-1}$, alors $|f(x)-(-1)| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(-1)] = 0$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

**c.** De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

**d.** La droite d'équation $y = -1$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe représentative de $f$.

**3** Le maximum de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = 2$.
Et pour tout réel $x$, $f(x) > -1$, car :

$$f(x)+1 = \frac{3}{1+x^2} > 0.$$

**33** **1** Il semble que la limite de $f$ en $+\infty$ est 3.

**2** **a.** Pour tout réel $x > -2$,

$f(x)-3 = \dfrac{-2}{x+2} < 0$. Donc $|f(x)-3| = \dfrac{2}{x+2}$.

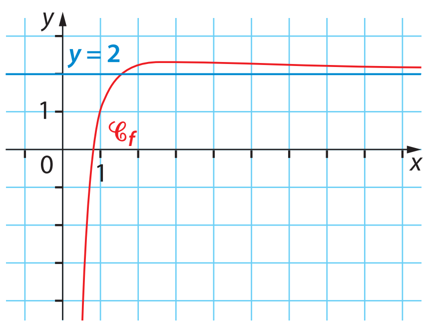
**b.** Pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$|f(x)-3| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

En posant $A = \dfrac{2}{\varepsilon} - 2$, on a pour tout réel $x > A$, $f(x) \in \,]3-\varepsilon\,;3+\varepsilon[$.
Donc la limite de $f$ en $+\infty$ est 3.
La courbe représentative de $f$ présente une asymptote d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

**34** **1** Pour $x \in \,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{6-2x}{x^3}$ qui est du signe de $6-2x$.

| $\boldsymbol{x}$ | 0 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{f'(x)}$ | | + | 0 | − | |
| $\boldsymbol{f(x)}$ | | ↗ | $\dfrac{7}{3}$ | ↘ | |




**2** **a.** Il semble que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

**b.** Voir ci-dessus.

**3** **a.** Pour tout $x > 1$, $|f(x)-2| = \dfrac{|2x-3|}{x^2}$.

▶ Si $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ : $|2x-3| = 2x-3$. Donc $|2x-3| \leqslant 2x$, et

$|f(x)-2| \leqslant \dfrac{2x}{x^2}$, soit $|f(x)-2| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

▶ Si $1 < x \leqslant \dfrac{3}{2}$ : $|2x-3| = 3-2x$.

Donc $|f(x)-2| - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3-2x}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3-4x}{x^2} \leqslant 0$.

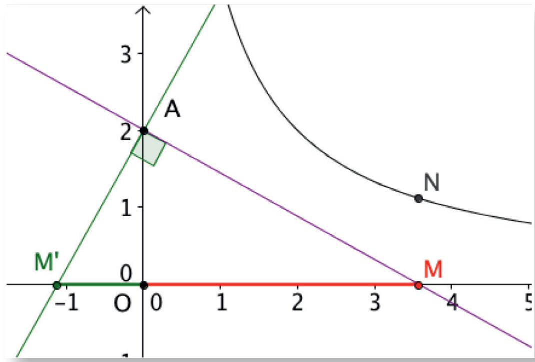
Donc $|f(x)-2| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

**b.** Soit un réel $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon}$, $\dfrac{2}{x} \leqslant \varepsilon$ ;
donc $|f(x)-2| \leqslant \varepsilon$.
On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

**c.** La droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

**35** Comme la fonction $f$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, 0 est un minorant de $f$, donc pour tout $x > 0$, on a $f(x) \geqslant 0$.

**36** **1** **a.**




**b.** ▶ Lorsque l'abscisse $x$ devient « grande » le point $M'$ se rapproche du point $O$.
▶ Lorsque l'abscisse $x$ devient « proche de 0 » le point $M'$ s'éloigne de $O$.

**c.** Le graphique ci-dessus, obtenu en créant le « lieu » du point $N$ lorsque $M$ varie, confirme les résultats du **b.**

**2** **a.** On a :

$\tan\widehat{OMA} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{2}{x}$ et $\tan\widehat{OAM'} = \dfrac{OM'}{OA} = \dfrac{y}{2}$.

Comme $\widehat{OMA} = \widehat{OAM'}$, on a $\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{x}$.

La fonction $f$ qui à $x$ associe $y$ est telle que $f(x) = \dfrac{4}{x}$.

**b.** Dès que $0 < x \leqslant 4 \times 10^{-5}$, $f(x) \geqslant 10^5$.

**c.** Lorsque $x \geqslant 10^5$, alors $0 < f(x) < 4 \times 10^{-5}$.

## Limite infinie à l'infini

**37** **Démonstrations du cours**

**1** **a.** Soit $A$ un réel strictement positif.
Sur $[0\,;+\infty[$, $x^2 \geqslant A \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{A}$.

**b.** Pour tout réel $A > 0$, on a déterminé un réel $B = \sqrt{A}$, tel que dès que $x \geqslant B$ on a $x^2 \geqslant A$ ; donc :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

**c.** Soit $A$ un réel strictement positif.
Sur $]-\infty\,;0]$, $x^2 \geqslant A \Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{A}$.

**b.** Pour tout réel $A > 0$, on a déterminé un réel $B = -\sqrt{A}$, tel que dès que $x \leqslant B$ on a $x^2 \geqslant A$ ; donc :

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$$

2 Soit $A$ un réel strictement positif.
Sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{x} \geqslant A \Leftrightarrow x \geqslant A^2$.
Pour tout réel $A > 0$, on a déterminé un réel $B = A^2$ tel que dès que $x \geqslant B$ on a $\sqrt{x} \geqslant A$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

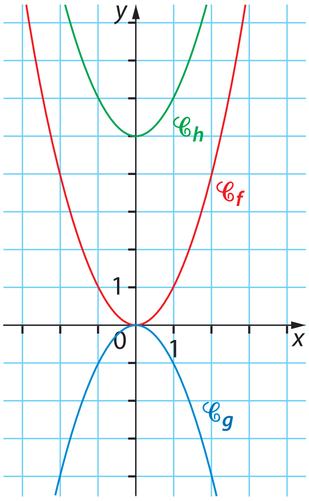
**38** $P_2$ est la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**39**
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

**40** 1 Voir la figure ci-dessous.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

2 Voir la figure ci-dessous.

3
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.




**41** 1 Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $f$ ne peut pas admettre de limite infinie en $+\infty$.

2 Pour tout entier $k$, $\sin k\pi = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$.

3 Si la fonction $f$ a pour limite $\ell$ en $+\infty$ alors :
pour $x > A$, $f(x) \in \,]\ell - 0{,}25\,;\ell + 0{,}25[$,
ce qui est impossible d'après les résultats du 2.

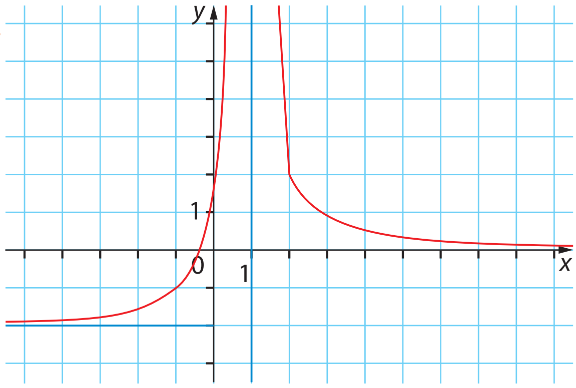
## 2 Limite d'une fonction en un point

**42** 1 Faux. 2 Vrai. 3 Faux. 4 Faux.

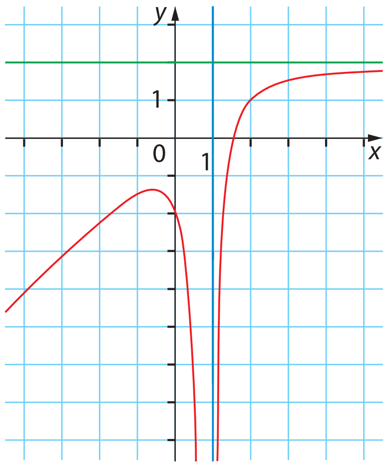
**43** 1 **b.**, **d.** 2 **a.**, **b.**

### Représentations graphiques

**44** **a.**



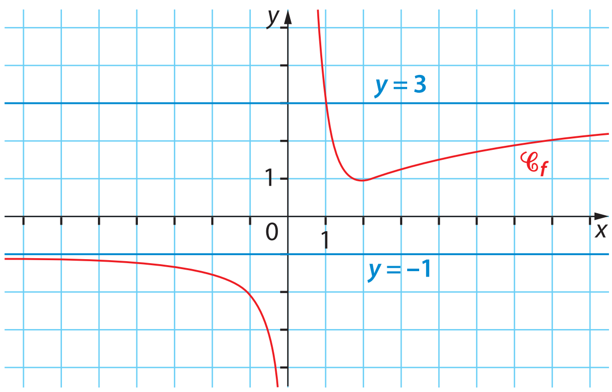

**b.**




**45**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ ;
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ ;
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

**46** 1 Les asymptotes à $\mathscr{C}$ sont :
la droite d'équation $x = 0$, la droite d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

2



## Utiliser les définitions

**47** **Démonstration d'un résultat du cours**

**1** Soit $A$ un réel strictement positif.

$$\frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{A}} < x < 0 \text{ ou } 0 < x < \sqrt{\frac{1}{A}}.$$

**2** Pour tout réel $A > 0$, si $x \neq 0$ et $-\sqrt{\frac{1}{A}} < x < \sqrt{\frac{1}{A}}$, alors $\frac{1}{x^2} > A$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

**48** **1** Il semble que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

**2** Pour tout réel $x \neq 1$, si $|x-1| \leqslant a$, alors $(x-1)^2 \leqslant a^2$, donc :
$$\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant \frac{1}{a^2}.$$

**3** **a.** Définition d'une fonction qui admet une limite égale à $+\infty$ en 1 :
« Pour tout réel $A$, il existe un réel $\varepsilon$ tel que si $|x-1| \leqslant \varepsilon$ alors $f(x) \geqslant A$ ».
**b.** D'après la question **2**, en posant $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{A}}$ on prouve que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

**4** La courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote.

**49** **1** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$,
donc la fonction inverse n'admet pas de limite en 0.

**2** On a :
$$f\left(\frac{2}{\pi + k2\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$
$k$ étant un entier relatif, quand $k$ tend vers $+\infty$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ prend alternativement les valeurs 1 et $-1$, donc la fonction $f$ n'admet pas de limite en 0, ni en $0^-$, ni en $0^+$.

# 3 Détermination de limites

**50** **1** Faux. **2** Faux. **3** Faux. **4** Faux.

**51** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Faux.

## Utiliser les opérations

**52**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert f(x) \rvert$ | $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)^2$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{f(x)}$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $0$ ‖ $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

**53** **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-3) = +\infty$.
**b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2(x+2)+1) = +\infty$.

**54** **a.** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$, donc :
$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] = +\infty.$$
**b.** On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{3}{x}\right) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x\left(x + \frac{3}{x}\right) = -\infty$.

**55** **1** On a :
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 4\right) = -4 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (x^2+3) = +\infty,$$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3)\left(\frac{1}{x} - 4\right) = -\infty$.

**2** Pour tout réel non nul, $\frac{2}{x} \times (x+5) = 2 + \frac{10}{x}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{10}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} \times (x+5) = 2$.

**56** **a.** $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ (pas de valeur interdite).
Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = -1$, par produit, on a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
**b.** Pour tout réel $x$, on a $2 + 3x^2 \neq 0$. Donc $g$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x \neq 0$,
$$g(x) = \frac{x}{x^2\left(\frac{2}{x^2} + 3\right)} = \frac{1}{x\left(\frac{2}{x^2} + 3\right)}.$$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2} + 3\right) = 3$, par quotient, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
**c.** Pour $x^2 - 4x + 5$, $\Delta = -4$. Donc pour tout réel $x$, $x^2 - 4x + 5 \neq 0$.
Donc $h$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{x^3\left(9 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{x\left(9 + \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(9 + \frac{1}{x^3}\right) = 9$

et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 1$, par quotient, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**57**

| | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | 0 |
| $g$ | 0 | 0 |
| $h$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $f+g$ | $+\infty$ | 0 |
| $f-g$ | $+\infty$ | 0 |
| $fg$ | | 0 |
| $fh$ | $+\infty$ | |
| $g-h$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f/g$ | $+\infty$ | |
| $f/h$ | | 0 |
| $g/h$ | 0 | 0 |
| $f \circ h$ | 0 | $+\infty$ |

**58** **a.** On a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (4 - x^2) = 0^+$ ; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x}{4 - x^2} = +\infty$.

**b.** On a $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (4 - x^2) = 0^-$ ; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x}{4 - x^2} = -\infty$.

**c.** On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} (4 - x^2) = 0^-$ ; donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x}{4 - x^2} = +\infty$.

**d.** On a $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} (4 - x^2) = 0^+$ ; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x}{4 - x^2} = -\infty$.

**e.** Si $x$ est différent de 0, $\frac{x}{4 - x^2} = \frac{1}{-x\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = 1$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x} = 0.$$

**59** **a.** ◗ On a :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x} + 2\right) = 2 \text{ et } \lim_{x \to +\infty}(x^2 - 1) = +\infty,$$

par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

◗ On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}\left(\frac{1}{x} + 2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 - 1) = -1$,

par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**b.** ◗ On a $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x} + 2\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^2 - 1) = +\infty$,

par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

◗ On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}\left(\frac{1}{x} + 2\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 - 1) = -1$,

par produit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$.

**c.** ◗ Un logiciel de calcul formel donne pour $x$ différent de 1 :

$$\frac{(3 - 2x)^3}{1 - x} = 8x^2 - 28x + 26 - \frac{1}{x - 1}.$$

◗ On a $\lim\limits_{x \to -\infty}(8x^2 - 28x + 26) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x - 1} = 0$, par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

◗ On a $\lim\limits_{x \to 1}(8x^2 - 28x + 26) = 6$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}}\left(-\frac{1}{x - 1}\right) = +\infty$,

par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

**d.** ◗ On a pour $x$ différent de 2, $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = x - 2$.

◗ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x - 2) = +\infty$.

◗ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = 0$.

**60** **a.** ◗ On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x - 4} = -\frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$,

donc par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

◗ On a $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \frac{1}{x - 4} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 4}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{4}$, donc par somme $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty$.

**b.** Sur $]-3\,;-2[$, $f(x) = \frac{4x + 1}{(x + 2)(x + 3)}$.

◗ $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4x + 1}{(x + 3)} = -7$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{1}{(x + 2)} = -\infty$,

donc par produit : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$.

◗ $\lim\limits_{x \to -3} \frac{4x + 1}{(x + 2)} = 11$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{1}{(x + 3)} = +\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$.

**c.** Sur $]5\,;+\infty[$, $f(x) = \frac{(x - 5)(x + 3)}{2(5 - x)} = -\frac{(x + 3)}{2}$.

◗ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

◗ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -4$.

**d.** ◗ $\lim\limits_{x \to -1}(2x - 1) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{3}{(x + 1)} = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{(x+1)}=0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

**61** **1** Il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

**2** ▸ $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2+x)=0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

▸ Sur $]0\,;+\infty[$ : $f(x)=\dfrac{1-3x}{x^2+x}=\dfrac{-3}{x}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{3x}}{1+\dfrac{1}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, par somme et produit :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

▸ La courbe représentative de $f$ admet deux asymptotes d'équations respectives $x=0$ et $y=0$.

**3** ▸ $f'(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}=\dfrac{(3x+1)(x-1)}{(x^2-x)^2}$.

**b. c.** $f'(x)$ est du signe de $x-1$ sur $]0\,;+\infty[$, d'où le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**62** **1** Pour tout réel $x$ non nul, et $a_n\neq0$ :

$$f(x)=a_nx^n\left[1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right].$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$ pour tout entier naturel $k$ non nul, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right]=1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$.

On démontre de même que :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n.$$

**2** **a.** ▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^4)=-\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^4)=-\infty$.

**b.** ▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$.

## Composition de fonctions

**63** **a.** ▸ Pour $x>0$, $\dfrac{x^2+5}{4x+1}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}{4+\dfrac{1}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on a par somme et quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{4}.$$

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5}{4x+1}=+\infty$.

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$.

**b.** On a par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$$

**c.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$, donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$

donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}=0$.

**d.** ▸ Pour $x>0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$.

▸ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=+\infty$.

**64** **1** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+4)=+\infty$, donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty\,;$$

comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, on a par somme :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

**2** En multipliant et en divisant $f(x)$ par $\sqrt{x^2+4}+x$. On obtient pour tout réel $x$ :

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)=+\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ par quotient de limites.

**65** ▸ $\lim\limits_{v\to c}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)=0$,

donc $\lim\limits_{v\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=\lim\limits_{t\to0}\sqrt{t}=0^+$,

donc d'après le quotient des limites on obtient :

$$\lim_{v\to c}m=+\infty.$$

## Théorèmes de comparaisons

**66** **Démonstration du cours**

**1** **ROC** « $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ » signifie que pour tout réel $A$, il existe un réel $B$ tel que dès que $x>B$, alors $f(x)>A$.

**2** Pour tout réel $A$, il existe un réel $B$ tel que dès que $x>B$, alors $f(x)>A$. Mais comme $g(x)\geqslant f(x)$, on a $g(x)>A$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

**67** Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
Donc $x \leqslant f(x) \leqslant x+2$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'après le théorème de minoration.

**68** **a.** Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $x^2 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (Théorème de minoration).
**b.** Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
Donc $-\dfrac{3x}{2} \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{3x}{4}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{3x}{4} = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (Théorème de majoration).

**69** **1** Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Donc $1 \geqslant -\cos(x) \geqslant -1$, et $3 \geqslant 2-\cos(x) \geqslant 1$.
Par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$.
**2** **a.** Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{2-\cos(x)} \leqslant x$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$, par le théorème de minoration, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)} = +\infty$.
**b.** Pour tout réel $x < -1$,
$$x-1 \leqslant x+\cos(x) \leqslant x+1 < 0.$$
Donc pour tout réel $x < -1$, on a :
$$x-1 \leqslant \frac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)} \leqslant \frac{x+1}{3}.$$
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{3} = -\infty$, par le théorème de majoration, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)} = -\infty$.

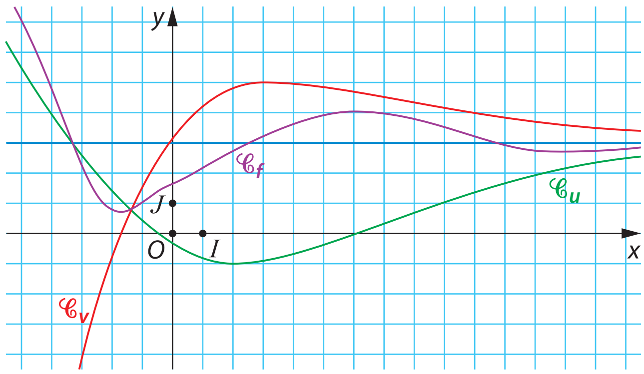
**70** **1** Pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc la fonction $f$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\dfrac{1}{2}$ $\nearrow$ | $1$ |

On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{x+1} \leqslant 1$.
**2** $\sqrt{x} \geqslant 0$. D'après ce qui précède :
$$\frac{\sqrt{x}}{2} \leqslant \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \leqslant \sqrt{x},$$
donc comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$, on a :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty \text{ (théorème de minoration).}$$
De même $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,
comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$ (théorème des gendarmes).

**71** **1** Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (Théorème des gendarmes).
**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$,
donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ (Théorème de minoration).

**72** **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 3$,
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ (Théorème des gendarmes).
$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$,
donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (Théorème de minoration).
**b.** Par exemple :




**73** **a.** Par définition, pour tout réel $x$,
$$E(x) \leqslant x \leqslant E(x)+1.$$
Donc $x-1 \leqslant E(x)$.
En conséquence $x-1 \leqslant E(x) \leqslant x$.
**b.** Donc pour $x > 0$, $1-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{E(x)}{x} \leqslant 1$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ (Théorème des gendarmes).

## 4 Continuité

**74** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Faux.

**75** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Faux.

**76** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai.

### Étudier la continuité

**77** **1** **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Faux.
**2** **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai.
**3** $[-3\,;1[$.

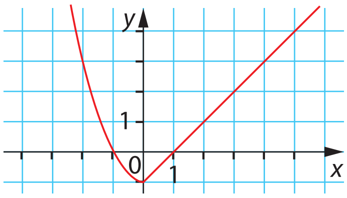
**78** $f(x)=\begin{cases} x \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2+3(x-2) \text{ pour } 2<x<5 \end{cases}$.

On a $f(2)=2$ et :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim_{x \to 2}[2+3(x-2)] = 2.$$

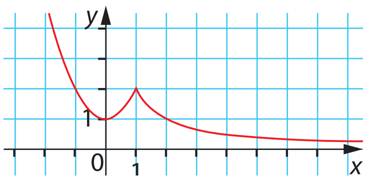
La fonction $f$ est continue en 2.

**79** **a.**



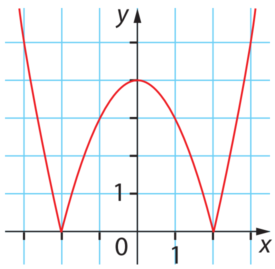

La fonction $f$ est continue en 0 et sur $\mathbb{R}$.

**b.**




La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**80** **1** $f(x)=\begin{cases} x^2-4 \text{ si } x \in ]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[ \\ -x^2+4 \text{ si } x \in ]-2\,;2[ \\ 0 \text{ pour } x=2 \text{ et pour } x=-2 \end{cases}$.




**2** La fonction $f$ est-continue sur $]-\infty\,;-2[$, $]-2\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$ comme fonctions polynômes ; elle est aussi continue en $-2$ et 2, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $f$ n'est pas dérivable en $-2$ et 2 (points anguleux).

**81** **1** ▶ Si $x \neq -1$, $\dfrac{x^2-1}{x+1} = x-1$

▶ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1}(x-1) = -2$, donc pour que $f$ soit continue en $-1$, il faut $m=-2$.

**2** ▶ Pour $x$ différent de 0,

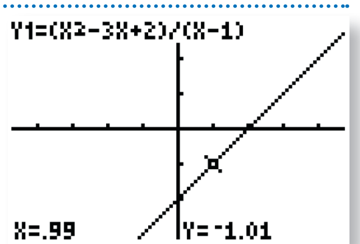
$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

en utilisant l'expression conjuguée du numérateur.

▶ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right) = 0$, donc pour que $f$ soit continue en 0, il faut $m=0$.

## Calculs de limite

**82** **1** Il semble que la fonction $f$ admette $-1$ comme limite en 1.




**2** Pour $x^2-3x+2$, on a $\Delta=1$ ; $x_1=1$ et $x_2=2$.

Donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.
Donc pour tout réel $x \neq 1$, $f(x)=x-2$.
Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1-2=-1$.

**83** **1** Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\,;3\}$,

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-9} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{1}{3}$.

**2** ▶ $\lim\limits_{x \to -3}(x-1) = -4$ et $\lim\limits_{x \to -3}(x+3)=0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} f(x) = -\infty$.

La courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $x=-3$ comme asymptote.

▶ Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\,;3\,;0\}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

La courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote.

**84** **a.** ▶ $\dfrac{x+5}{4x+1} = \dfrac{1+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}$.

Donc comme $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$, par somme et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x+5}{4x+1} = \dfrac{1}{4}$.

▶ $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{\dfrac{x+5}{4x+1}} = \lim\limits_{t \to 1/4}\sqrt{t} = \dfrac{1}{2}$.

**b.** ▶ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ pour $x<0$.

Donc comme $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, par somme et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1$.

**85** **a.** On a $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{1}{2x+1} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty}\cos\left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = \lim\limits_{t \to 0}\cos t = \cos 0 = 1$.

**b.** Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\pi x+1}{2x+3} = \frac{\pi+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}.$$

Donc comme $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$, par somme et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{\pi x+1}{2x+3} = \dfrac{\pi}{2}$ ;

donc $\lim\limits_{x \to -\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+3}\right) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}}\sin t = 1$.

## Utiliser un tableau

**86** **1** Vrai.

- Pour tout $x \in ]-\infty\,;0[$, $f(x) < 1$, donc l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $]-\infty\,;0[$.
- Pour tout $x \in ]2\,;+\infty[$, $f(x) < 1$, donc l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $]2\,;+\infty[$.
- La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]0\,;2[$ à images dans $]-3\,;+\infty[$ qui contient 1. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0\,;2[$.

**2** Faux. L'équation $f(x) = -3$ admet deux solutions : 2 et un réel de l'intervalle $]-1\,;0[$.
**3** Faux. L'image par $f$ de l'intervalle $]0\,;4]$ est l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.
**4** Faux.

**87**
- L'image de $[-2\,;1]$ par $f$ est $[-1\,;1]$.
- L'image de $[-2\,;2]$ par $f$ est $[-1\,;1]$.
- L'image de $[-3\,;1]$ par $f$ est $[-1\,;2]$.

**88** **1**
- L'image de $]-\infty\,;0[$ par $f$ est $]1\,;2[$.
- L'image de $[0\,;2[$ par $f$ est $]-\infty\,;2]$.
- L'image de $]-\infty\,;2[$ par $f$ est $]-\infty\,;2]$.
- L'image de $]2\,;+\infty[$ par $f$ est $]-\infty\,;1[$.

**2** **a.** L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.
**b.** L'équation $f(x) = 1$ admet une solution.

## Théorème des valeurs intermédiaires

**89** **1** $f(0) = 2\,;\ f(1) = -2$.
**2** La fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 2$ est définie et dérivable sur $[0\,;1]$, $f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0$, donc strictement décroissante sur $[0\,;1]$, à images dans $[-2\,;2]$ qui contient 0. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;1]$.

**90** **1** La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x+2}$ est définie et continue sur $[-2\,;2]$.
Or $f(-2) = 0$ et $f(2) = 4$. Comme $0 < 2 < 4$, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-2\,;2]$.
**2** La fonction $f : x \mapsto (x^3 + 1)x^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,, donc l'ensemble-image est $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution.

**91** La fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = x(3x - 2)$, d'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\frac{31}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |

D'après ce tableau l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha$.
Or $f(1) = -1$ et $f(2) = 3$. Donc $1 < \alpha < 2$.

**92** La fonction $g : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = 4x(x-1)(x-2)$ ; d'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

D'après ce tableau l'équation $g(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$ : la première dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$, la seconde égale à 1, la troisième dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

**93** **a.** Pour tout réel $x$ dans $[-3\,;6]$, $f'(x) = 3(x^2 - 4)$ ; d'où le tableau des variations de $f$ sur $[-3\,;6]$ :

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $9$ | ↗ | $16$ | ↘ | $-16$ | ↗ | $144$ |

**b.** L'équation $f(x) = 30$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[-3\,;6]$.
**c.** D'après le tableau, on a $4 < \alpha < 5$.
**d.** En utilisant un balayage, on obtient $4{,}34 < \alpha < 4{,}35$.

| X | Y1 |
|---|---|
| 4.3 | 27.907 |
| 4.31 | 28.343 |
| 4.32 | 28.782 |
| 4.33 | 29.223 |
| 4.34 | 29.667 |
| 4.35 | 30.113 |
| 4.36 | 30.562 |
| 4.37 | 31.013 |

**94** **1** La fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x$ est définie et dérivable sur $[-1\,;0]$, $f'(x) = 3x^2 - 5 < 0$ sur cet intervalle, donc la fonction $f$ est strictement décroissante.
$f(-1) = 4$ et $f(0) = 0$, donc l'intervalle-image est $[0\,;4]$ qui contient 3 ; donc l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

**2** **ALGO**

Variables :
 $x$, $y$ : réels
Début
 $x \leftarrow -1$ ; $y \leftarrow x^3 - 5x$ ;
 TantQue $y > 3$ Faire
  $x \leftarrow x + 10^{-2}$
  $y \leftarrow x^3 - 5x$
 FinTantQue ;
 Afficher $(x - 0{,}01 ; x)$
Fin.

**3** On a le tableau des variations de $f$ ci-dessous :

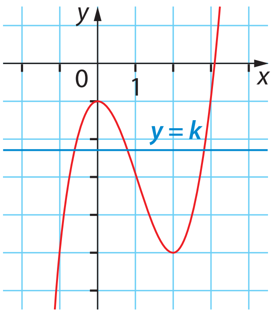
| $x$ | $-\infty$ | | $\beta$ | | $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ | | $\alpha$ | | $\sqrt{\frac{5}{3}}$ | | $\gamma$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | + | 0 | − | | − | 0 | + | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↗ | $10\frac{\sqrt{15}}{9}$ | ↘ | 3 | ↘ | $-10\frac{\sqrt{15}}{9}$ | ↗ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

L'équation $f(x)=3$ admet trois solutions : $\alpha$, mais aussi $-2<\beta<-1$ et $2<\gamma<3$.

▸ Pour obtenir une valeur approchée de $\beta$, on peut initialiser « $x$ » à $-2$. Il faut transformer la condition dans la boucle **Tant Que** par : « $y<3$ ».

▸ Pour obtenir une valeur approchée de $\gamma$, on peut initialiser « $x$ » à 2. Il faut transformer la condition dans la boucle **Tant Que** par : « $y<3$ ».

**95** La fonction $f$, continue sur $\mathbb{R}$, a pour représentation graphique la courbe ci-dessous.




La droite d'équation $y=k$ est parallèle à l'axe des abscisses, donc :

▸ Si $k\in\,]-\infty\,;-5[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution.

▸ Si $k\in\,]-5\,;-1[$, l'équation $f(x)=k$ admet trois solutions.

▸ Si $k=-5$ ou $k=-1$, l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions.

**96** **1** En utilisant la courbe donnée, il semble que l'équation $f(x)=0$ admette une solution : 1.

**2** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x)=6x^2-12x+5{,}96$. Ce polynôme a un discriminant $\Delta=0{,}96$, donc deux racines $x_1=1-\frac{\sqrt{6}}{30}$ et $x_2=1+\frac{\sqrt{6}}{30}$, d'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $M$ | ↘ | $m$ | ↗ | $+\infty$ |

Avec $m\approx 0{,}002$ et $m\approx -0{,}002$.

Donc l'équation $f(x)=0$ admet trois racines sur $\mathbb{R}$.

La conjecture n'est pas confirmée.

**3** **a.** En développant $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ et en identifiant, on obtient $a=2$, $b=-4$ et $c=1{,}96$, donc $f(x)=(x-1)(2x^2-4x+1{,}96)$.

**b.** $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $2x^2-4x+1{,}96=0$.

Le discriminant de $2x^2-4x+1{,}96$ est 0,32, donc les solutions sont $a=1-\frac{\sqrt{2}}{10}$, $b=1+\frac{\sqrt{2}}{10}$.

L'équation $f(x)=0$ admet trois solutions $a$, 1 et $b$.

**97** **1** $f'(x)=4x^3+9x^2+2$.

**2** **a.** $f''(x)=12x^2+18x=6x(2x+3)$.

D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3/2$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 35,75 | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

**b.** ▸ Sur l'intervalle $]-\infty\,;-3/2]$, la fonction $f'$ est strictement croissante, continue, et d'intervalle-image $]-\infty\,;35{,}75]$ contenant 0.

On en déduit que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]-\infty\,;-3/2]$.

▸ Sur l'intervalle $[-3/2\,;+\infty[$, le minimum de $f'$ est 2. Donc l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

▸ Finalement, l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Par la calculatrice, $\alpha\approx-2{,}3$.

**c.** On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |

**3** D'où le tableau des variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**98** **1** Le volume $V$ de l'eau versée dans le récipient est le volume du cylindre de rayon 10 et de hauteur 8 moins le volume de la bille de rayon 4. Soit :

$$V=\pi\times10^2\times8-\frac{4}{3}\times\pi\times4^3=\frac{2\,144}{3}\pi.$$

**2** On doit avoir $R\in\,]0\,;10]$.

**3** Soit $R$ le rayon de la nouvelle bille.

Le volume « eau + bille » est égal au volume du cylindre de base de rayon 10 et de hauteur $2R$, soit :

$$\pi\times10^2\times2R=200\pi R.$$

Ce volume est aussi égal à $V$ plus le volume de la nouvelle bille : $\frac{2\,144}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi R^3$.

Le rayon $R$ de la nouvelle bille est solution du problème si son rayon $R$ vérifie l'équation :

$$(\text{E}) : x^3-150x+536=0.$$

**4** On pose $f(x)=x^3-150x+536$. La fonction $f$ est dérivable et $f'(x)=3(x^2-50)$, d'où le tableau des variations ci-après.

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $\sqrt{50}$ | | $\alpha$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $536$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $36$ |

Avec $m \approx -171$, donc le problème a une solution $\alpha$ entre 9 et 10.
Un balayage donne $9{,}74 < \alpha < 9{,}75$,
c'est-à-dire $R \approx 9{,}7$ cm à 0,1 près.

## Prépa Bac

## Exercices guidés

**99** **1** Le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel $x$ est donné ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2** **a.** La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

**b.** ▸ Pour $x \in ]-\infty\,;3[$ on a $-1 < f(x) < 1$, donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$.

▸ Sur l'intervalle $[3\,;10]$, la fonction $f$ est continue et strictement croissante et l'ensemble des images est $[-1\,;3]$ qui contient 2. Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[3\,;10]$.

**3** Les fonctions $f$ et $g$ ont des variations contraires, car $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$. Donc on obtient le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty \parallel -\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty \parallel +\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

**100** **Partie A**

**1** Pour tout réel $x$, $g'(x) = 2x(3x+1)$ ; d'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{26}{27}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2** ▸ Sur $]-\infty\,;0]$, $g(x) < 0$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

▸ Sur $[0\,;+\infty[$ la fonction $g$ est continue et strictement croissante à images dans $[-1\,;+\infty[$ qui contient 0, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans cet intervalle ; donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution.

▸ Comme $g(0{,}65) < 0$ et $g(0{,}66) > 0$, on a :
$$0{,}65 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}66.$$

**3** Si $x \in ]-\infty\,;\alpha[$, alors $g(x) < 0$ et si $x \in ]\alpha\,;+\infty[$, alors $g(x) > 0$.

**Partie B**

**1** ▸ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,
donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ par somme de limites.

▸ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par somme de limites.

▸ $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$,
donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ par somme de limites.

▸ $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$,
donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ par somme de limites.

**2** **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + 1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{g(x)}{3x^2}$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

**b.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\parallel$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty \parallel +\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3** **a.** $d(x) = f(x) - h(x) = \dfrac{1}{3x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = 0$.

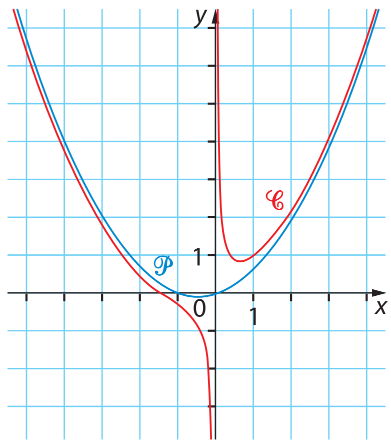
De même comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$.

On peut en déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ sont asymptotes au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

**b.** ▸ Si $x < 0$, alors $d(x) < 0$ ; donc la courbe $\mathscr{C}$ est sous la courbe $\mathscr{P}$.

▸ Si $x > 0$, alors $d(x) > 0$ ; donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{P}$.

**4**



**101** **Partie A**

**1** L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

**2** La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ et la droite $\mathscr{D}_0$ d'équation $x=1$ comme asymptote verticale.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en $A\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$.

**3** **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)^2}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, donc $a=1$.

**b.** ▸ $f(0)=0$, donc $1-b+c=0$, soit $-b+c=-1$.

▸ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}$, donc $1+\frac{b}{-\frac{3}{2}}+\frac{c}{\frac{9}{4}}=-\frac{1}{3}$,

soit : $$-\frac{2}{3}b+\frac{4}{9}c=-\frac{4}{3}.$$

▸ Après résolution du système, $a=4$ et $b=3$.

**Partie B**

**1** $f'(x)=\dfrac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$ qui est du signe de $-2(2x+1)(x-1)$, ce qui justifie le tableau des variations donné.

**2** ▸ $f'(0)=2$ et $f(0)=0$, donc la tangente $\Delta$ à $\mathscr{C}$ à l'origine a pour équation $y=2x$.

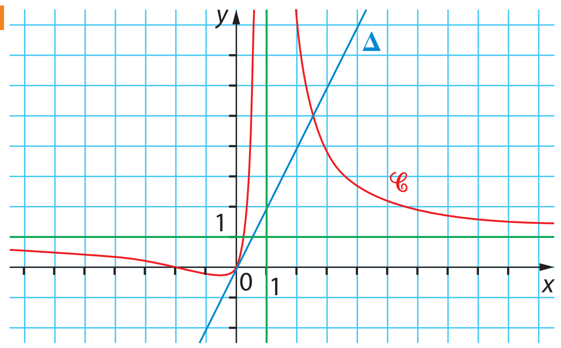
▸ On a $d(x)=f(x)-2x=-\dfrac{(2x-5)x^2}{(x-1)^2}$.

– si $x<\frac{5}{2}$ et $x\neq 1$, alors $d(x)\geqslant 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$ ;

– si $x>\frac{5}{2}$ alors $d(x)<0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\Delta$ ;

– si $x=\frac{5}{2}$ alors $d(x)=0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite $\Delta$.

**3**




**102** **1** Pour tout entier $n\geqslant 2$, $(f_n)'(x)=3x^2-2n<0$, car $0\leqslant x\leqslant 1$. La fonction $f_n$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ et l'ensemble des images est $[2-2n;1]$, qui contient 0.
Donc l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $\alpha_n$ dans $[0;1]$.

**2** Par balayage :
$$0{,}254<\alpha_2<0{,}255 \quad\text{et}\quad 0{,}167<\alpha_3<0{,}168.$$

**3** On a $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1-n^3}{n^3}$. Donc pour tout entier $n\geqslant 2$,
$$f\left(\frac{1}{n}\right)<0.$$

Comme la fonction $f$ est décroissante sur $[0;1]$, et s'annule en $\alpha_n$, on a $\alpha_n\leqslant\frac{1}{n}$.

**4** D'après les questions précédentes, $0\leqslant\alpha_n\leqslant\frac{1}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(\alpha_n)$ converge vers 0.

## Exercices d'entraînement

**103** **1** Faux, car $f(0)=-2$.

**2** Faux, car $-2$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3** Vrai.

**4** Faux, car la fonction $f$ est décroissante sur $[4;9]$ par exemple.

**5** Faux, car les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ sont infinies.

**6** Faux, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

**104** **1** **c.** **2** **c.** **3** **c.**

**105** **Partie A**

**1** $P'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, on a le tableau des variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $P(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** ▸ Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, le maximum de $P$ est $-1$. Donc l'équation $P(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;1]$.

▸ Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction $P$ est strictement croissante et continue, d'intervalle-image $[-2;+\infty[$ contenant 0 . Alors l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution sur $[1;+\infty[$

▸ *Conclusion* : l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $P(1{,}6)=-0{,}488$ (négatif) et $P(1{,}7)=0{,}156$ (positif) , on a : $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

**3** D'après le tableau de variations de $P$, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | − | 0 | + | |

**Partie B**

**1** Pour tout réel $x>1$ :
$$f'(x)=\frac{-(1+x^3)-(1-x)(3x^2)}{(1+x^3)^2}=\frac{P(x)}{(1+x^3)^2}.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $P(x)$. D'où :

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

**2** Comme pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - 1}{\dfrac{1}{x} + x^2}$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1 - x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1 + x^3) = 0^+$,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty.$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$, et une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

**3** ▸ $\mathscr{D}_1 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Comme $f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$ et $f(0) = \dfrac{1}{1} = 1$, une équation de $\mathscr{D}_1$ est $y = -x + 1$.

▸ Pour tout réel $x > -1$, on a :

$f(x) - (-x + 1) = \dfrac{(x-1)x^3}{x^3 + 1}$, qui est négatif sur $]0\,;1[$, positif sur $]-1\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$, et nul en 0 et en 1. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\mathscr{D}_1$ sur $]0\,;1[$, et au-dessus de la droite $\mathscr{D}_1$ sur $]-1\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

**4** **a.** $\mathscr{D}_2 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Comme $f'(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 0$, une équation de $\mathscr{D}_1$ est $y = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$.

**b.** Pour tout réel $x > -1$, on a :

$$f(x) - \frac{1}{2}(1 - x) = (1 - x)\left(\frac{1}{1 + x^3} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{(1 - x)(1 - x^3)}{2(1 + x^3)}.$$

Or $(1 - x)(x^2 + x + 1) = 1 - x^3$.

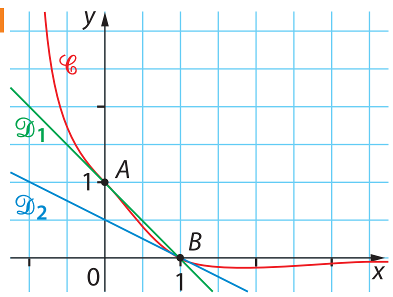
Donc $f(x) - \dfrac{1}{2}(1 - x) = \dfrac{(1 - x)^2(x^2 + x + 1)}{2(1 + x^3)}$.

**c.** Pour $x^2 + x + 1$, on a $\Delta = -3$ négatif.
Donc pour tout réel $x$, $x^2 + x + 1 > 0$.
On en déduit que pour tout réel $x > -1$,

$$f(x) - \frac{1}{2}(1 - x) \geqslant 0.$$

Ainsi la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}_2$ sur $]-1\,;+\infty[$.

**5**




**106** **Partie A**

**1** $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1)$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, on a le tableau de variations ci-après :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-7$ | ↘ | $-9$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** ▸ Sur l'intervalle $]-\infty\,;1/2]$, le maximum de $g$ est $-7$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;1/2]$.

▸ Sur l'intervalle $[1/2\,;+\infty[$, la fonction $g$ est strictement croissante et continue, d'intervalle-image $[-9\,;+\infty[$ contenant 0. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1/2\,;+\infty[$.

▸ *Conclusion* : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $g(1{,}45) \approx -0{,}155$ (négatif) et $g(1{,}46) \approx 0{,}068$ (positif), on a :

$$1{,}45 < \alpha < 1{,}46.$$

**3** D'après le tableau de variations de $g$, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Partie B**

**1** **a.** Comme pour $x \neq 0$, $f(x) = x\dfrac{1 + \dfrac{1}{x^3}}{4 - \dfrac{1}{x^2}}$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty.$$

**b.** Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1/2 \\ x > 1/2}} (4x^2 - 1) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1/2 \\ x > 1/2}} (1 + x^3) = \dfrac{9}{8}$,

on a : $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty.$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

**2** **a.** Sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{x(4x^3 - 3x - 8)}{(4x^2 - 1)^2} = \frac{x\,g(x)}{(4x^2 - 1)^2},$$

donc du signe de $g(x)$.

**b.** On a le tableau des variations de $f$ suivant :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $m$ | ↗ | $+\infty$ |

**c.** Pour démontrer que $\dfrac{\alpha^3 + 1}{4\alpha^2 - 1} = \dfrac{3\alpha}{8}$, on calcule :

$$8(\alpha^3 + 1) - 3\alpha(4\alpha^2 - 1) = 8\alpha^3 + 8 - 12\alpha^3 + 3\alpha$$
$$= -4\alpha^3 + 3\alpha + 8.$$

Or par définition de $\alpha$, $g(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha - 8 = 0$.
Donc $8(\alpha^3 + 1) - 3\alpha(4\alpha^2 - 1) = 0$.
On en déduit que $8(\alpha^3 + 1) = 3\alpha(4\alpha^2 - 1)$, soit :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 1}{4\alpha^2 - 1} = \frac{3\alpha}{8}.$$

## Partie C

**1 a.** Il semble que la courbe $\mathscr{C}$ soit au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

**b.** Pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, il semble que la distance $MN$, lorsque $x$ tend vers $+\infty$, tende vers 0.

**2** On pose $d(x) = f(x) - \frac{x}{4} = \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$.

▶ Pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, $d(x) < 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

▶ $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{4\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)} \times \frac{1}{x}\right) = 0$.

Donc les deux courbes sont asymptotes en $+\infty$.

**107** **1** Pour $x$ différent de 2 et de 0, on a :

$$f(x) = \frac{-2x\left(1-\frac{7}{2x}+\frac{4}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}}.$$

▶ Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1-\frac{7}{2x}+\frac{4}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$.

▶ On a de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

**2** ▶ $\lim\limits_{x \to 2}(-2x^2+7x-8) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ x<2}}(x-2) = 0^-$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$.

▶ De même, $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $x = 2$.

**3** Pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$,

$f'(x) = \frac{-2x^2+8x-6}{(x-2)^2}$ qui est du signe de

$-2x^2+8x-6$, qui admet deux racines 1 et 3, d'où le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ |

**4 a.** Pour tout réel $x \neq 2$, on a :

$$f(x)-(-2x+3) = \frac{-2x^2+7x-8}{x-2} - (-2x+3) = \frac{-2}{x-2}.$$

**b.** ▶ Pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\,;2[$, $\frac{-2}{x-2} > 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$.

▶ Pour tout réel $x$ appartenant à $]2\,;+\infty[$, $\frac{-2}{x-2} < 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\Delta$.

**c.** Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x-2} = 0$,

$$\lim_{x \to \infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right] = 0.$$

La courbe $\mathscr{C}$ est asymptote à la droite $\Delta$ en $+\infty$.

**108** **1** Pour tout réel $x \neq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{-2x^3-3x^2-1}{(x^3-1)^2} = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}.$$

En posant $P(x) = -2x^3-3x^2-1$.

**2 a.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = -6x^2-6x = -6x(x+1)$, qui s'annule en 0 et $-1$.
D'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $P(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

**b.** ▶ $P$ admet un maximum égal à $-1$ sur $]-1\,;+\infty[$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.
▶ Sur $]-\infty\,;-1[$, $P$ est continue et strictement décroissante à images dans $]-2\,;+\infty[$ qui contient 0 ; donc l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]-\infty\,;-1[$.
▶ *Conclusion* : L'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
▶ $-1{,}68 < \alpha < -1{,}67$.

**c.** D'après le tableau de variations de $P$, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**3** $f'(x)$ est du signe de $P(x)$, d'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ |

**4 a.** La droite $T$ a pour équation $y = -x-1$.

**b.** Soit $d(x) = f(x)-(-x-1) = \frac{x^3(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

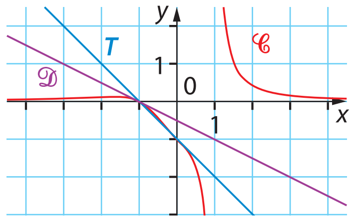
$d(x)$ est du signe de $x(x+1)(x-1)$.
▶ Pour $x \in\, ]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;1[$, $d(x) < 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite $T$.
▶ Pour $x \in\, ]-1\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $d(x) > 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $T$.

**5** La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}(x+1)$.
On pose :

$$k(x) = f(x)+\frac{1}{2}(x+1) = \frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{2(x-1)(x^2+x+1)}.$$

$k(x)$ est du signe $(x-1)$, donc :
- si $x<1$, alors $k(x)<0$ et la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la courbe $\mathscr{D}$ ;
- si $x>1$, alors $k(x)>0$ et la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{D}$.

**6**




**109** **1** Pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(-x) = -x\sqrt{1+\frac{1}{(-x)^2}} = -f(x).$$

Donc la fonction $f$ est impaire et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'origine $O$ comme centre de symétrie.

**2** Pour tout réel $x>0$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, donc :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

**3** Pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, donc la fonction $g$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

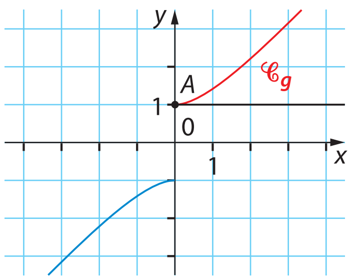
**4** Pour tout réel $x>0$,

$$\frac{g(x)-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1},$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x} = 0$.

La courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage du point $A(0\,;1)$ est très proche de la droite d'équation $y=1$.

**5**




**110** **1** $f(x) = (x-1)^2 + (x^2-0)^2$.

Donc $f(x) = x^4 + x^2 - 2x + 1$.

**2 a.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 4x^3 + 2x - 2$.
- Pour tout réel $x$, $f''(x) = 12x^2 + 2 > 0$.

**b.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x) - \infty$.
- La fonction $f'$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'intervalle-image $\mathbb{R}$ qui contient 0. Donc l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
- $f'(0) = -2$ et $f'(1) = 4$, donc $0<\alpha<1$.

**c.**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**3** La distance est minimum pour $\alpha$.

**4 a.** En utilisant le tableau ci-dessus, les réels cherchés $a$ et $b$ vérifient :

$$f'(a)<0 \text{ et } f'(b)>0, \text{ et } b-a \leqslant e.$$

**b.** L'algorithme complété est ci-dessous :

**ALGO**

Variables :
 $e, a, b, m$ : réels ;
Début :
 Entrer$(e)$ ;
 $a \leftarrow 0$ ; $b \leftarrow 1$ ;
 TantQue $b-a>e$ Faire
  $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
  Si $f'(m)<0$ Alors $a \leftarrow m$ ;
   Sinon $b \leftarrow m$ ;
  FinSi ;
 FinTantQue ;
 Afficher$(a\,;b)$ ;
Fin.

**c.** On obtient :

| **e** | ***a*** | ***b*** | ***m*** | ***f′(m)*** |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 1 | | |
| Entrée dans la boucle « Tant Que » | | | | |
| | 0,5 | 1 | 0,5 | − 0,5 |
| | 0,5 | 0,75 | 0,75 | 1,1875 |
| | 0,5 | 0,625 | 0,625 | ≈ 0,23 |
| | 0,5625 | 0,625 | 0,5625 | ≈ − 0,16 |
| | 0,5625 | 0,593 75 | 0,593 75 | ≈ 0,02 |
| | 0,578 125 | 0,593 75 | 0,578 125 | ≈ − 0,07 |
| | 0,585 937 5 | 0,593 75 | 0,585 937 5 | ≈ − 0,02 |
| Sortie de la boucle « TantQue ». Affichage de $a$ = 0,585 937 5 et $b$ = 0,593 75 | | | | |

## Problèmes

**111** **a.** Vrai, car la fonction $f$ est impaire.

**b.** Vrai, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|+1} = f(0) = 0$.

**c.** Vrai, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|+1} = 1$.

**d.** Vrai, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

**e.** Vrai, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x+1} = -1$.

La droite d'équation $y=-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

**112** **1** 
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3} = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^3} = -\infty$.

**2 a.** Par réduction au même dénominateur et identification, on obtient :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1}.$$

**b.** ▶ $\lim\limits_{x \to 0}\left(x - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

▶ $\lim\limits_{x \to -1}\left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{x+1} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

▶ $\lim\limits_{x \to 1}\left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}\right) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{2}{x-1} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

**3** Pour tout réel $x$ de D, $f'(x) > 0$, donc la fonction $f$ est croissante sur chaque intervalle de définition. D'où le tableau des variations :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ | |

**4 a.** $d(x) = f(x) - x = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$.

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = 0$.

**b.** Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$.

**113** **1** Le polynôme $x^2 + xa + a^2$ a un discriminant égal à $-3a^2$, négatif. Donc il ne s'annule pas si $a$ est non nul. Donc l'ensemble de définition de $f$ est :

$$D = ]-\infty\,; a[ \cup ]a\,; +\infty[.$$

**2** Pour tout réel $x$ de D, $f(x) = \frac{(1-a^2)x^2 + ax + a^2}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}$

▶ Si $a = 0$, alors $f(x) = \frac{1}{x}$ qui n'admet pas de limite finie en 0.

▶ Si $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a}(x-a)(x^2+ax+a^2) = 0$,

et : $\lim\limits_{x \to a}\left((1-a^2)x^2 + ax + a^2\right) = a^2(3-a^2)$.

Il est donc nécessaire que $a^2 = 3$, soit $a = -\sqrt{3}$ ou $a = \sqrt{3}$.

▶ Si $a = -\sqrt{3}$, alors $f(x) = \frac{-2x+\sqrt{3}}{x^2 - \sqrt{3}\,x + 3}$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

▶ Si $a = \sqrt{3}$, alors $f(x) = \frac{-2x-\sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}\,x + 3}$.

Donc $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**114** **1** Pour que la courbe $\mathscr{C}$ présente une asymptote verticale, il faut que la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $b$ soit infinie.

Donc comme $\lim\limits_{x \to b}(ax^2 - 9) = ab^2 - 9$, on doit avoir $ab^2 - 9 \neq 0$.

Cette condition nécessaire est suffisante.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale en $b$ pour les couples $(a\,; b)$ tels que $ab^2 - 9 \neq 0$.

**2** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax$. Cette limite doit être finie, donc on doit avoir $a = 0$, pour que la courbe $\mathscr{C}$ présente une asymptote horizontale en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Cette condition nécessaire est suffisante.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ pour les couples $(0\,; b)$.

**3 a.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$.

▶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

▶ $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 9) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}}(x-2) = 0^-$, donc :

$$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty.$$

▶ $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 9) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}}(x-2) = 0^+$, donc :

$$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty.$$

▶ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

**b.** Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 9}{(x-2)^2} > 0$.

Pour le numérateur, $\Delta = -20$.

D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**c.** On pose $d(x) = f(x) - (x+2) = -\frac{5}{x-2}$.

▶ Si $x < 2$ alors $d(x) > 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$.

▶ Si $x > 2$ alors $d(x) < 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\Delta$.

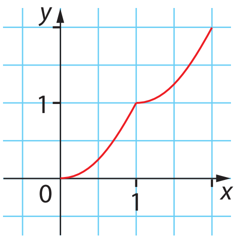
**115** **1** ▶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

▶ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 8\sqrt{x} = +\infty$.

**2** $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$.
Donc la fonction $f$ est continue en 1.
- $f(4) = 16$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} 8\sqrt{x} = 16$.

Donc la fonction $f$ est continue en 4.
- Comme ailleurs elle est composée de fonctions usuelles, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**116** **1** La fonction $f$ est définie sur $[0\,;2]$ par :
- si $0 \leqslant x < 1$, $f(x) = 0 + (x-0)^2 = x^2$ ;
- si $1 \leqslant x < 2$, $f(x) = 1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$ ;
- si $x = 2$, $f(2) = 2 + (2-2)^2 = 2$.




**2** - $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 = f(1)$.

La fonction $f$ est continue en 1.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x + 2) = 2 = f(2)$.

La fonction $f$ est continue en 2.
La fonction $f$ est donc continue sur $[0\,;2]$.

**117** **1** Au vu du graphique, l'équation (E) semble admettre une solution dans $]0\,;+\infty[$.

**2** **a.** Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**b.** La fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, d'intervalle-image $\mathbb{R}$ qui contient 0. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$. Comme cette équation est équivalente à (E), l'équation (E) admet une unique solution.
Par balayage, $2{,}41 < \alpha < 2{,}42$.

**3** (E) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ qui est une équation du second degré de discriminant 8 et qui admet deux solutions $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$. Donc $\alpha = 1 + \sqrt{2}$.

**118** **1** - Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 3x^2 < 0$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$.

La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, d'intervalle-image $\mathbb{R}$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.

**2** On a $0{,}724 < \alpha < 0{,}725$.

**119** **1** **a.** Tout polynôme de degré 3 est continu et d'intervalle-image $\mathbb{R}$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

**b.** On raisonne de la même façon pour un polynôme de degré $n$ impair, car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

**2** Tout polynôme de degré $n$ pair ne s'annule pas obligatoirement au moins une fois sur $\mathbb{R}$ : en effet la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

**3** **a.** On pose $f(x) = x^3 - 6x + 3$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

et $f(-3) = -6$, $f(0) = 3$ et $f(2) = -1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions, et donc exactement trois solutions : une dans $[-3\,;0]$, une dans $[0\,;2]$, et une dans $[2\,;+\infty[$.

**b.** L'équation $x^3 + 1 = 0$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$, car la fonction $x \longmapsto x^3 + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**120** **a.** Le dessin suggère que :
- pour tout réel $x > 0$, $-x \leqslant f(x) \leqslant x$ ;
- pour tout réel $x < 0$, $x \leqslant f(x) \leqslant -x$.

**b.** Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

**121** **Partie A**

**1** Un point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si :
$x \geqslant 0\,; y \geqslant 0$ et $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, soit $y - 1 = -\sqrt{1 - x^2}$,
donc en élevant au carré $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

**2** On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est un quart de cercle de centre $A(0\,;1)$ et de rayon 1.

**3** L'aire $\mathscr{A}$ est égale à l'aire du carré de côté 1 cm moins l'aire du quart de cercle défini ci-dessus soit :
$$\mathscr{A} = 1 - \frac{\pi}{4}\,\text{cm}^2.$$

**Partie B**

**1** Pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$, l'aire du rectangle $OHMP$ est $x \times f(x)$. Donc on doit avoir :
$$x\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$
Donc :
$$x\sqrt{1 - x^2} = x - 1 + \frac{\pi}{4}.$$
Et comme les deux membres sont positifs sur $[0\,;1]$, en élevant au carré, on obtient l'équation :
$x^2(1 - x^2) = \left(x - 1 + \dfrac{\pi}{4}\right)^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

**2** **a.** On a $g'(x) = -4x^3 + 2 - \dfrac{\pi}{2}$ et $g''(x) = -12x^2 < 0$.
- $g'(0) = 2 - \dfrac{\pi}{2} > 0$ et $g'(1) = -2 - \dfrac{\pi}{2} < 0$ ;
- $g'$ est continue et strictement décroissante sur $[0\,;1]$, d'intervalle-image $\left[-2 - \dfrac{\pi}{2}\,;2 - \dfrac{\pi}{2}\right]$ qui contient 0.

Donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution $x_0$ sur $[0\,;1]$.
- $0{,}4 < x_0 < 0{,}5$.

**b.**

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $a$ | $\nearrow$ | $g(x_0)$ | $\searrow$ | $b$ |

Avec $a = \dfrac{(\pi - 4)^2}{16} \approx 0{,}05$,

$g(x_0) \approx 0{,}2$ et $b = \dfrac{\pi^2}{16} - \pi + 2 \approx -0{,}5$.

**c.** Sur $[0\,;x_0]$, $g(x) > 0$.

Sur $[x_0\,;1]$ la fonction $g$ est strictement décroissante et continue, d'intervalle-image $[b\,;g(x_0)]$ qui contient 0. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0\,;1]$.

On a $0{,}787 < \alpha < 0{,}788$.

**3** $g(x) = 0$ équivaut à $x^2(1 - x^2) = \left(x - 1 + \dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

Donc l'aire du rectangle $OHMP$ est égale à l'aire $\mathcal{A}$ si, et seulement si, $x = \alpha$.

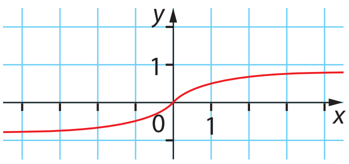
**122** **1 a.** Sur $[0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$.

Donc la fonction réciproque de $f$ est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $y \mapsto \sqrt{y}$.

**b.** La courbe de $f$ et de $g$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$, car :

$M(x\,;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Leftrightarrow M'(y\,;x) \in \mathcal{C}_g$.

**2 a.** La fonction $f$ est représentée graphiquement par la courbe ci-dessous :



La fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'intervalle-image $]-1;1[$. Donc pour tout réel $y \in ]-1;1[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

**b.** ▶ Si $y \in [0\,;1[$, alors $x \geqslant 0$. L'équation $\dfrac{x}{1 + |x|} = y$ équivaut à $\dfrac{x}{1 + x} = y$, soit $x = \dfrac{y}{1 - y}$.

▶ Si $y \in ]-1;0]$, alors $x \leqslant 0$. L'équation $\dfrac{x}{1 + |x|} = y$ équivaut à $\dfrac{x}{1 - x} = y$, soit $x = \dfrac{y}{1 + y}$.

▶ La fonction réciproque de la fonction $f$ est définie sur $]-1;1[$ par : $y \mapsto \dfrac{y}{1 - |y|}$.

**123** **Partie A**

**1** Si $x \in [0\,;1[$, alors $g(x) \geqslant 0$. Donc $f$ est bien définie sur $[0\,;1[$.

**2** Pour $x \in [0\,;1[$, $g'(x) = \dfrac{x^2(3 - 2x)}{(x - 1)^2} > 0$.

D'où le tableau des variations de $g$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3 a.** Sur $[0\,;1[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{1 - x}}}{x} = \frac{x\sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}}{x} = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{x}{1 - x}} = 0$.

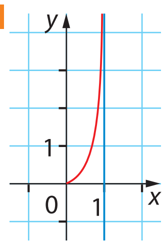
La fonction $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

**b.** La fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;1[$, car les fonctions $f$ et $g$ ont même sens de variation.

**4** $\displaystyle\lim_{x \to 1} g(x) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$.

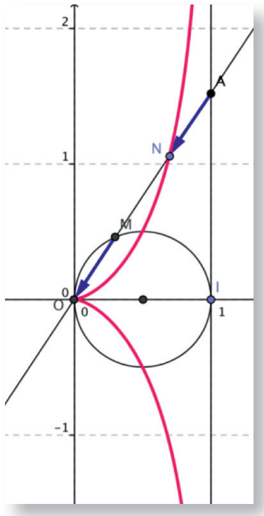
La courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.

**5**



**Partie B**

**1** Voir la figure ci dessous.




**2** Le cercle $\Gamma$ a pour centre le point de coordonnées $(0{,}5\,;0)$ et pour rayon 0,5. Donc son équation est :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \text{ soit } x^2 + y^2 - x = 0.$$

**3 a.** La droite $(OA)$ a pour équation $y = tx$.

**b.** ▶ Les coordonnées de $M$ vérifient les équations du cercle $\Gamma$ et de la droite $(OA)$.

Soit :

$$\begin{cases} y = tx \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t}{1 + t^2} \end{cases}, \text{ car } x \neq 0.$$

Donc $M\left(\dfrac{1}{1 + t^2}\,;\dfrac{t}{1 + t^2}\right)$.

On a $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MO}$, donc si $N(x_N, y_N)$ on a :

$$\begin{cases} x_N - 1 = -\dfrac{1}{1 + t^2} \\ y_N - t = -\dfrac{t}{1 + t^2} \end{cases}.$$

Donc $N\left(\dfrac{t^2}{1 + t^2}\,;\dfrac{t^3}{1 + t^2}\right)$.

**4** En reportant les coordonnées de $N$, on obtient que les coordonnées de $N$ vérifient l'équation :

$$x(x^2+y^2)-y^2=0.$$

**5** $M(x\,;y)$ appartient à la cissoïde de Dioclès si, et seulement si, $y^2=\dfrac{x^3}{1-x}$, soit $y=f(x)$ ou $y=-f(x)$. La courbe $\mathscr{C}$ est une partie de la cissoïde. L'autre partie est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

**124** **Partie A**

**1** ▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty.$

▶ Sur $[0\,;+\infty[$, $g'(x)=3x^2-1200=3(x^2-400)$.
D'où le tableau :

| $x$ | $0$ | | $20$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $g(x)$ | $-100$ | ↘ | $-16\,100$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** $g(40)=15\,900$. La fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $[20\,;40]$, d'intervalle-image $[-16\,100\,;15\,900]$ qui contient 0. Donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[20\,;40]$.
On a $34<\alpha<35$ à l'aide d'un balayage.

**3**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Partie B**

**1** ▶ $\lim\limits_{x\to0}(x+50)=50$, $\lim\limits_{x\to0}(1200x+50)=0$

et $\lim\limits_{x\to0}x^2=0^+$.

Donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$ (opérations sur les limites).

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+50)=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1200x+50}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1200}{x}=0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (opérations sur les limites).

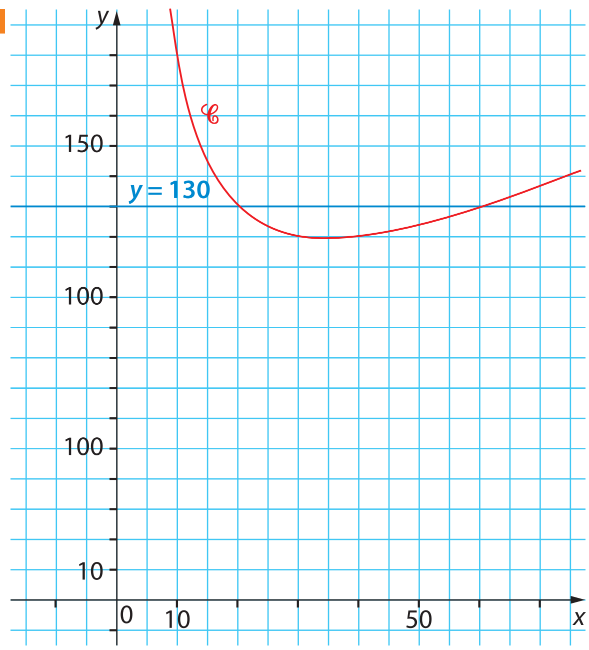
**2** Pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=1-\frac{1200x+100}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}.$$

**3** $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, d'où le tableau des variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4**




**5** Graphiquement l'équation $f(x)=130$ admet 20 et 60 comme solutions.

**Partie C**

**1** $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}=x+50+\dfrac{1200+50}{x^2}=f(x).$

D'après la partie **B**, pour avoir un coût moyen minimum, il faut produire entre 3 400 et 3 500 objets.

**2** Le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable est obtenu en résolvant l'inéquation $C_M(x)\leqslant130$, soit une production comprise entre 2 000 et 6 000 objets.

**125** **1** Pour tout entier $n\geqslant2$, pour tout $x\in[0\,;1]$ :

$$f_n(x)-f_{n+1}(x)=x^n(1-x)+x\geqslant0.$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$ sur $[0\,;1]$.

**2** Pour tout entier $n\geqslant2$, pour tout $x\in[0\,;1]$ :
$(f_n)'(x)=n(x^{n-1}-1)\leqslant0$. La fonction $f_n$ est donc décroissante et continue sur $[0\,;1]$, d'intervalle-image $[2-n\,;1]$ qui contient 0. Donc l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $a_n$ dans $[0\,;1]$.

**3** D'après la question **1**, $f_n(a_{n+1})-f_{n+1}(a_{n+1})\geqslant0$. Donc $f_n(a_{n+1})\geqslant0$. Or la fonction $f_n$ est décroissante sur $[0\,;1]$ et $f_n(a_n)=0$.
On en déduit que $a_{n+1}<a_n$.
La suite de terme général $a_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

**126** **1** **a.** Pour $n\geqslant1$, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$,

$(f_n)'(x)=-\dfrac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}\leqslant0$. La fonction $f_n$ est décoissante sur $[0\,;+\infty[$.

**b.** Pour tout $n\geqslant1$, $f_n(0)=1$ et $f_n(1)=\dfrac{1}{2}$.

Les courbes $\mathscr{C}_n$ passent toutes par $A(0\,;1)$ et $B\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

**c.** Soient deux entiers $n$ et $m$ non nuls avec $n<m$.

$$f_n(x)-f_m(x)=\frac{x^n(x^{m-n}-1)}{(1+x^n)(1+x^m)}.$$

▸ si $x \in [0\,;1]$, $(x^{m-n}-1) \leqslant 0$ alors $f_n(x)-f_m(x) \leqslant 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}_n$ est sous la courbe $\mathscr{C}_m$ sur $[0\,;1]$ ;

▸ si $x \in [1\,;+\infty[$, $(x^{m-n}-1) \geqslant 0$, alors : $f_n(x)-f_m(x) \geqslant 0$, donc la courbe $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_m$ sur $[1\,;+\infty[$.

**2 a.** On conjecture que :

▸ si $x \in [0\,;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ ;

▸ si $x \in ]1\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ ;

▸ si $x = 1$, $f_n(1)$ est une suite constante égale à 0,5.

**b.** ▸ Si $x \in [0\,;1[$, alors la suite géométrique de raison $x$ converge vers 0. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ (opérations sur les limites) ;

▸ si $x \in ]1\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ ;

▸ si $x = 1$, $f_n(1)$ est une suite constante égale à 0,5.

**3 a.** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,;1[ \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in ]1\,;+\infty[ \end{cases}$.

**b.** La fonction $f$ n'est pas continue en 1.

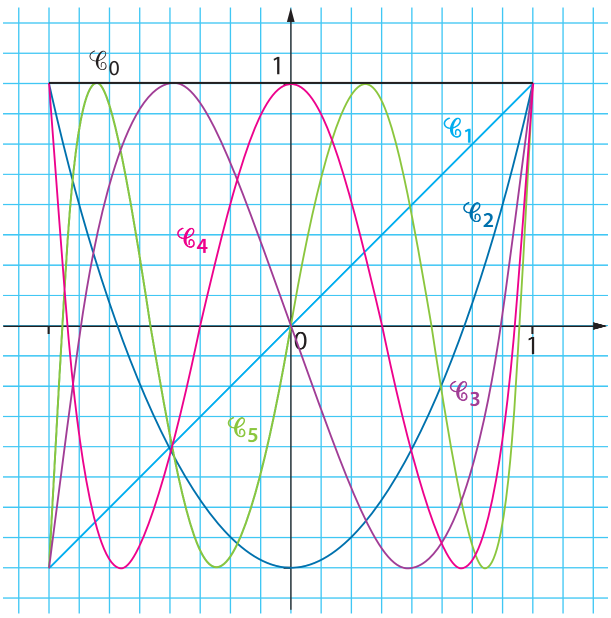
**127** **1 a.** ▸ $f_2(x) = 2x\,f_1(x) - f_0(x) = 2x^2 - 1$ ;

▸ $f_3(x) = 2x\,f_2(x) - f_1(x) = 4x^3 - 3x$ ;

▸ $f_4(x) = 2x\,f_3(x) - f_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ;

**b.** $f_5(x) = 2x\,f_4(x) - f_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

**2**




Il semble que l'équation $f_n(x) = 0$ admette exactement $n$ solutions dans $[-1\,;1]$.

**3 a.** Démontrons pour tout entier $n$ la propriété $P_n$ : « $f_n(\cos x) = \cos(nx)$ ».

**Initialisation** : $P_0$ : « $f_0(\cos x) = \cos 0 = 1$ » : vrai.

**Hérédité :** Démontrons que si $P_n$ est vraie alors $P_{n+1}$ : « $f_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x$ » est aussi vraie.

On a $f_{n+1}(\cos x) = 2\cos x\, f_n(\cos x) - f_{n-1}(\cos x)$ en tenant compte de l'hypothèse de récurrence :

$f_{n+1}(\cos x) = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x$.

Sachant que $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on a :

$f_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x - \cos(n-1)x$.

Soit $f_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x$

*Conclusion* : pour tout entier $n$, $f_n(\cos x) = \cos(nx)$.

**b.** Comme $x \in [-1\,;1]$, on pose $x = \cos t$

$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \cos t$ et $f_n(\cos t) = 0$.

Or $f_n(\cos t) = 0 \Leftrightarrow \cos nt = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$ où $k$ est un entier relatif quelconque.

Donc $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$, où $k$ est un entier relatif.

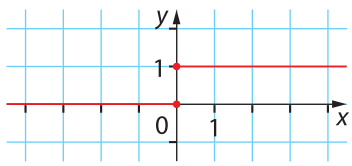
Les solutions sont les $n$ réels $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$, où $k$ est un entier variant de 0 à $n-1$.

## Prendre des initiatives

**128** Les fonctions $f$ doivent vérifier : pour tout réel $x$, $f(x) = (f(x))^2$, soit $f(x)(1-f(x)) = 0$.

Le problème a deux solutions : les fonctions constantes égales à 0 et à 1, car elles doivent être continues sur $\mathbb{R}$.

Sinon, on peut en construire d'autres, par exemple :




**129** On pose $g(x) = f(x) - x$ sur $[0\,;1]$.

L'équation $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

La fonction $g$ est continue sur $[0\,;1]$ avec $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, car $f$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;1]$. Donc $g(1) \leqslant 0 \leqslant g(0)$.

L'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$. Il en est donc de même pour l'équation $f(x) = x$.

**130** ▸ Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ; donc :

$$x - 1 \leqslant x - \sin x \leqslant x + 1.$$

▸ Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc :

$$2x - 1 \leqslant 2x + \cos x \leqslant 2x + 1.$$

Comme $x$ tend vers $+\infty$, en raisonnant sur $]1\,;+\infty[$, les réels ci-dessus peuvent être considérés comme strictement positifs. Donc :

$$\frac{1}{2x+1} \leqslant \frac{1}{2x+\cos x} \leqslant \frac{1}{2x-1}.$$

Et en multipliant membres à membres ces réels strictement positifs :

$$\frac{x-1}{2x+1} \leqslant \frac{x-\sin x}{2x+\cos x} \leqslant \frac{x+1}{2x-1}.$$

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ ;

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-1}\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

## Pistes pour l'accompagnement personnalisé

### Revoir les outils de base

**131** **a.** La suite $u$ diverge vers $+\infty$.
**b.** La suite $u$ converge vers 3.
**c.** La suite $u$ n'a pas de limite.
**d.** La suite $u$ converge vers 0 (suite géométrique de raison 0,5 inférieure à 1 en valeur absolue).

**132** **1** **b.** **2** **c.** **3** **c.**

### Les savoir-faire du chapitre

**133** **1** Les solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{1+x^2} < 10^{-4}$ sont les réels de l'ensemble :

$$\left]-\infty\,;-\sqrt{3\times10^4-1}\right[\cup\left]\sqrt{3\times10^4-1}\,;+\infty\right[.$$

**2** **a.** $f(x)+2=\dfrac{3}{1+x^2}$.

D'après la question **1**, pour tout réel $x>\sqrt{3\times10^4-1}$, on a :

$$0\leqslant f(x)+2\leqslant 10^{-4}.$$

**b.** D'une façon générale, pour tout entier naturel $n$, il existe un réel $a$ tel que $x>a$, on a :

$$0\leqslant f(x)+2\leqslant 10^{-n}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

**c.** La droite d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$.

**134** **1** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$.

**2** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=0$.

**3** ▶ $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x^2-4)=0^-$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=-\infty$.

▶ $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}(x^2-4)=0^+$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=+\infty$.

**135** **1** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$.

**2** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$.

**3** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\pi}{x}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to0}\sin t=0$.

**136** **1** En multipliant $f(x)$ et en divisant $f(x)$ par $\sqrt{x^2+x+1}+x$, on obtient que pour tout réel $x$,

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

**2** En mettant « $x$ » en facteur au numérateur et au dénominateur, puis en simplifiant on obtient pour tout réel $x>0$ :

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$ (opération sur les limites).

**137** **a.** Vrai, car l'ensemble des images est $\mathbb{R}$.
**b.** Vrai, car sur $]-\infty\,;1[$, $f(x)>0$ et sur $]a\,;+\infty[$, $f(x)>0$ (avec $f(a)=0$) et l'intervalle $]1;a[$ a pour ensemble-image $]-\infty\,;0[$.
**c.** Vrai. Il s'agit des droites d'équations respectives $y=0$ $(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0)$ et $y=1$ $(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1)$.
**d.** Vrai.
**e.** Faux. Pour tout $x\in]3\,;+\infty[$, $f(x)\in]1;4[$.

### Mathématiques au fil du temps

**138** **1** On a :
$y^2-x^2=16 \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+16}$ ou $y=-\sqrt{x^2+16}$.
Donc $\mathscr{H}$ est la réunion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ et de la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de $-f$.

**2** ▶ La fonction $x\mapsto x^2+16$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc la fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, car la fonction racine carrée est croissante.
▶ La fonction $x\mapsto x^2+16$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, car la fonction racine carrée est croissante.
▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+16)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
▶ De même $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

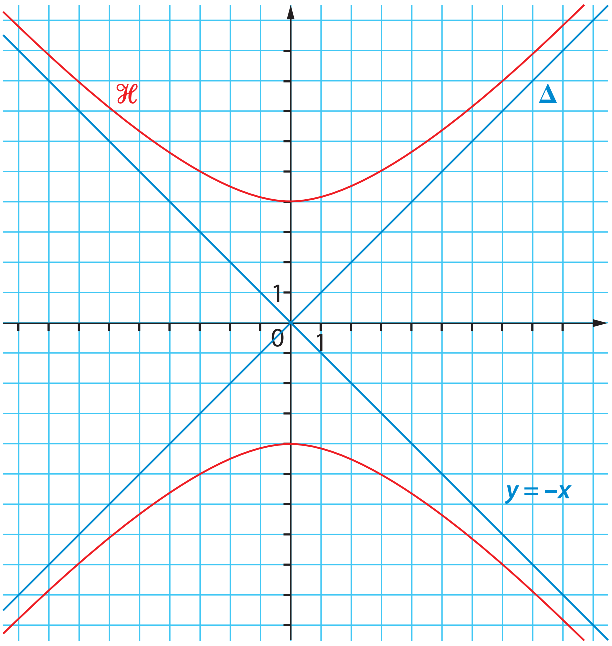
**3** On a $f(x)-x=\dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}+x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+16}+x)=+\infty$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0,$$

la droite $\Delta$ d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

**4**




## En lien avec les sciences

**139** **1** Si on appelle $d$ la distance entre les villes A et B, le temps, en heures, mis pour aller de A à B est $\frac{d}{80}$. Celui pour aller de B vers A est $\frac{d}{x}$. Le temps mis pour le parcours total est $\frac{2d}{v(x)}$.

Donc tout réel $x > 0$ : $\frac{d}{80} + \frac{d}{x} = \frac{2d}{v(x)}$,

soit $\frac{1}{80} + \frac{1}{x} = \frac{2}{v(x)}$. Donc $v(x) = \frac{160x}{x+80}$.

**2** ▸ $\lim\limits_{x \to 0} v(x) = 0$.

▸ $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{160x}{x} = 160$.

**3** Pour tout $x > 0$, $v'(x) = \frac{12\,800}{(x+80)^2} > 0$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $v'(x)$ | $+$ | |
| $v(x)$ | $0$ ↗ | $160$ |

**140** **1** La fonction $u$ est définie sur $]f\,;+\infty[$ par :

$$u(p) = \frac{pf}{p-f}\ ;\ u'(p) = -\frac{f^2}{(p-f)^2} < 0.$$

| $p$ | $f$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $u'(p)$ | $-$ | |
| $u(p)$ | $+\infty$ ↘ | $f$ |

**2** $\lim\limits_{p \to +\infty} u(p) = f$ et $\lim\limits_{\substack{p \to f \\ p > f}} (p-f) = 0^+$,

donc $\lim\limits_{\substack{p \to f \\ p > f}} u(p) = +\infty$.

## Vers le supérieur

**141** **a.** Faux.
**b.** Vrai.
**c.** Faux.
**d.** Vrai.
**e.** Faux.

CHAPITRE 3

# Compléments sur les fonctions numériques

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Calculs de dérivées : compléments** | • Calculer les dérivées des fonctions : $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ ; $x \longmapsto (u(x))^n$, $n$ entier relatif non nul ; | À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue. |
| | • Calculer la dérivée d'une fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ où $f$ est une fonction dérivable, $a$ et $b$ deux nombres réels. | Les techniques de calcul sont à travailler mais ne doivent pas être un frein à la résolution de problèmes. On a recours, si besoin à un logiciel de calcul formel.<br><br>(AP) *Exemples de fonctions discontinues, ou à dérivées non continues.* |
| **Fonctions sinus et cosinus** | • Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus.<br><br>• Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité.<br><br>• Connaître les représentations graphiques de ces fonctions. | On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.<br><br>En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité.<br><br>On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$.<br><br>⇄ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique. |

### 2. Intentions des auteurs

On a regroupé dans un même chapitre ces deux paragraphes du programme qui, traités individuellement, n'auraient pas donnés assez de matière pour les activités de découverte et les travaux pratiques. Ils peuvent aisément être partagés en deux petits chapitres dans les progressions que les professeurs établiront, en traitant de préférence les fonctions trigonométriques avant les compléments sur la dérivation pour disposer des fonctions sin et cos dans l'utilisation des nouvelles formules de dérivation.

Du point de vue mathématique :
• on étudie les fonctions sinus et cosinus. La dérivabilité en zéro fait l'objet d'une activité de découverte et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ est traitée en exercice ;
• on introduit les notions de périodicité et de parité, sans trop insister comme le demandent les commentaires du programme ;
• on donne les formules de dérivation au programme exceptées celles concernant les fonctions exp et ln qui seront vues dans les chapitres 4 et 5.

Les exercices ont pour but d'assimiler les nouvelles formules (sans oublier de voir des cas de non dérivabilité) et de réinvestir les notions déjà vues concernant les fonctions (tangentes, limites, études de variations).

# Partir d'un bon pied

**Objectif**

*Réactiver les connaissances du cours de Première concernant la dérivation et la trigonométrie et revoir la notion de composée de deux fonctions rencontrées dans le chapitre 2.*

**A** **1** **c.** **2** **b.** **3** **b.** **4** **a.** **5** **c.**

**B** **1** Vrai ; $g(0) = f(3 \times 0 - 2) = f(-2)$.

**2** Faux ; $g(0) = f(-2) = (-2)^2 = 4$.

**3** Vrai ; voir calcul du **2**.

**4** Faux ; $g(x) = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

**5** Vrai ; voir calcul du **4**.

**6** Vrai ; voir calcul du **4**.

**7** Faux ; $g'(x) = 18x - 12$.

**8** Faux ; voir calcul du **7**.

**9** Vrai ; $6(3x - 2) = 18x - 12$.

**C** **1** **a.** Le point $A$ est associé aux réels $x + k \times 2\pi$ avec $k$ entier relatif.

**b.** Le point $B$ est associé au réel $-x$, $C$ au réel $x + \pi$, $D$ au réel $\pi - x$.

**c.** $\cos(-x) = \cos x$ ; $\cos(\pi + x) = -\cos x$ ;
$\cos(\pi - x) = -\cos x$ ; $\sin(-x) = -\sin x$ ;
$\sin(\pi + x) = -\sin x$ ; $\sin(\pi - x) = \sin x$.

**2** **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux.
**e.** Faux. **f.** Vrai. **g.** Faux. **h.** Vrai.

# Découvrir

## Activité 1 Variations des fonctions sinus et cosinus

**Objectif**

*Introduire les fonctions sinus et cosinus et utiliser le cercle trigonométrique pour visualiser leurs variations sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.*

**2** Quand $M$ varie de la position $K$ à la position $L$, $C$ varie de $-1$ à $0$ et $S$ de $0$ à $-1$.
On en déduit que sur l'intervalle $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction cosinus est croissante et la fonction sinus est décroissante.

**3** En faisant le même type d'observations sur les trois autres intervalles, on obtient les tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus sur $[-\pi\,;\pi]$ suivants :

| $x$ | $-\pi$ | | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ |

| $x$ | $-\pi$ | | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

## Activité 2 Dérivabilité de sinus et cosinus en zéro

**Objectif**

*Étudier la dérivabilité en zéro des fonctions sinus et cosinus.*

**1** **a.** On applique le théorème de Thalès :
$\dfrac{OC}{OI} = \dfrac{CM}{IT}$, $C$ étant le projeté orthogonal de $M$ sur $(OI)$.
Donc $IT = \dfrac{CM \times OI}{OC} = \dfrac{\sin x \times 1}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

**b.** Aire de $OIM \leqslant$ aire du secteur $OIM \leqslant$ aire de $OIT$

$\Leftrightarrow 0{,}5 \times 1 \times \sin x \leqslant \dfrac{x}{2} \times 1^2 \leqslant 0{,}5 \times 1 \times \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ;

en multipliant par 2, on obtient : $\sin x \leqslant x \leqslant \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
En divisant par $x > 0$ l'inéquation $\sin x \leqslant x$, on obtient :

$$\frac{\sin x}{x} \leqslant 1\,;$$

en multipliant par $\dfrac{\cos x}{x} \geqslant 0$ l'inéquation $x \leqslant \dfrac{\sin x}{\cos x}$,
on obtient : $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x}$.
Finalement, pour tout $x$ de $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$. **(1)**

**c.** $\dfrac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \dfrac{\sin h}{h}$ ; l'encadrement **(1)** et le théorème des gendarmes donnent : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.
Donc sinus est dérivable en zéro et $\sin'(0) = 1$.

**2** **a.** $\dfrac{\cos h - 1}{h} = \dfrac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \dfrac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$

$$= \frac{\sin h}{h} \times \frac{-\sin h}{\cos h + 1}.$$

$\dfrac{\cos(0+h) - \cos 0}{h} = \dfrac{\cos h - 1}{h}$ ; avec l'égalité précédente et le résultat de **1** **c.** on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 1 \times 0 = 0.$$

Donc, cosinus est dérivable en zéro et $\cos'(0) = 0$.

## Activité 3 Notion de parité pour les fonctions

**Objectif**

*Introduire la notion de parité par une approche graphique.*

**1** **a.** Le programme a conclu « F EST PAIRE » pour les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto 3$ et $x \longmapsto \cos x$.

**b.** Les quatre courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

**2** **a.** Le programme a conclu « F EST IMPAIRE » pour les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \sin x$.

**b.** Les trois courbes sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

## Activité 4 Vers la dérivée de $x \longmapsto f(ax + b)$

**Objectif**

*Conjecturer la formule de dérivation de $x \longmapsto f(ax + b)$.*

**Cas 1**

**1** $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

**2** $g(x) = 9x^2 - 30x + 25$ ; $g'(x) = 18x - 30$
($g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

**3** $f'(x) = 2x$ ;
$-3f'(-3x+5) = -3 \times 2(-3x+5) = 18x - 30$ :
on retrouve $g'(x)$.

**Cas 2**

**1** $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

**2** $g'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$ ($g$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ comme inverse de fonction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$).

**3** $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ ;
$2f'(2x+1) = 2 \times \frac{-1}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$ :
on retrouve $g'(x)$. Pour le cas général, on conjecture que : $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

## Activité 5 Utilisation de la quantité conjuguée

**Objectif**

*Utilisation de la quantité conjuguée pour étudier une limite indéterminée avec une expression comportant des racines carrées.*

**1** **a.** La calculatrice affiche 0.

**b.** $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h}$ ;
quand $h$ tend vers zéro, numérateur et dénominateur tendent vers zéro.

**c.** $\frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h} = \frac{h^2+1-1}{h(\sqrt{h^2+1}+1)} = \frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}$ ;
quand $h$ tend vers zéro, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2, donc le quotient tend vers 0 : $f'(0) = 0$.

**2** $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+2h+2}-\sqrt{2}}{h}$
$= \frac{h^2+2h+2-2}{h(\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2})} = \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2})}$
$= \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}}$ ;
quand $h$ tend vers zéro, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers $2\sqrt{2}$, donc le quotient tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$ : $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
La calculatrice affiche 0,707 qui est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

# Exercices d'application

## Savoir faire Étudier une fonction trigonométrique

**1** $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$, car, pour tout réel $x$, $\sin x \leqslant 1$ ; donc $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$, car, pour tout réel $x$, $\cos x \geqslant -1$ ; donc $g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**2** **1** $f(x) = \sin x$ ; $f'(x) = \cos x$.
Tangente en 0 : $y = x$.
**2** $f(x) = x + \cos x$ ; $f'(x) = 1 - \sin x$.
Tangente en 0 : $y = x + 1$.
**3** $f(x) = \sin x + \cos x$ ; $f'(x) = \cos x - \sin x$.
Tangente en $\frac{\pi}{2}$ : $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$.

**3** **1** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
**2** $f'(x) = -\sin x - \cos x$.

| $x$ | 0 | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{7\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | $-\sqrt{2}$ | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | 1 |

**4** $h'(x) = \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$
$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

## Savoir faire Utiliser les nouvelles formules de dérivation

**5** **a.** $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.
**b.** $f'(x) = 2\pi \times (-\sin(2\pi x)) = -2\pi \sin(2\pi x)$.

**6** $f'(x) = 2 \times (-\sin x) \times \cos x = -2\sin x \cos x$
et $g'(x) = -2\cos x \sin x$.

**7** **1** La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; $f'(x) = -3\sin x \cos^2 x$.
**2** $5 - x^2$ est strictement positif sur I, donc $f$ est dérivable sur I ; $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$.
**3** La fonction $x \longmapsto 0{,}5x^2 - 7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; $f'(x) = 4x(0{,}5x^2-7)^3$.
**4** La fonction $x \longmapsto 2x+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur I, donc $f$ est dérivable sur I ; $f'(x) = \frac{-12}{(2x+1)^4}$.

**8** $h'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$, donc $h'(0) = 0{,}5$.
On obtient : $y = 0{,}5x + 1$.

**9** **1** $f'(x) = 4(2x+1)(x^2+x-1)^3$.
**2** $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{2+\cos x}}$.

**10** $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ : $f'(x) = 3(2x-1)(x^2-x+1)^2$.
On étudie le signe de la dérivée : $(x^2-x+1)^2$ est positif, car c'est un carré.

La dérivée est donc du signe de $(2x-1)$, c'est-à-dire négative pour $x \leqslant 0{,}5$ et positive pour $x \geqslant 0{,}5$.
La fonction $f$ est donc décroissante sur $]-\infty\,;0{,}5]$ et croissante sur $[0{,}5\,;+\infty[$ ; elle admet bien un minimum en $x=0{,}5$ qui vaut $f(0{,}5)=0{,}75^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$.

## Travaux pratiques

### 11 Le navigateur distrait

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{5}=\frac{5x-3\sqrt{x^2+1}}{15\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{16x^2-9}{15\sqrt{x^2+1}\,(5x+3\sqrt{x^2+1})}\ ;$$

$x \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $16x^2-9$.
Les racines de $16x^2-9$ sont $\pm\frac{3}{4}$, donc $f$ est décroissante sur $\left[0\,;\frac{3}{4}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3}{4}\,;10\right]$.
*Conclusion* : Robinson doit rejoindre la côte à 750 m de *A*.
*Remarque* : $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{34}{15}$, donc il mettra 2 heures et 16 minutes pour rejoindre la maison.

### 12 Étude de la fonction tangente

**1** $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
**2** Si $n$ est pair, $\tan(x+n\pi)=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$, et si $n$ est impair, $(\tan x+n\pi)=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.
$\tan(-x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.
On en déduit que tan est périodique de période $\pi$ et impaire.
**3** Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ les fonctions sinus et cosinus sont dérivables et la fonction cosinus ne s'annule pas.
$\tan'(x)=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x \geqslant 0$,
donc tan est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
**4** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan x=+\infty$, donc la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe de la fonction tangente.
**5** Le tracé sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ permet d'obtenir le tracé sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ par symétrie par rapport à l'origine. Puis on translate par les translations de vecteurs $k\pi\overrightarrow{OI}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

### 13 Le mouvement du bouchon

**1** $f(t)=1{,}5\cos(4\pi t)$.
**2** $t_0=\frac{32{,}5}{10}$ 3,25 s.
**3** **a.** $g(t)=1{,}5\cos(4\pi(t+3{,}25))=1{,}5\cos(4\pi t+13\pi)$
$=-1{,}5\cos(4\pi t)$.
**b.** Lorsque $\cos(4\pi t)=1$, donc lorsque $t=0{,}5k$ avec $k$ entier et $k \geqslant 7$.
**4** **a.** $v(t)=6\pi\sin(4\pi t)$.
**b.** $v(t)=0 \Leftrightarrow 4\pi t=k\pi \Leftrightarrow t=0{,}25k$ avec $k$ entier et $k \geqslant 13$.

## Faire le point

**17** **1** b. **2** c. **3** a. **4** c. **5** c. **6** a.

**18** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai. **5** Faux. **6** Vrai.

## Exercices d'application

### 1 Fonctions cosinus et sinus

**19** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

**20** **1** a. **2** b. **3** a. **4** b. **5** b.

**21** **1** b. **2** c. **3** c. **4** a.

**22** **1** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-2\sin x$.
**2** $f'(x)=\cos x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
**3** $f'(x)=-3\sin x-2\cos x+1$.

**23** **1** $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$.
**2** $f'(x)=(3x^2+4x)\sin x+(x^3+2x^2+1)\cos x$.
**3** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x$.

**24** **1** $f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2x}$.
**2** $f'(x)=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2x}$.
**3** $f'(x)=\frac{4\cos x}{(2+\sin x)^2}$.

**25** **1** $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$,
donc $x^2+3x-1 \leqslant f(x) \leqslant x^2+3x+1$.
**2** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x-1=+\infty$ ; de même en $-\infty$.

**26** **1** Pour tout $x>3$, on a :
$$x^2-1 \leqslant x^2+\cos x \leqslant x^2+1\ ;$$
donc $\frac{x^2-1}{x-3} \leqslant \frac{x^2+\cos x}{x-3}$, car $x-3>0$.
**2** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
Par un théorème de comparaison, on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\cos x}{x-3}=+\infty.$$

**27** **1** $\cos x \geqslant -1$, donc $f(x) \geqslant x-1$ ; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**2** $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $x>0$, donc $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**3** $\sin x \leqslant 1$, donc $f(x) \leqslant 1-\sqrt{x}$ ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**28** **1** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + 1$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$.

**2** $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\sin x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

**3** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x}$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$.

**29** **1** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{x-1}{\sin x} = +\infty$.

**2** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}} \dfrac{x}{\cos x} = -\infty$. **3** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{x^2+\sin x}{x\sin x} = -\infty$.

**30** **1** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x} = \cos'(0)$
$= -\sin 0 = 0$.

**2** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

On pose $h = x - \dfrac{\pi}{2}$ et on obtient :

$$\lim_{h\to0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - \cos\frac{\pi}{2}}{h} = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

**31** **1** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$.

**2** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{5x} = \dfrac{1}{5}$.

**3** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{3x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

**4** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} \times \dfrac{2x}{\sin(2x)} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

**32** **1** Vrai, car $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

**2** Faux, car $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{k\pi}$ avec $k$ entier non nul.

**3** Vrai, car $-x \leqslant f(x) \leqslant x$ si $x \geqslant 0$ et $x \leqslant f(x) \leqslant -x$ si $x \leqslant 0$.

**4** Vrai, en posant $X = \dfrac{2}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to0} 2\dfrac{\sin X}{X} = 2$.

**33** **1** $f(-x) = -x - \sin x = -f(x)$.

**2** $x-1 \leqslant f(x) \leqslant x+1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**3** $f'(x) = 1 + \cos x$.

**4** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k\times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**5** $\cos x \geqslant -1$, donc $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



**34** **1** $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\x>-\frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.

**2** $f'(x) = \tan^2 x \geqslant 0$.

**3**

| $x$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | ‖ | ↗ | ‖ |

**35** **1** $x^2 - 1 \leqslant g(x)$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

**2** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

**3** Sur $\left[-2\pi\,;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$, donc $g(x) \leqslant f(x)$.

Sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant 0$, donc $g(x) \geqslant f(x)$.

Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$, donc $g(x) \leqslant f(x)$.

Sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant 0$, donc $g(x) \geqslant f(x)$.

Sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\cos x \geqslant 0$, donc $g(x) \leqslant f(x)$.

**36** **1** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$.

**2** Tout point de la courbe de la fonction sinus est l'image d'un point de la courbe de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$.

## 2 Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

**37** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

**38** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.

**39** **1** b. **2** a. **3** b. **4** a.

**40** **1** c. **2** c. **3** c. **4** a. **5** b.

**41** **1** a. **2** a. et c. **3** b.

**42** **1** On conjecture que $f$ admet un maximum en 2 valant 0,5.

**2** Pour $x > 1$ :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-2(x-1)}{2x^2\sqrt{x-1}}$$
$$= \frac{-x+2}{2x^2\sqrt{x-1}}\ ;$$

$f'(x)$ est du signe de $-x+2$, donc $f$ est croissante sur $[1;2]$ et décroissante sur $[2;+\infty[$. Ainsi, $f$ admet un maximum en 2 valant $f(2) = 0{,}5$.

**43** **1** Pour $h>0$,
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{(1+h)\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1+h}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ quand $h$ tend vers $0$ : $f$ n'est pas dérivable en 1.

**2** Pour $h>0$,
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$ tend vers 0 quand $h$ tend vers 0 : $f$ est dérivable en 1 et $f'(1)=0$.

**44** **1**
$\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\dfrac{\sin a\cos h+\sin h\cos a-\sin a}{h}$
$=\sin a\times\dfrac{\cos h-1}{h}+\cos a\times\dfrac{\sin h}{h}$.

**2** Avec les résultats de l'activité 2 page 92,
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\sin a\times 0+\cos a\times 1=\cos a$.

**3** $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

donc $\cos'(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$.

**45** **1** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3\left(\dfrac{3}{4}x-1\right)^3$.

**2** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et $f'(x)=\dfrac{4}{(1-2x)^3}$.

**3** $f$ est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}}$.

**4** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-2\pi\sin\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**46** **1** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ et
$f'(x)=-3\times(-4)\times(3-4x)^{-4}=\dfrac{12}{(3-4x)^4}$.

**2** La fonction $f$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et
$f'(x)=-2\times\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$.

**3** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x)=\dfrac{-2\cos 2x}{(2+\sin 2x)^2}$.

**4** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x)=6\times\dfrac{4}{3}\times\left(\dfrac{4x+5}{3}\right)^5=8\left(\dfrac{4x+5}{3}\right)^5$.

**47** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi$
avec $k\in\mathbb{Z}$.

**48** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{2}{3}\pi\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow\pi x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}+k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

**49** $f(0)=\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
donc on a $\beta=\dfrac{\pi}{4}$ ou $\beta=\dfrac{3\pi}{4}$ ;
$f'(x)=\alpha\cos(\alpha x+\beta)$, donc $f'(0)=\alpha\cos\beta=-1$.
Si $\beta=\dfrac{\pi}{4}$, alors $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha=-\sqrt{2}$.
Impossible, car $\alpha>0$.
Donc $\beta=\dfrac{3\pi}{4}$ et $\alpha=\sqrt{2}$. On obtient finalement :
$$f(x)=\sin\left(\sqrt{2}\,x+\frac{3\pi}{4}\right).$$

**50** $\begin{cases}f(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ f'(0)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -a\sin b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{\pi}{6}\\ a=2\end{cases}$.

**51** **1** $f(x+\pi)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=f(x)$.

**2** **a.** $f'(x)=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**b.** $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Deux solutions sur l'intervalle d'étude : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

**c.** $f'(x)$ est positive sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$ et $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

**d.**

| $x$ | $-\pi$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ |

**52** **1** $f(x+2\pi)=f(x)$.

**2** $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right)$
$=\sqrt{3}\cos x-\sin x=f(x)$.

**3** $f'(x)=-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ;
si $x\in\left[0\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$, $x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\pi\right]$ ; donc $f'(x)\leqslant 0$ ;
si $x\in\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\dfrac{11\pi}{6}\right]$, $x+\dfrac{\pi}{6}\in[\pi\,;2\pi]$ ; donc $f'(x)\geqslant 0$ ;
si $x\in\left[\dfrac{11\pi}{6}\,;2\pi\right]$, $x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[2\pi\,;\dfrac{13\pi}{6}\right]$ ; donc $f'(x)\leqslant 0$.

**4**

| $x$ | $0$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | $\frac{11\pi}{6}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}$ |

**53** $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+1}$ ;
$f'(x)=\cos x\sqrt{x+1}+\sin x\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$
et $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$,
donc $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+1}}$.
Les deux courbes ont donc la même tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

**54** **1** $v(t) = \frac{4\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}\right)$,

donc $v(0) = \frac{4\pi}{T} \times \frac{1}{2} = 4\pi$.

**2** $a(t) = -\frac{8\pi^2}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}\right)$,

donc $a(0) = \frac{8\pi^2}{T^2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -16\pi^2\sqrt{3}$.

**3** $v(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{5}{24} + \frac{1}{4}k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

## 3 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ et $x \mapsto (u(x))^n$

**55** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai. **5** Vrai.

**56** **1** **a.** et **b.** **2** **a.**, **b.** et **c.** **3** **b.** et **c.**

**57** **1** $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$.

**2** $f'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$.

**3** $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

**58** **1** $f'(x) = 4\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$.

**2** $f'(x) = 3(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2$.

**3** $f'(x) = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)(\sqrt{x} + x)^3$.

**59** **1** $f'(x) = \frac{-6}{(2x+1)^4}$.

**2** $f'(x) = \frac{4\sin x}{(\cos x)^5}$.

**3** $f'(x) = \frac{-2(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^3}$.

**60** **1** $f'(x) = 18x(3x^2-1)^2$ ; $T : y = 72x - 64$ .

**2** $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ ; $T : y = -0{,}5x + 0{,}5$.

**3** $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$ ;

$T : y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{12} + \sqrt{\frac{3}{2}}$.

**61** **1** **Initialisation** : $(u^1)' = u'$ et $1u'u^0 = u'$.

**Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $n$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ; alors :

$(u^{n+1})' = (u^n \times u)' = (u^n)'u + u^n u' = nu'u^{n-1}u + u^n u'$
$= (n+1)u'u^n$.

**2** $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{(u^n)'}{u^{2n}} = -\frac{nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$.

**3** En utilisant les exposants négatifs, le résultat de la question **2** s'écrit : $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$.
Donc, pour tout entier relatif $n$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

**62** $f'(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$,

donc $f'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ;

$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; on obtient $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

**63** **1** $f(x+2\pi) = f(x)$.

**2** $f(-x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{2}\sin^2 x$, donc $f$ n'est ni paire ni impaire.

**3** **a.** $f'(x) = \cos x \sin^2 x + \cos x \sin x$
$= \sin x \cos x(\sin x + 1)$.

**b.** Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant 0$ et $\cos x \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.

Sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\sin x \geqslant 0$ et $\cos x \leqslant 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$.

Sur $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant 0$ et $\cos x \leqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.

Sur $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$, $\sin x \leqslant 0$ et $\cos x \geqslant 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$.

**4**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{5}{6}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{6}$ | ↘ | $0$ |

**64** **1** $AM$ semble minimale lorsque $x_M = 0{,}5$.

**2** $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

**3** **a.** $g'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ est du signe de $2x-1$, donc négative sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

**b.**

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $1$ |

**4** La distance minimale vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $M(0{,}5 ; \sqrt{0{,}5})$.

## Prépa Bac

## Exercices guidés

**65** **1** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x} = 1 \times 0 = 0$,
donc $f$ est continue en zéro.

**2** $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \times \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$,
donc $f$ n'est pas dérivable en zéro.

**3** $\frac{-1}{\sqrt{x}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ;
donc $y = 0$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$.

**66** **Partie A**

**1** $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**2** $g'(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, donc $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**3** Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\alpha$ et la stricte monotonie son unicité ; $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.

**4** On en déduit que $\alpha$ est négative sur $]-\infty\,;\alpha]$ et positive sur $[\alpha\,;+\infty[$.

**Partie B**

**1** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ;

pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{x^2}{3} - \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right)$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**2** $f'(x) = x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

**3** **a.** $g(\alpha) = 0$, donc $\sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{1}{\alpha}$ ;

donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{3} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha^4 - 1}{3\alpha}$.

**b.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $\dfrac{\alpha^4-1}{3\alpha}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**67** **1** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ ; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

**2** $f'(x) = \dfrac{3x^2}{(x+1)^4} \geqslant 0$, donc $f$ est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ |

**3** $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$T_a$ passe par l'origine $\Leftrightarrow -af'(a) + f(a) = 0$

$\Leftrightarrow -3a^3 + a^3(a+1) = 0 \Leftrightarrow a^3(a-2) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 2$.

Donc $T_0 : y = 0$ et $T_2 : y = \dfrac{4}{27}x$ sont les deux tangentes passant par l'origine.

## Exercices d'entraînement

**68** **1** **a.** $f'_1(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ ; donc $f'_1(x)$ est du signe de $2-3x$, c'est-à-dire positif sur $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right]$ et négatif sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;1\right[$.

**b.**

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{2}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_1(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ |
| $f_1(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\searrow$ | $\|\|$ |

**c.** $x_1 = \dfrac{2}{3}$.

**2** **a.** $f'_n(x) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} + x^n\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$f'_n(x) = \dfrac{2nx^{n-1}(1-x) - x^n}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{x^{n-1}[2n - (2n+1)x]}{2\sqrt{1-x}}$.

**b.** $f'_n(x)$ est du signe de $2n - (2n+1)x$, c'est-à-dire positif sur $\left[0\,;\dfrac{2n}{2n+1}\right]$ et négatif sur $\left[\dfrac{2n}{2n+1}\,;1\right[$.

**c.** $x_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

**3** **a.** $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2}{(2n+3)(2n+1)} > 0$ (on peut aussi dériver $x \longmapsto \dfrac{2x}{2x+1}$).

**b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = 2$.

**69** **1** $f(x + 2\pi) = f(x)$.

**2** **a.** $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \cos x + \sin x$.

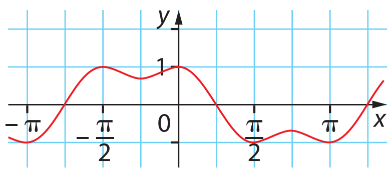
**b.** $f'(x) = -3\sin x\cos^2 x - 3\cos x \sin^2 x$

$= -3\sin x \cos x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ avec **2** **a.**.

**3**

| $x$ | $-\pi$ | | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $-\dfrac{\pi}{4}$ | | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\dfrac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sinx** | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| **cosx** | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ | $-1$ |

**4**




**5** **a.** On développe $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

**b.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x$ ou $\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x = 0$ en utilisant la factorisation de **a.**.

$\cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 + 0{,}5\sin(2x) = 0$
$\Leftrightarrow \sin(2x) = -2$ : impossible.

## Problèmes

**70** **1** On conjecture que la fonction $\mathscr{A}$ est décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, puis croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Elle varie de 3,14 à 2,14 qui semble être son minimum, puis de 2,14 à 3,14.

**2 a.** Le triangle *DBM* est rectangle en *M*. On a $DM = DB \times \cos x = 2\cos x$ et, si on appelle *h* la hauteur issue de *M* du triangle *DBM*, on a :

$$h = DM \times \sin x = 2\cos x \sin x = \sin(2x).$$

L'aire de *DBM* est $f(x) = \dfrac{2 \times \sin(2x)}{2} = \sin(2x)$.

**b.** Ainsi, $\mathscr{A}(x) = \pi - \sin(2x)$.

**3** $\mathscr{A}'(x) = -2\cos(2x)$. La dérivée est donc négative sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{A}'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\mathscr{A}(x)$ | $\pi$ | $\searrow$ | $\pi - 1$ | $\nearrow$ | $\pi$ |

**4** L'aire de la zone bleue décroît sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, croît sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et admet un minimum qui vaut $\pi - 1$.

**5** L'aire de la zone bleue sera minimale lorsque l'aire du triangle *DBM* sera maximale, c'est-à-dire lorsque sa hauteur sera maximale. Cela sera réalisé lorsque le point *M* sera sur la perpendiculaire à $(DB)$ passant par *A*, donc lorsque le triangle *DBM* sera rectangle et isocèle en *M*.

L'angle $(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DM})$ aura pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

**71** **1** Avec la calculatrice, on conjecture une solution de valeur approchée 0,74.

**2** On sait que pour tout réel *x*, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc, si $x > 1$, on ne pourra jamais avoir $\cos x = x$.

**3** Si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$, on a $\cos x \geqslant 0$ et $x < 0$, l'équation $\cos x = x$ n'a pas de solution.

Si $x < -\dfrac{\pi}{2} < -1$, l'équation $\cos x = x$ n'a pas de solution, car pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \cos x$.

*Conclusion* : si $x < 0$, l'équation n'a pas de solution.

**4 a.** $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ si $x \in [0\,;1]$, donc $f$ est strictement croissante sur cet intervalle.

**b.** $f(0) = -1$ ; $f(1) > 0$ et $f$ est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur cet intervalle.

**c.** Avec la calculatrice, on obtient :

$$0{,}739 < \alpha < 0{,}740.$$

**5** On a trouvé en **4 c.** un encadrement du réel $\alpha$ qui vérifie $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \alpha$. C'est ce que l'on a conjecturé avec la calculatrice.

**72** **1** $f(0) = g(0) = 1$.

**2** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$.

On a $f'(0) = g'(0) = \dfrac{1}{2}$. Les courbes représentatives des deux fonctions admettent la même tangente au point d'abscisse 0.

**3 a.** $d(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8}$.

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$
$$= \frac{2}{4\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}} + \frac{x\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}}$$
$$= \frac{2 + (x-2)\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}}.$$

**b.** $h(x) = 2 + (x-2)\sqrt{x+1}$,

donc $h'(x) = \sqrt{x+1} + (x-2) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{2(x+1) + (x-2)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x}{2\sqrt{x+1}}.$$

La fonction *h* est décroissante sur $]-1\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme $h(0) = 0$, cette fonction admet un minimum en 0 qui vaut 0, donc la fonction *h* est positive sur son ensemble de définition.

**c.** Comme $4\sqrt{x+1}$ est un réel positif, on a : pour tout réel $x > -1$ ; $d'(x) \geqslant 0$.

**4 a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} -g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{8} = +\infty$.

**b.**

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $d'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $d(x)$ | $-\frac{3}{8}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**5** La fonction *d* est négative sur $]-1\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$, donc la courbe représentative de $f$ est en dessous de celle de *g* sur $]-1\,;0]$ et au-dessus sur $[0\,;+\infty[$.

**73** **1** $f_n(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \sin(n(x + 2\pi))$

$= \sin x + \sin(nx + 2\pi n) = \sin x + \sin(nx) = f_n(x)$.

La fonction $f_n$ est $2\pi$-périodique.

**2** Pour $n = 0$, $\cos(n\pi) = \cos 0 = 1$ et $(-1)^0 = 1$.

On suppose que pour un entier *n*, on a $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et on démontre que : $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

$\cos(n\pi + \pi) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Par récurrence, on a bien l'égalité pour tout entier *n*.

**3** $f_n(\pi) = \sin\pi + \sin(n\pi) = 0$. La courbe $\mathscr{C}_n$ passe bien par le point $A(\pi\,;0)$.

**4** $f'_n(x) = \cos x + n\cos(nx)$.

L'équation de la tangente en *A* est :

$y = f'_n(\pi)(x - \pi) + f_n(\pi) = (-1 + n(-1)^n)(x - \pi)$.

**5** **a.** On prend $x = 0$ dans l'équation précédente, on obtient $y_n = -\pi(-1+n(-1)^n) = \pi(1-n(-1)^n)$.
**b.** Selon la parité de $n$, la quantité $(-1)^n$ vaut 1 ou $-1$, donc la suite $(y_n)$ diverge, elle n'a pas de limite.

**74**

**1** $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}) = 2x$.

**2** **a.** On trace la hauteur $[DH]$ issue de $D$ dans le triangle $CAD$. On a $DH = CD \times \sin x = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$.
Ainsi, aire de $CAD = \frac{1}{2}\sin(2x)$ et l'aire du secteur circulaire intercepté par l'angle de mesure $2x$ vaut $x$.
**b.** Comme l'aire du demi-disque inférieur est égale à $\frac{\pi}{2}$, on a : $a(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(2x) + x$.

**3** **a.** et **b.** L'aire balayée est égale à l'aire du demi-disque diminuée des aires du triangle $CAD$ et du secteur circulaire $ABD$, mais comme $x$ est négatif on obtient :

$$a(x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}\sin(-2x) + (-x)\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(2x) + x.$$

**4** **a.** $a'(x) = \cos(2x) + 1 \geqslant 0$, car $-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$.
La fonction $a$ est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

**b.**

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $a'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $a(x)$ | ‖ 0 | ↗ | $\pi$ ‖ |

**5** Avec la calculatrice on trouve $-0{,}30 < x < -0{,}29$.

**75**

**1** Si $x \in [0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$ ; donc la fonction $f$ est bien définie.

**2** Dans le calcul suivant, $h > 0$ :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\sin h}}{h} = \lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{\sin h}{h}} \times \frac{1}{\sqrt{h}}.$$
Or, d'après le cours, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ et, de plus, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ et $f$ n'est pas dérivable en 0.

**3** Dans le calcul suivant, $h < 0$ :
$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\sin(\pi+h)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{-\sin h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\sin(-h)}}{-\sqrt{-h}} \times \frac{1}{\sqrt{-h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} -\sqrt{\frac{\sin(-h)}{-h}} \times \frac{1}{\sqrt{-h}} = -\infty.$$
La fonction $f$ n'est pas dérivable en $\pi$.

**4** $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos x$, d'où le tableau de variations suivant :

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ $+$ | | $-$ ‖ |
| $f(x)$ | 0 ↗ | 1 | ↘ 0 |

**76**

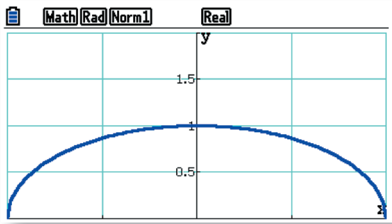
**1** $(E) \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x \in [-2\,;2]$
et $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ ou $y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

**2** **a.** $f'(x) = \dfrac{-\frac{x}{2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = -\dfrac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$.
Cette dérivée est positive sur $[-2\,;0]$ et négative sur $[0\,;2]$.
**b.** Dérivabilité en $-2$ $(h > 0)$ :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\frac{(-2+h)^2}{4}}}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\frac{4h-h^2}{4}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4h-h^2}}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\frac{4}{h}-1}}{2} = +\infty.$$
Dérivabilité en $2$ $(h < 0)$ :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\frac{(2+h)^2}{4}}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\frac{-4h-h^2}{4}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{-4h-h^2}}{2h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\sqrt{-\frac{4}{h}-1}}{2} = -\infty.$$
La fonction $f$ n'est dérivable ni en $-2$ ni en 2.

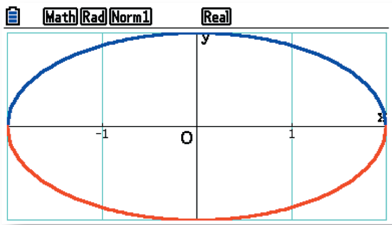
**c.**

| $x$ | $-2$ | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ $+$ | | $-$ ‖ |
| $f(x)$ | 0 ↗ | 1 | ↘ 0 |

**3**




**4** La courbe $\mathscr{C}_2$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_1$ par symétrie par rapport à l'axe $(Ox)$.




**5** Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{C}_1$. Les coordonnées de $M$ sont $\left(x\,;\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)$ et $MF = \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x^2}{4}}$
$$= \sqrt{\frac{3x^2}{4} - 2\sqrt{3}\,x + 4} = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - 2\right)^2} = \left|\frac{x\sqrt{3}}{2} - 2\right|.$$
De même, on a $MF' = \left|\frac{x\sqrt{3}}{2} + 2\right|$.

Comme $x \in [-2\,;2]$ on a :

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} - 2 < 0 \text{ et } \frac{x\sqrt{3}}{2} + 2 > 0\,;$$

donc $MF + MF' = -\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + 2 + \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + 2 = 4$.

Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe $(Ox)$, on aura le même résultat si $M$ est un point quelconque de $\mathscr{C}_2$.

**77** **1** La fonction $f$ est définie sur $[-a\,;+\infty[$ et la fonction $g$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right]$.

Les courbes représentatives de $f$ et $g$ se coupent si, et seulement si, $-a \leqslant \dfrac{3}{2}$, c'est-à-dire $a \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

**2** Avec le logiciel, on trouve $a = -0{,}75$.

**3** On résout : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+a} = \sqrt{3-2x}$

$\Leftrightarrow 3x = 3 - a \Leftrightarrow x = \dfrac{3-a}{3}$.

On calcule $f\left(\dfrac{3-a}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{3-a}{3} + a} = \sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}$.

On obtient bien $B\left(\dfrac{3-a}{3}\,;\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}\right)$.

**4** Équation de $T_f$ :

$$y = f'\left(\frac{3-a}{3}\right)\left(x - \frac{3-a}{3}\right) + f\left(\frac{3-a}{3}\right).$$

Or, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$,

donc $f'\left(\dfrac{3-a}{3}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}}$ ;

d'où : $y = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}}\left(x - \dfrac{3-a}{3}\right) + \sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}$.

Équation de $T_g$ :

$$y = g'\left(\frac{3-a}{3}\right)\left(x - \frac{3-a}{3}\right) + g\left(\frac{3-a}{3}\right).$$

Or, $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{3-2x}}$, donc $g'\left(\dfrac{3-a}{3}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}}$ ;

d'où : $y = \dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}}\left(x - \dfrac{3-a}{3}\right) + \sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}$.

**5** Un vecteur directeur de $T_f$ est $\vec{V}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}} \end{pmatrix}$,

donc un vecteur directeur est aussi $\vec{v}\begin{pmatrix} 2\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de $T_g$ est $\vec{W}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{2a+3}{3}}} \end{pmatrix}$, donc un vecteur directeur est aussi $\vec{w}\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{2a+3}{3}} \\ -1 \end{pmatrix}$.

**6** Les deux tangentes sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{2a+3}{3}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4a+3}{3} = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{4}$.

**78** **1** Le périmètre est égal à 12, donc $2x + y = 12$ et l'inégalité triangulaire donne $2x \geqslant y$ en considérant le triangle aplati comme possibilité.

**2** Avec les deux renseignements du **1** on obtient $2x \geqslant 12 - 2x \Leftrightarrow x \geqslant 3$.

Comme $y \geqslant 0$, on a aussi :

$$2x + y \geqslant 2x \Leftrightarrow 12 \geqslant 2x \Leftrightarrow x \leqslant 6.$$

*Conclusion* : $3 \leqslant x \leqslant 6$.

**3** La valeur conjecturée est $x = 4$ et le triangle semble être équilatéral.

**4** On trace la hauteur $[AH]$ issue de $A$, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 = x^2 - \frac{y^2}{4} = x^2 - \frac{(12-2x)^2}{4} = \frac{48x - 144}{4}.$$

Donc $AH = \dfrac{\sqrt{48x-144}}{2} = \sqrt{12x-36}$.

**5** L'aire de $ABC$ est égale à :

$f(x) = \dfrac{1}{2}(12-2x)\sqrt{12x-36} = (6-x)\sqrt{12x-36}$.

**6** **a.** $f'(x) = -\sqrt{12x-36} + (6-x)\times\dfrac{12}{2\sqrt{12x-36}}$

$= \dfrac{6(6-x)}{\sqrt{12x-36}} - \dfrac{12x-36}{\sqrt{12x-36}} = \dfrac{-18x+72}{2\sqrt{3x-9}} = \dfrac{-9x+36}{\sqrt{3x-9}}$.

**b.** Cette dérivée est positive sur $[2\,;4]$ et négative sur $[4\,;6]$, donc la fonction $f$ admet un maximum en 4.

**7** Si $x = 4$, alors $y = 12 - 8 = 4$ et le triangle est équilatéral. L'aire maximale est $f(4) = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.

## Pistes pour l'accompagnement personnalisé

### Revoir les outils de base

**79** $\sin(x+\pi) = -\sin x$ ; $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ;

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ;

$\cos(-x) + \cos x = 2\cos x$ ; $\sin(-x) - \sin x = -2\sin x$.

**80** $\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$ $S = \left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$ ;

$\cos x < 0$ $S = \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ ;

$\sin x \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left[-\dfrac{3\pi}{4}\,;-\dfrac{\pi}{4}\right]$.

**81** **a.** $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\times 2\pi$ ($k$ entier)

**b.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi$ ($k$ entier)

ou $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\times 2\pi$ ($k$ entier).

**c.** $x = \dfrac{\pi}{5} + k\times 2\pi$ ($k$ entier)

ou $x = \dfrac{4\pi}{5} + k\times 2\pi$ ($k$ entier).

**d.** $\cos x = -\cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$ :

$x = \dfrac{3\pi}{4} + k\times 2\pi$ ($k$ entier)

ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + k\times 2\pi$ ($k$ entier).

**82** **a.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi$ ($k$ entier).

**b.** $3x-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}+k\times 2\pi$ ou $3x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{5\pi}{4}+k\times 2\pi$ ou $3x=\frac{3\pi}{4}+k\times 2\pi$ ($k$ entier).

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+k\times\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{\pi}{4}+k\times\frac{2\pi}{3}$ ($k$ entier).

**c.** $2x=\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\times\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{8}+k\times\pi$ ($k$ entier).

**d.** $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi$

ou $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ ou $\frac{x}{2}=-\frac{7\pi}{6}+k\times 2\pi$

$\Leftrightarrow x=\pi+k\times 4\pi$ ou $x=-\frac{7\pi}{3}+k\times 4\pi$ ($k$ entier).

**83** $f(0)=-1 \Leftrightarrow c=-1$ ;

$f(-2)=-5 \Leftrightarrow 4a-2b-1=-5$ ;

$f'(-2)=1$ (1 est le coefficient directeur de la tangente $T$) et $f'(x)=2ax+b$, donc $-4a+b=1$.

On a donc le système : $\begin{cases}4a-2b=-4\\-4a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\a=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Donc $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-1$.

## Les savoir-faire du chapitre

### Étudier une fonction trigonométrique

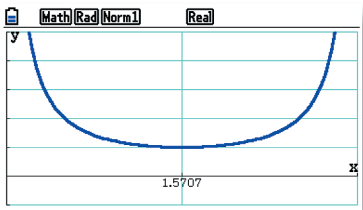
**84** $f'(x)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Si $x\in[0\,;2\pi]$, alors $\frac{x}{2}\in[0\,;\pi]$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$ ; donc $f'(x)\leqslant 0$ et $f$ est décroissante sur $[0\,;2\pi]$.

**85** $g'(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Si $x\in[0\,;2\pi]$, alors $\frac{x}{2}\in[0\,;\pi]$ et $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, donc $f'(x)\geqslant 0$ sur le premier intervalle et $f'(x)\leqslant 0$ sur le second. La fonction $f$ est croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

**86** **1**




**2** La fonction $f$ semble décroissante sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ ; croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$. Les limites en 0 et en $\pi$ semblent être égales à $+\infty$.

**3** $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$. On retrouve bien la dérivée négative sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sin x=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}}\sin x=0^+$ ;

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}}f(x)=+\infty$.

**87** **1** Le dénominateur ne s'annule jamais, car $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ ; donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

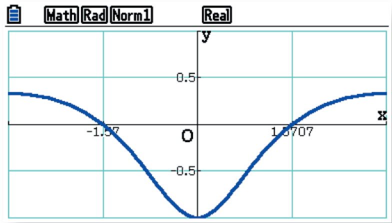
**2** Pour tout réel $x$, $f(-x)=f(x)$ grâce à la parité de la fonction cosinus ; de plus, $f(x+2\pi)=f(x)$.

**3** $f'(x)=\frac{-\sin x(\cos x-2)+\cos x\sin x}{(\cos x-2)^2}$

$=\frac{2\sin x}{(\cos x-2)^2}$

qui est du signe de $\sin x$, donc positif sur $[0\,;\pi]$. La fonction $f$ est croissante sur cet intervalle.

**4** Par parité, cette fonction est décroissante sur $[-\pi\,;0]$.




### Étudier une fonction du type $x\longmapsto f(ax+b)$

**88** $f'(x)=1\sqrt{x-1}+(x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$=\frac{2(x-1)+(x-1)}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3}{2}\times\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}=\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$.

**89** **a.** $f'(x)=\cos(2x)+x\times(-2\sin(2x))$

$=\cos(2x)-2x\sin(2x)$.

**b.** $f'(x)=\dfrac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3}=\frac{-1}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$.

**c.** $f'(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$.

**90** **1** Si $x>\frac{1}{2}$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$

et $f\left(\frac{1}{2}\right)=0<f(x)$ pour tout $x$ de $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, donc $f$ est croissante sur son ensemble de définition.

**2** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{2h}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}=+\infty$, donc $f$ n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

**3** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

| $x$ | $\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ $\qquad$ $+$ |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $+\infty$ |

**4** $y = f'(5)(x-5)+f(5)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x-5)+3 = \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$

**91** **a.** $D = \left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[\,;\ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}.$

**b.** $D = ]-\infty\,;0[\,;\ f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{-3x}}.$

**c.** $D = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = 15(5x+4)^2.$

**d.** $D = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = -4(1-x)^3.$

**e.** $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\};\ f'(x) = \frac{8}{(-2x+1)^3}.$

**f.** $D = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\,;\ f'(x) = \frac{-3}{(6x+3)\sqrt{6x+3}}.$

## Étudier une fonction du type $\sqrt{u}$ ou $u^n$

**92** **a.** $D = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}.$

**b.** $D = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{2+\cos x}}.$

**c.** $D = ]0\,;+\infty[\,;\ f'(x) = 3\frac{1}{\sqrt{x}}(1+2\sqrt{x})^2.$

**d.** $D = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = 4(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^3.$

**93** ▶ Pour toute valeur de $a$ non nulle, $f\left(\frac{1}{a}\right) = 0.$

• Si $a$ est positif,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-1)^4 = +\infty$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(ax-1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax-1)^4 = +\infty$.

• Si $a$ est négatif,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-1)^4 = +\infty$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(ax-1) = +\infty$ , donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax-1)^4 = +\infty$.

▶ $f'(x) = 4a(ax-1)^3.$

• Si $a$ est positif, $f'(x)\geqslant 0$ lorsque $x\geqslant\frac{1}{a}$ et $f'(x)\leqslant 0$ dans l'autre cas, d'où les variations de $f$ conformes au tableau.

• Si $a$ est négatif, $(ax-1)^3\geqslant 0$ lorsque $x\leqslant\frac{1}{a}$, donc, comme $a$ est négatif $f'(x)\leqslant 0$ dans ce cas, et $f'(x)\geqslant 0$ lorsque $x\geqslant\frac{1}{a}$, d'où les variations de $f$ conformes au tableau.

**94** **1** Pour tout réel $x$,

$$f(x+\pi) = \sqrt{1+\sin^2(x+\pi)} = \sqrt{1+(-\sin x)^2} = \sqrt{1+\sin^2 x} = f(x).$$

Donc $f$ admet pour période $\pi$.

**2** Pour tout réel $x$,

$$f(-x) = \sqrt{1+\sin^2(-x)} = \sqrt{1+(-\sin x)^2} = \sqrt{1+\sin^2 x} = f(x).$$

Donc $f$ est paire.

**3** $$f'(x) = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

Si $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $2x\in[0\,;\pi]$ et $\sin(2x)\geqslant 0$.

Donc la dérivée est positive sur cet intervalle.

**4**

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\sqrt{2}$ | ↘ | $1$ | ↗ | $\sqrt{2}$ |

## Approfondissement

**95** **1** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

$$f(x) = \frac{-1}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}.$$

On obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

**2** $$f'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

**3** Si $x$ est positif, la dérivée est clairement strictement positive.

Si $x$ est négatif,

$$f'(x) = \frac{x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$f'(x) = 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

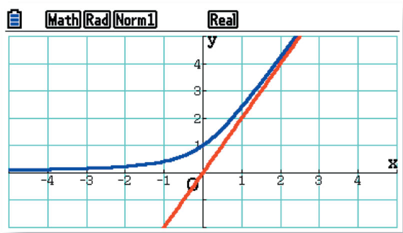
Or, $1+\frac{1}{x^2}>1$, donc $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}<1$ ;

donc $f'(x)>0$.

**4**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**5**




On remarque qu'en $+\infty$ la courbe longe la droite d'équation $y = 2x$.

**6** $$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

CHAPITRE 4

# Fonction exponentielle

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Fonction exponentielle**<br><br>Fonction $x \longmapsto \exp(x)$ | ■ démo BAC Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. | La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.<br>L'existence est admise. |
| Relation fonctionnelle, notation $e^x$. | ■ démo BAC Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.<br>• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.<br>• Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle.<br>• Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$.<br>• Calcul de la dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ | On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \longmapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ $(k > 0)$ qui sont utilisées dans des domaines variés.<br><br>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{e^x - 1}{x}$.<br><br>⇄ [SPC et SVT] Radioactivité.<br><br>(AP) *Étude de phénomènes d'évolution.* |

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

### 2. Intentions des auteurs

Conformément au programme, la fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0 et égale à sa dérivée.
Des résultats sur les limites et sens de variations nourrissent des activités et problèmes qui privilégient des approches contextualisées où les outils informatiques et les logiciels de calculs formels ont toute leur place. La résolution de problèmes a été privilégiée.

# Partir d'un bon pied

**Objectif**
*Réactiver les connaissances du cours de Première concernant les calculs sur les puissances et les suites géométriques. Une activité fait travailler sur la dérivation, prévision de l'étude de la dérivée de la fonction* $x \mapsto e^{u(x)}$.

**A** **1** **b.** **2** **a.** **3** **b.** **4** **a.**

**B** **a.** $f'(x) = 8x + 12$.

**b.** $f'(x) = -4\cos\left(-4x + \frac{\pi}{3}\right)$.

**c.** $f'(x) = \frac{1}{2}g'\left(\frac{x}{2} - 5\right)$.

**C** **1** **a.** et **b.** **2** **a.** et **b.** **3** **a.** et **c.**

# Découvrir

## Activité 1 Croissance d'une population de bactéries

**Objectif :** *Faire le lien entre une suite géométrique et une croissance exponentielle.*

**1** **2** Voir graphique de la question **1**.

**3** Au bout de 17 heures, le nombre de bactéries vaut environ 750 millions ; au bout de 21 heures, il vaut environ 1 500 millions ; au bout de 25 heures, il vaut environ 3 000 millions.

**4** Taux d'évolution entre 16 et 17 h :

$\frac{750 - 640}{640} \times 100 \approx 17\,\%$ ;

Taux d'évolution entre 20 et 21 h :

$\frac{1500 - 1280}{1280} \times 100 \approx 17\,\%$ ;

Taux d'évolution entre 24 et 25h :

$\frac{3\,000 - 2\,560}{2\,560} \times 100 \approx 17\,\%$.

La suite $(u_n)$ semble être une suite géométrique de premier terme $u_0 = 40$ et de raison environ 1,17.

**5** À l'aide du tableur, on trouve environ 46 h.

## Activité 2 Loi de refroidissement de Newton, modélisation discrète

**Objectif :** *Approcher à l'aide d'une loi de la physique, le principe d'une décroissance exponentielle.*

**1** La variation de température entre les minutes $n$ et $n + 1$ est $T_{n+1} - T_n$ et, comme il y a proportionnalité avec la différence entre $T_n$ et 20 °C, on a bien :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - 20).$$

**2** **a.** $u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = T_n + k(T_n - 20) - 20$
$= (k+1)(T_n - 20) = (k+1)u_n$.

La suite $(u_n)$ est géométrique de premier terme $u_0 = 80 - 20 = 60$ et de raison $(k + 1)$.

**b.** $u_n = 60 \times (k+1)^n$, donc $T_n = 60 \times (k+1)^n + 20$.

**c.** On a $T_2 = 60 \times (k+1)^2 + 20 = 69$, donc $k \approx -0{,}1$.
Ainsi, $T_n \approx 60 \times 0{,}9^n + 20$.

**3** $T_{20} \approx 60 \times 0{,}9^{20} + 20 \approx 27{,}3$ °C.

## Activité 3 Des fonctions « transformant les sommes en produits »

**Objectif :** *Étudier, à partir d'une propriété des suites géométriques, la relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle et les premières propriétés de cette fonction.*

**1** $u_n = q^n$ ; $u_p = q^p$, donc :
$$u_n \times u_p = q^{n+p} = u_{n+p}.$$

**2** Pour tout réel $x$,
$f(x) = f(x - a + a) = f(x - a) \times f(a) = 0$,
car $f(a) = 0$.

**3** **a.** $f(x) = f(x + 0) = f(x) \times f(0)$ ;
or, $f(x) \neq 0$, donc $f(0) = 1$.

**b.** $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$.

**c.** $1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \times f(-x)$,

donc, comme $f(x) \neq 0$, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

**d.** On pose $u_n = f(n)$, donc :
$$u_{n+1} = f(n+1) = f(n) \times f(1) = f(1) \times u_n.$$
On a bien une suite géométrique de raison $f(1)$.

**4** Comme les fonctions $y \mapsto y + x$ et $f$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $g$ est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$g'(y) = 1 \times f'(x + y)$ et, de plus, comme :
$$f(x + y) = f(x)f(y),$$
on a aussi :
$g'(y) = f(x)f'(y)$. ($f'(x) = 0$, car $x$ est fixé).
D'où $f'(x + y) = f(x)f'(y)$.
En prenant $y = 0$, comme $x$ est quelconque, on obtient pour tout réel $x$ : $f'(x) = f'(0) \times f(x)$.
En posant $k = f'(0)$ on a le résultat attendu.

**5** $f(0) = 1$ ; pour tout réel $x$, $f(x) > 0$ ;
$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ ; la suite $(f(n))$ est géométrique de raison $f(1)$, $f'(x) = k \times f(x)$, où $k$ est un réel non nul.

## Activité 4 Fonction $f$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

**Objectif :** *Construire une représentation graphique approchée d'une fonction vérifiant les propriétés de la fonction exponentielle.*

**1** **a.** Le coefficient directeur de la tangente à l'origine est $f'(0) = f(0) = 1$.

**b.** C'est le segment porté par la droite d'équation $y = x + 1$.

**c.** $f(1) \approx 2$.

**2** **a.** $f(0{,}5) \approx 1{,}5$.

**b.** $f'(0{,}5) \approx 1{,}5$. On trace le segment porté par la droite d'équation $y = 1{,}5x + 0{,}75$.

**c.** $f(1) \approx 2{,}25$.

**3** Les tangentes aux points d'abscisses 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ont respectivement pour coefficients directeurs : 1,2 ; 1,44 ; 1,728 ; 2,0736.
Les segments consécutifs ont pour points d'origine ceux de coordonnées : $(0\,;1)$ ; $(0{,}2\,;1{,}2)$ ; $(0{,}4\,;1{,}44)$ ; $(0{,}6\,;1{,}728)$ ; $(0{,}8\,;2{,}0736)$.

# Exercices d'application

## Savoir faire — Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

**1** **a.** Faux ; **b.** vrai ; **c.** vrai ; **d.** vrai.

**2** **a.** $e^{2x}\times e^{-2x} = e^{2x-2x} = e^0 = 1$ ;
**b.** $e^{2x+1}\times e^{1-x} = e^{2x+1+1-x} = e^{x+2}$ ;
**c.** $\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x+2}} = e^{(x+2)-(-x+2)} = e^{x+2+x-2} = e^{2x}$ ;
**d.** $\dfrac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = e^x$.

**3** **1** $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
**2** $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-x}-e^{-2x}$.

**4** **a.** Vrai ; **b.** vrai ; **c.** vrai ; **d.** faux.

## Savoir faire — Étudier une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle

**5** $f(x) = e^x + x - 1$, donc $f'(x) = e^x + 1$.
La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation réduite : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f'(1) = e+1$ et $f(1) = e$.
On obtient donc $y = (e+1)(x-1)+e = (e+1)x-1$.

**6** **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}-\sqrt{x}) = -\infty$,
car $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}) = +\infty$.
**b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}} = 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}) = +\infty$.
**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}) = 0$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty$.
**d.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)e^x = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = -1$.

**7** **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$.
**b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2+x+1} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1) = +\infty$.

**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)} = +\infty$.
**d.** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}} = 1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

**8** **a.** Si $x<0$, alors $-x>0$ ; $e^{-x}>1$, donc $1-e^{-x}<0$.
**b.** Si $x\geqslant 0$, alors $-x\leqslant 0$ ; $e^{-x}\leqslant 1$, donc $1-e^{-x}\geqslant 0$.
De plus, comme $e^{-x}>0$, on a $f(x)<1$.

## Savoir faire — Étudier une fonction du type $x \longmapsto e^{u(x)}$

**9** **a.** $f'(x) = -2e^{1-2x}$.
**b.** $f'(x) = -xe^{-x^2}$.
**c.** $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
**d.** $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$.

**10** $f'(x) = (3x^2+2x)e^{x^3+x^2} = x(3x+2)e^{x^3+x^2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\exp\left(\frac{4}{27}\right)$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

**11** **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right) = +\infty$.
**b.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^x-1)}{x} = 1$.
**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}(x+5) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{5}{e^x}\right) = 0$.
**d.** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-\frac{1}{x}} = e$.

**12** **a.** $f'(x) = -3e^{-3x}<0$, donc $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
**b.** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}>0$ pour tout $x$ non nul.
**c.** $f'(x) = -\sin x e^{\cos x}<0$ sur $[0\,;\pi]$.

# Travaux pratiques

**13** **Distance minimale entre un point fixe et une courbe**
**1** Distance minimale environ 0,78 pour le point d'abscisse environ $-0{,}4$.

**2** $OA=\sqrt{x^2+e^{2x}}$. Pour minimiser $OA$, il faut minimiser $x^2+e^{2x}$, car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$f'(x)=2e^{2x}+2x$ ; $f''(x)=4e^{2x}+2>0$. Comme la dérivée seconde de $f$ est positive, la dérivée est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | |
| $f'(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

Comme $f'$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle prend des valeurs négatives et positives, il existe un réel unique $\alpha$ tel que $f'(\alpha)=0$.

On a donc : $f'$ négative sur $]-\infty\,;\alpha]$ et positive sur $[\alpha\,;+\infty[$, donc $f$ admet un minimum en $\alpha$.

Avec la calculatrice, on trouve $\alpha\approx-0{,}43$ et $OA=\sqrt{f(\alpha)}\approx0{,}78$.

**4** **1.** Le coefficient directeur de $(T)$ est $e^{\alpha}$.

**2.** Le coefficient directeur de la droite $(OA)$ est $\dfrac{e^{\alpha}}{\alpha}$.

**3.** Le produit des deux coefficients directeurs vaut $\dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}=-\dfrac{\alpha}{\alpha}=-1$, donc les deux droites sont perpendiculaires.

## 14 Étude des fonctions $x\longmapsto e^{-kx}$ et $x\longmapsto e^{-kx^2}$, où $k>0$

**1** **a.** Les fonctions $f_k$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}$. La limite en $-\infty$ semble être $+\infty$ et la limite en $+\infty$ semble être égale à 0.

**b.** $\mathscr{C}_{0,2}$ est en vert, $\mathscr{C}_{0,5}$ est en rouge, $\mathscr{C}_1$ est en bleu, $\mathscr{C}_{1,5}$ est en violet.

Si $k<k'$, on conjecture que $\mathscr{C}_k$ est en dessous de $\mathscr{C}_{k'}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et au-dessus sur $[0\,;+\infty[$. Toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ se coupent au point $(0\,;1)$.

**c.** $f'_k(x)=-ke^{-kx}<0$, car $k$ est strictement positif, d'où la stricte décroissance des fonctions $f_k$ sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -kx=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx}=0$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} -kx=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx}=+\infty$.

Supposons $k<k'$ et $x\geqslant0$ : on a alors $kx\leqslant k'x$, puis $-kx\geqslant-k'x$ et enfin $e^{-kx}\geqslant e^{-k'x}$.

Si $x\leqslant0$, on a alors $kx\geqslant k'x$, puis $-kx\leqslant-k'x$ et enfin $e^{-kx}\leqslant e^{-k'x}$.

**2** **a.** Les fonctions $g_k$ ont pour limite 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

Elles sont croissantes sur $]-\infty\,;0]$ et décroissantes sur $[0\,;+\infty[$.

Elles vérifient $g_k(0)=1$.

**b.** $\Gamma_{0,1}$ est en bleu, $\Gamma_{0,5}$ est en violet, $\Gamma_1$ est en rouge, $\Gamma_3$ est en vert.

Si $k<k'$, alors $\Gamma_k$ est au-dessus de $\Gamma_{k'}$.

**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} -kx^2=\lim\limits_{x\to-\infty} -kx^2=-\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x)=0$.

$g'_k(x)=-2kxe^{-kx^2}$, ce qui est négatif si $x$ est positif et positif si $x$ est négatif.

D'où le sens de variations confirmé.

Si $k<k'$, on a alors $kx^2\leqslant k'x^2$, puis $-kx^2\geqslant-k'x^2$ et enfin $e^{-kx^2}\geqslant e^{-k'x^2}$, d'où la position relative confirmée.

## 15 En Sciences physiques : décharge d'un condensateur

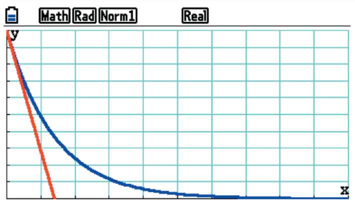
**1** $U_C(t)=10e^{-\frac{t}{1,4}}$.

**2** $U'_C(t)=-\dfrac{1}{1{,}4}\times10e^{-\frac{t}{1,4}}<0$, donc la fonction $U_C$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

| $t$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $U_C(t)$ | 10 ↘ | 0 |

$\lim\limits_{t\to+\infty} U_C(t)=0$

**3**




**4** **a.** L'équation réduite de $(T)$ : $y=-\dfrac{50}{7}t+10$.

**b.** $y=0\Leftrightarrow\dfrac{50}{7}t=10\Leftrightarrow t=\dfrac{70}{50}=1{,}4=\tau$.

**5** La tension à l'instant $t=1{,}4$ s est environ égale à 3,7 V.

$U_C(1{,}4)=10e^{-1}$ ; or, $e^{-1}\approx0{,}37$, la tension a baissé d'environ 63 %.

# Faire le point

**19** **1** **b.** **2** **c.** **3** **b.**

**20** **1** **b.** **2** **b.** **3** **b.** et **c.** **4** **b.** **5** **c.** **6** **a.**

**21** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Vrai.

**22** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Vrai.

# Exercices d'application

## 1 La fonction exponentielle

**23** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

**24** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Faux.

**25** **1** Faux : pour $a=b=0$, on a $e^{2a}=1$ et $e^{2b}=1$, on aurait donc $1<1$ si l'inégalité était vraie.

**2** Vrai : $\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}=\sqrt{e^{2a}}\times\sqrt{e^{2b}}=e^a\times e^b=e^{a+b}$.

**3** Vrai : pour $a = b = 0$, on a $e^{2a} + e^{2b} = 1 + 1 = 2$ et $2e^{a+b} = 2 \times 1 = 1$.

**4** Vrai : $\dfrac{1}{e^{-2a} + e^{a}} = \dfrac{e^{2a}}{e^{2a}\left(e^{-2a} + e^{a}\right)} = \dfrac{e^{2a}}{1 + e^{a}}$.

**26** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai.

**27** **1** **b.** **2** **c.** **3** **a.** **4** **a.**

**28** **a.** $f(x)^2 - g(x)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$

$= \dfrac{4}{4} = 1$ ;

**b.** $2\,f(x)^2 - 1 = 2\dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \dfrac{4}{4}$

$= \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = f(2x)$ ;

**c.** $2g(x) \times f(x) = 2\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \times \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$= \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = g(2x)$.

**29** **1** $f'(x) = \dfrac{e^{x+y}e^{x} - e^{x+y}e^{x}}{e^{2x}} = 0$, donc $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

**2** On a, par exemple, $f(0) = e^{y}$ et comme $f$ est constante, on aura pour tout $x$ réel, $f(x) = e^{y}$.

**3** D'après les deux questions précédentes, on a, pour tous réels $x$ et $y$ :

$$\frac{e^{x+y}}{e^{x}} = e^{y} \Leftrightarrow e^{x+y} = e^{x} \times e^{y}.$$

**4** $e^{-x+x} = e^{-x} \times e^{x} = e^{0} = 1$, donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$ ;

$e^{x-y} = e^{x} \times e^{-y} = e^{x} \times \dfrac{1}{e^{y}} = \dfrac{e^{x}}{e^{y}}$.

**30** **a.** e ; **b.** $e^3$ ; **c.** $\dfrac{2}{1+e}$.

**31** **a.** $f(x) = (e^{x} + e^{-x})^2 - (e^{x} - e^{-x})^2$

$= e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2) = 4$ ;

**b.** $g(x) = \dfrac{1 + e^{2x}}{1 - e^{x}} + \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{1 - e^{-x}}$

$= \dfrac{1 + e^{2x}}{1 - e^{x}} - \dfrac{e^{x}(e^{-x} + e^{x})}{1 - e^{x}} = 0$ ;

**c.** $h(x) = (e^{x} + 1)^2 - \sqrt{e^{4x}} - 1$

$= e^{2x} + 2e^{x} + 1 - e^{2x} - 1 = 2e^{x}$.

**32** **1** L'instruction « expexpand » développe les exponentielles.

$e^{2x+1} = (e^{x})^2 \times e$ ; $e^{3-x} = e^{3} \times e^{-x}$ ;

$e^{4x+2y} = (e^{x})^4 \times (e^{y})^2$ ; $e^{5x^2+2} = (e^{x^2})^5 \times e^{2}$.

**2** $e^{3x+2} = (e^{x})^3 \times e^{2}$ ; $e^{x-3} = e^{x} \times e^{-3}$ ;

$e^{1-4x} = e \times (e^{x})^{-4}$ ; $e^{3x^2+2x} = (e^{x^2})^3 \times (e^{x})^2$.

**33** **1** $e^{3x} - 2e^{x} = e^{x}(e^{2x} - 2)$

```
1 factoriser(expexpand(exp(4*x)+2*exp(x)))
                              exp(x)·( exp(x) ^3 +2)
2 factoriser(expexpand(exp(3*x)-exp(2*x)))
                              exp(x) ^2 ·(exp(x)-1)
3 factoriser(expexpand(3*exp(4*x)+exp(x)))
                              exp(x)·(3· exp(x) ^3 +1)
4 factoriser(expexpand(2*exp(2*x)+6*exp(6*x)))
                              2· exp(x) ^2 ·(3· exp(x) ^4 +1)
```

**34** L'instruction « linéariser » simplifie des produits d'exponentielles.

```
1 linearise(exp(x)^3*2*exp(1))
                              2·exp(3·x+1)
2 linearise(3*exp(x)^2*exp(x))
                              3·exp(3·x)
3 linearise(exp(1)*exp(x)^2)
                              exp(2·x+1)
4 linearise(exp(2*x)^4*exp(x+1))
                              exp(9·x+1)
```

## 2 Étude de la fonction exponentielle

**35** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux.

**36** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Faux.

**37** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai.

**38** **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

**b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.

**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} e^{X} = 1$.

**d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1 + e^{x}} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$.

**39** **a.** $\dfrac{e^{x^4}}{x^2} = \dfrac{e^{x^4}}{x^4} \times x^2$.

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ ;

de plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^4}}{x^2} = +\infty$.

**b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$,

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{x} - x) = \lim\limits_{x\to-+\infty} x\left(\dfrac{e^{x}}{x} - 1\right) = +\infty$.

**d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{1 + e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$.

**40** **1** $f'(x) = 1 - e^{x}$. On a $f'$ positive si $x$ est négatif et $f'$ négative si $x$ est positif.

**2**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | |

**3** $f(0)=2$ ; $f(2)=5-\mathrm{e}^2<0$. La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $[0\,;2]$ et change de signe sur cet intervalle, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $[0\,;2]$.
**4** On trouve $\alpha \approx 1{,}51$.
**5** **a.** On peut définir un variable *z* qui prend la valeur *x* − *a* puis qu'on affiche, ensuite on affiche *x*.
**b.** On obtient successivement 0,5 et 0,6 ; 0,50 et 0,51 ; 0,505 et 0,506.

**41** **1** **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+4}=\dfrac{1}{4}$, car $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0$ ;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^{2x}(1+4\mathrm{e}^{-2x})}=1.$$

**b.** On a bien trouvé $\dfrac{1}{4}$.
**c.** L'instruction est la même, mais elle se termine par $+$ *infinity*.

**2** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2\mathrm{e}^{x}-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x}(2-3\mathrm{e}^{-x})}=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{1-5\mathrm{e}^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{-x}-5\mathrm{e}^{x})}=0.$$

**42** **1** On trouve *a* environ égal à 2,7 et l'abscisse du point de contact égale à 1.
**2** $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$. L'équation de la tangente au point d'abscisse *k* est : $y=f'(k)(x-k)+f(k)$.
On obtient $y=(\mathrm{e}^k-a)(x-k)+\mathrm{e}^k-ak$.
**3** Cette droite est l'axe des abscisses si, et seulement si,

$$\begin{cases}\mathrm{e}^k-a=0\\-k(\mathrm{e}^k-a)+\mathrm{e}^k-ak=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^k-a=0\\\mathrm{e}^k(1-k)=0\end{cases}.$$

On obtient alors $k=1$ ; $a=\mathrm{e}$.

**43** **1** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n-1}{n^2}=1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2}\right)=\mathrm{e}$.

**2** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\pi-\dfrac{1}{n}\right)=\pi$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\pi-\dfrac{1}{n}\right)=-1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(\cos\left(\pi-\dfrac{1}{n}\right)\right)=\mathrm{e}^{-1}$.

**44** **1** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, donc cette suite est géométrique de premier terme e et de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
**2** Comme $0<q<1$ cette suite converge vers 0.

**3** $$S_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\mathrm{e}\times\frac{1-\mathrm{e}^{-n-1}}{\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}\left[1-\mathrm{e}^{-n-1}\right]$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-n-1}\right]=1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}-1}$.

**45** **1** La suite $(u_n)$ semble décroissante et tendre vers 0.
**2** On a $u_0>0$ par hypothèse. Supposons que pour un entier *n*, on a $u_n>0$ et démontrons que $u_{n+1}>0$. On a $u_{n+1}=u_n\mathrm{e}^{-u_n}$ avec $u_n>0$ et $\mathrm{e}^{-u_n}>0$, donc $u_{n+1}>0$.
**3** Tous les termes sont non nuls : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-u_n}$ avec $-u_n<0$, donc $\mathrm{e}^{-u_n}<1$.
Cette suite est (strictement) décroissante.
**4** Cette suite et décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell$.
La fonction $x\longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ étant continue, on a :

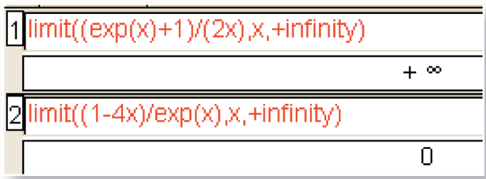
$$\ell\,\mathrm{e}^{-\ell}=\ell\Leftrightarrow\ell(\mathrm{e}^{-\ell}-1)=0\Leftrightarrow\ell=0.$$

## 3 Croissance comparée

**46** **1** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{1}{2x}\right)=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-4\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)=0.$$

**2**




**47** **1** On conjecture que la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$ est $+\infty$.

**2** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\dfrac{\mathrm{e}^{nt}}{(nt)^n}=\dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\right)^n$.

**3** Comme $t=\dfrac{x}{n}$, *t* tend vers $+\infty$ lorsque *x* tend vers $+\infty$.

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\right)^n=+\infty$.

**4** $x^n\mathrm{e}^x=(-X)^n\mathrm{e}^{-X}=(-1)^n\dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X}$.

**5** $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x=\lim\limits_{X\to+\infty}(-1)^n\dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X}=0$.

**48** **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}\right)=+\infty$ ;

**b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+4x-1)\mathrm{e}^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2\mathrm{e}^x+4x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)$
$=0$ ;

**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x^4}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x^4}{\mathrm{e}^x}\right)=1$ ;

**d.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-x^2)^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3\mathrm{e}^{-x}-x^2\mathrm{e}^{-x})=0$
(d'après l'exercice précédent, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x=0$, ce qui donne aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}=0$).

**49** **1** **b.** **2** **c.** **3** **c.**

**50** **1** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\times\sqrt{x}$, donc,

comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}=+\infty$.

**2** Pour tout $x \geqslant 1$, $x \geqslant \sqrt{x}$, donc $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{e^x}{x} \leqslant \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, par comparaison on aura $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

**51** On pose $X = 3x$.

**1** $\dfrac{e^{3x}}{2x} = \dfrac{e^X}{\dfrac{2X}{3}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{e^X}{X}$.

Or, lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $X$ également.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{2x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{3}{2} \times \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

**2** On pose $X = 2x$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2X}}{4x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

**3** On pose $X = 3x$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\dfrac{X}{3}}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{3} \times \frac{X}{e^X} = 0.$$

**4** On pose $X = x^2$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{\sqrt{X}} = +\infty$.

**52** **1** $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x} + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{e^{2x}}{x^2}\left(1 - \dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}{\dfrac{e^{2x}}{x^2}\left(1 - \dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)} = 1.$$

**2** $$\lim_{x \to +\infty} (e^{3x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}} - 1\right) = +\infty.$$

**3** $$\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$= +\infty.$$

## 4 Dérivée de $x \longmapsto \exp(u(x))$

**53** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Faux.

**54** **1** Faux ; si $u$ est décroissante, $f$ également ; en effet $f' = (e^u)' = u'e^u$.
**2** Vrai, car $u'$ est positive.
**3** Vrai, car une exponentielle est toujours strictement positive.
**4** Faux, car $f' = (e^{-u})' = -u'e^{-u}$ et si $u'$ est négative, $-u'$ sera positive et $f$ sera croissante.

**55** **1 Première méthode**

**a.** $f'(x) = \dfrac{ne^{nx}(e^x)^n - e^{nx} \times ne^x(e^x)^{n-1}}{(e^x)^{2n}} = 0.$

**b.** La dérivée de $f$ est nulle pour tout réel, donc la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = 1$, donc pour tout réel $x$, $f(x) = 1$.

**c.** On a $\dfrac{e^{nx}}{(e^x)^n} = 1 \Leftrightarrow (e^x)^n = e^{nx}$.

**2 Seconde méthode**

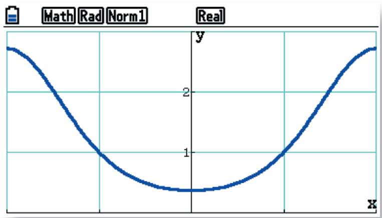
On cherche à démontrer que pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n$, $e^{nx} = (e^x)^n$.

Pour $n = 0$, chacune des deux expressions vaut 1, donc l'égalité est vraie.
Supposons que pour un entier $n$, on a $e^{nx} = (e^x)^n$, démontrons que $e^{(n+1)x} = (e^x)^{n+1}$.
$e^{(n+1)x} = e^{nx+x} = e^{nx} \times e^x = (e^x)^n \times e^x = (e^x)^{n+1}$.
Par récurrence sur $n$, on a bien démontré la propriété pour tout entier naturel $n$.
Si $n$ est négatif, alors $-n$ est un entier naturel, donc, d'après ce qui précède, $e^{-nx} = (e^x)^{-n}$.
Or, $e^{-nx} = \dfrac{1}{e^{nx}}$ et $(e^x)^{-n} = \dfrac{1}{(e^x)^n}$, d'où l'égalité des deux expressions dans ce cas également.

**56** **1** Comme la fonction cosinus est paire et de période $2\pi$, la fonction $f$ l'est également. On a donc, pour tout réel $x$, $f(-x) = f(x)$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$.
**2** $f'(x) = \sin x e^{-\cos x} \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ (c'est le signe du sinus).

| $x$ | $0$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $e^{-1}$ ↗ | $e$ |

**3**




**4** Tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ :

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

On obtient $y = 1\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = x - \dfrac{\pi}{2} + 1$.

**57** On se place sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**1** La limite de la fonction tangente en $-\dfrac{\pi}{2}$ est $-\infty$, la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ est $+\infty$.

**2** **a.** $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} e^{\tan x} = +\infty$.

**b.** $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} e^{\tan x} = 0$.

**c.** $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$, donc la fonction est continue en $-\dfrac{\pi}{2}$.

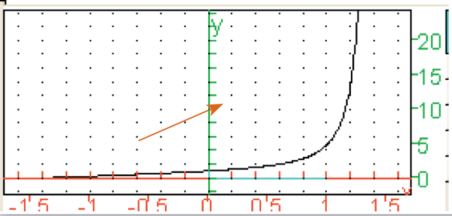
**3 a.**

```
1 f(x):=exp(tan(x))
                    x  -> exp(tan(x))
2 deriver(f(x),x)
                    exp(tan(x))*(1+ tan(x)^2)
```

**b.** La dérivée est clairement strictement positive, donc $f$ est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**c. d.**

```
3 graphe(f(x),x=-pi/2..pi/2)
```




# Prépa Bac

## Exercices guidés

**58** **1 a.** $$f'(x)=\frac{-4e^{x}(e^{2x}+1)+4e^{x}\times 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$
$$=\frac{4e^{3x}-4e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}.$$

**b.** On a $4e^{x}>0$ et $(e^{2x}+1)^2>0$, donc la dérivée est du signe de $(e^{2x}-1)$.

Or, $e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$. La fonction $f$ est bien croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

**2** On montre que $f$ est paire :

$$f(-x)=1-\frac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1}=1-\frac{\dfrac{4}{e^{x}}}{\dfrac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}$$
$$=1-\frac{4e^{x}}{1+e^{2x}}=f(x),$$

d'où la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

**59** **Partie A**

**1** $g'(x)=e^{x}-1$, ce qui est positif sur $[0\,;+\infty[$ et négatif sur $]-\infty\,;0]$.

**2**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

Le minimum de $g$ est 0, donc pour tout réel $x$, $g(x)\geqslant 0$.

**3** On a d'après ce qui précède :
$$e^{x}-x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x}-x\geqslant 1>0.$$

**Partie B**

**1** Pour tout réel $x$ tel que $0\leqslant x\leqslant 1$, on a par croissance de $f$, $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$ or $f(0)=0$ et $f(1)=1$, donc $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, ce qui signifie $f(x)\in[0\,;1]$.

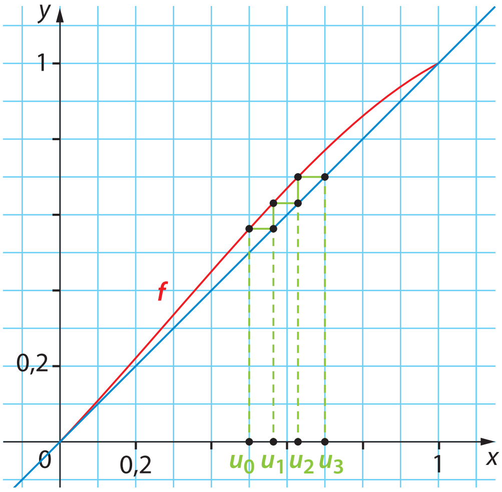
**2 a.** $$f(x)-x=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}-\frac{x(e^{x}-x)}{e^{x}-x}$$
$$=\frac{e^{x}-1-xe^{x}+x^2}{e^{x}-x}=\frac{(1-x)g(x)}{e^{x}-x}.$$

**b.** Comme $x\in[0\,;1]$, $(1-x)\geqslant 0$ et, d'après la partie **A**, $e^{x}-x>0$ et $g(x)\geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $x\in[0\,;1]$, $f(x)-x\geqslant 0$, donc la courbe de $f$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $[0\,;1]$.

**Partie C**

**1**




**2** Par récurrence sur $n$, montrons que pour tout $n$, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$.

**Initialisation** : $u_0=\dfrac{1}{2}$, donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons que pour un $n$ arbitrairement choisi, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$ et démontrons que $\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Comme $f$ est croissante sur $[0\,;1]$, on a :
$$f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(u_n)\leqslant f(1),$$

mais d'après la partie **A**, $\dfrac{1}{2}\leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ; donc on obtient $\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. Par récurrence, on a montré la propriété pour tout entier $n$.

D'après la partie **A**, on sait que pour tout $x\in[0\,;1]$, $x\leqslant f(x)$, donc comme $u_n\in[0\,;1]$ on a $u_n\leqslant f(u_n)$, c'est-à-dire $u_n\leqslant u_{n+1}$.

Ainsi, on a montré que pour tout entier $n$,
$$\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$$

**3** La suite $(u_n)$ est croissante et majorée (par 1), donc elle converge vers une limite $\ell$ et comme $f$ est continue, on a :

$$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \frac{e^{\ell}-1}{e^{\ell}-\ell}=\ell \Leftrightarrow (1-\ell)(e^{\ell}-\ell-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (1-\ell)g(\ell)=0.$$

D'après la partie **A**, $g(\ell)=0 \Leftrightarrow \ell=0$, c'est impossible, car on doit avoir $\dfrac{1}{2}\leqslant \ell\leqslant 1$.

*Conclusion* : $\ell=1$.

**60** **Partie 1**

**1** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(1-x+e^{-x})=-\infty$.

**2** $g'(x)=e^{x}-(e^{x}+xe^{x})=-xe^{x}$, donc la dérivée est positive si $x$ est négatif et négative si $x$ est positif.

**3**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**4** **a.** La fonction $g$ est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ ; de plus, $g(0)=2>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, donc il existe un réel unique $\alpha$ appartenant à $[0\,;+\infty[$, tel que $g(\alpha)=0$.

**b.** Avec la calculatrice, on trouve $1{,}27 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}28$.

**c.** On a $g(\alpha)=0$, donc $\mathrm{e}^{\alpha}-\alpha\mathrm{e}^{\alpha}+1=0$, donc :

$$\mathrm{e}^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

**5** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ et $g$ est croissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $g$ est strictement positive sur cet intervalle.

Finalement, si $x\in\,]-\infty\,;\alpha]$, $g(x)\geqslant 0$ et si $x\in[\alpha\,;+\infty[$, $g(x)\leqslant 0$.

### Partie 2

**1** $A'(x)=\dfrac{4(\mathrm{e}^x+1)-4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

ce qui est bien du signe de $g(x)$.

**2**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $A(x)$ | $0$ | ↗ | $4(\alpha-1)$ | ↘ | |

$$A(\alpha)=\frac{4\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}=\frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=4(\alpha-1).$$

### Partie 3

**1** L'aire du rectangle est égale à :

$$x\times f(x)=\frac{4x}{\mathrm{e}^x+1}=A(x).$$

Cette aire est maximale lorsque $A$ atteint son maximum, c'est-à-dire en $\alpha$.

Cette aire vaut $4(\alpha-1)$.

**2** Tangente à la courbe de $f$ en $M$ :

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha).$$

$$f'(x)=\frac{-4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2},$$

donc $y=\dfrac{-4\mathrm{e}^{\alpha}}{(\mathrm{e}^{\alpha}+1)^2}(x-\alpha)+\dfrac{4}{(\mathrm{e}^{\alpha}+1)}$.

Cette tangente a pour coefficient directeur :

$$\frac{-4\mathrm{e}^{\alpha}}{(\mathrm{e}^{\alpha}+1)^2}=\frac{-\dfrac{4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2}=\frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

La droite $(PQ)$ a pour coefficient directeur :

$$m=\frac{f(\alpha)}{-\alpha}=\frac{-4}{\alpha(\mathrm{e}^{\alpha}+1)}=\frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

Ces deux droites ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

## Exercices d'entraînement

**61** **1** **b.** $\mathrm{e}^x-1=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=1\Leftrightarrow x=0$.

**2** **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}=2.$$

**3** **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\mathrm{e}^x-1)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0}2\mathrm{e}^x=2$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=+\infty$ (asymptote verticale).

**4** **a.** $g'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)-2\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}=\dfrac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.

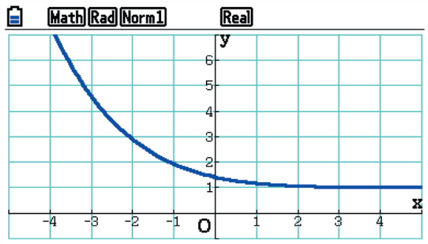
**62** **1** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Donc la courbe de $f$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

**2** $f'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}<0$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ |

**3**




**4** $y=f'(0)x+f(0)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}x+\sqrt{2}$.

**63** **1** On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\mathrm{e}^{nx}=1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\mathrm{e}^{nx}}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{nx}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}n\times\dfrac{\mathrm{e}^{nx}}{nx}$. En posant $y=nx$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}nx=+\infty$, donc $\lim\limits_{y\to+\infty}n\dfrac{\mathrm{e}^y}{y}=+\infty$.

*Conclusion* : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{nx}}{x}=+\infty$.

**2** $f'_n(x)=\dfrac{nx\mathrm{e}^{nx}-\mathrm{e}^{nx}}{x^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{nx}(nx-1)}{x^2}$. Comme $\mathrm{e}^{nx}$ et $x^2$ sont positifs, la dérivée est du signe de $(nx-1)$, c'est-à-dire négative pour tout $x\in\left]0\,;\dfrac{1}{n}\right]$ et positive pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{n}\,;+\infty\right[$.

La fonction $f_n$ est donc décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{n}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{n}\,;+\infty\right[$.

**3** D'après la question **2**, la fonction $f_n$ admet bien un minimum en $x=\dfrac{1}{n}$ qui vaut $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=n\mathrm{e}$.

On a donc $x_n=\dfrac{1}{n}$ et $y_n=n\mathrm{e}$.

**4** $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ ; $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$. La suite $(x_n)$ converge vers 0, $(y_n)$ est divergente.

**64** **Partie A**

**1** $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, qui est positive si $x$ est positif et négative sinon.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Le minimum de $g$ est 0, donc $g$ est positive sur $\mathbb{R}$.

**2** On a $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$, donc $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$.

**Partie B**

**1 a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} = f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1} = -1$.

**b.** La courbe de $f$ admet deux asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$.

**2** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - x - x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \dfrac{(1 - x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\mathrm{e} - 1}$ | $\searrow$ | $0$ |

**3 a.** $(T) : y = x$.

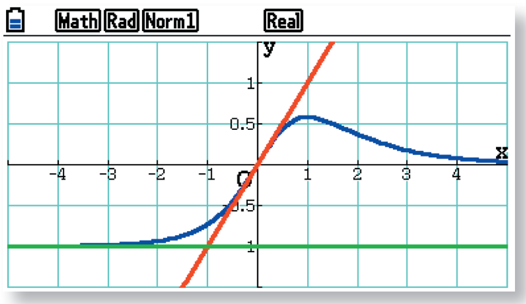
**b.** On étudie le signe de $f(x) - x$.

$f(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{x(1 - \mathrm{e}^x + x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{-xg(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

Or, $g(x)$ et le dénominateur sont positifs, donc le signe est celui de $-x$.

*Conclusion* : la courbe de $f$ est au-dessus de $(T)$ sur $]-\infty\,;0]$ et en dessous sur $[0\,;+\infty[$.

**4**




**65** **1** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc la courbe de $f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

**2 a.** $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x} - (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.

**b.** $\Delta = 8$, donc les racines sont :

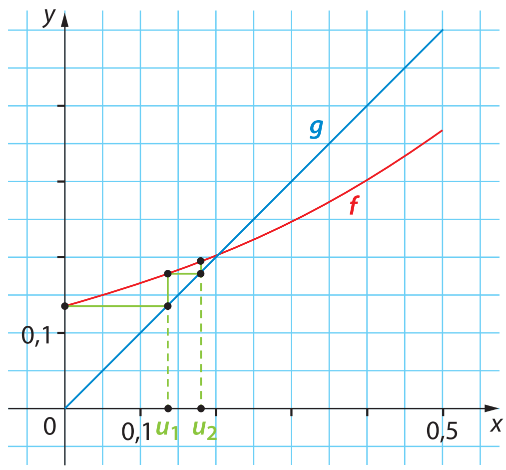
$x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

| $x$ | $-1$ | | $1 - \sqrt{2}$ | | $1 + \sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(x_1)$ | $\searrow$ | $f(x_2)$ | $\nearrow$ | |

**3** $(T) : y = -x + 1$

**4**


**66** **1 a. b.** La suite $(u_n)$ semble converger vers 0,2.




**2 a.** La fonction $f$ est clairement croissante sur $[0\,;0{,}5]$ $(f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-2} > 0)$.

▸ **Initialisation :** $0 \leqslant u_0 \leqslant 0{,}5$.

**Hérédité :** supposons que pour un entier $n$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}5$, démontrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5$.

Par croissance de $f$, on a $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(0{,}5)$, donc $\mathrm{e}^{-2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5$.

**Conclusion :** pour tout entier $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}5$.

▸ **Initialisation :** on a $u_0 = 0$ et $f(u_0) = u_1 = \mathrm{e}^{-2}$, donc $u_0 \leqslant u_1$.

**Hérédité :** supposons que pour un entier $n$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$, démontrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

Par croissance de $f$, on a $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

**Conclusion :** pour tout entier $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5$.

**b.** La suite $(u_n)$ est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite $\ell$.

**c.** $\ell \approx 0{,}203$.

**67** **1 a.** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

**b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\sqrt{1 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} \times x\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}} = 0$.

**2** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sqrt{1+x} + \mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$= \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{-1-2x}{2\sqrt{1+x}}\right).$

La dérivée est du signe de $-1-2x$, c'est-à-dire positive sur $\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

**3** D'après le signe de la dérivée, $f$ est croissante, puis décroissante, donc elle admet un maximum pour $x = -\dfrac{1}{2}$.

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}.$

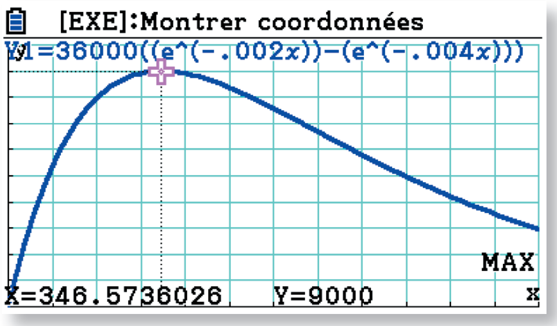
**4**

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**68** **1** **a.** $V = 36\,000(\mathrm{e}^{-2,4} - \mathrm{e}^{-4,8}) \approx 2\,970\ \mathrm{cm}^3$.

**b.** Lorsque $v = 0$, $V = 0$. Lorsque l'outil n'est pas en mouvement, il n'y a pas de copeaux.

**2** **a.**




Le maximum est atteint pour $x$ environ égal à 347 et il vaut 9 000.

**b.** $f'(x) = 36\,000(-0{,}002\mathrm{e}^{-0{,}002x} + 0{,}004\mathrm{e}^{-0{,}004x})$

$= 72\mathrm{e}^{-0{,}002x}(-1 + 2\mathrm{e}^{-0{,}002x}).$

Avec la calculatrice, on a $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0\,;347]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[347\,;1200]$.

**c.** La fonction $f$ est croissante sur $[0\,;347]$ et décroissante sur $[347\,;1200]$.

Elle admet bien un maximum en $x \approx 347$.

**3** Comme la fonction « volume de copeaux » est la fonction $f$, il y a bien une vitesse de coupe conduisant à un volume de copeaux maximal, c'est environ $347\ \mathrm{m \cdot min^{-1}}$.

**69** **1** $f(0) = 1$, donc $c = 1$.

$f'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$

$= \mathrm{e}^{-x}(-ax^2 + (2a-b)x + b - 1)$ ;

$f'(0) = 2$, donc $b - 1 = 2$, c'est-à-dire $b = 3$.

On a donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-ax^2 + (2a-3)x + 2)$.

$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-ax^2 + (2a-3)x + 2)$

$+\mathrm{e}^{-x}(-2ax + 2a - 3)$

$= \mathrm{e}^{-x}(ax^2 + (-4a+3)x + (2a-5))$ ;

$f''(0) = -1$, donc $2a - 5 = -1$, c'est-à-dire $a = 2$.

**2** La courbe n° 1, car la fonction vaut 1 en 0 et le coefficient directeur de la tangente en 0 vaut 2.

## Problèmes

**70** **Partie A**

**1** $f'(x) = (-0{,}25x + 2)\mathrm{e}^{-x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 8$, est positive pour $x \in [4\,;8]$ et négative pour $x \in [8\,;20]$.

**2**

| $x$ | $4$ | | $8$ | | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $4\mathrm{e}^3$ | $\searrow$ | $16$ |

**Partie B**

**1** Bénéfice $= f(x)$.

**2** Le prix d'une centrale doit être de 800 € pour réaliser un bénéfice maximal. Ce bénéfice vaut environ 80,34 centaines d'euros, donc 8 034 €, à l'euro près.

**71** **Partie A**

**1** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^0}{h} = \exp'(0) = 1.$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

**2** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1} = 0.$

**Partie B**

**1** La somme proposée est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 de raison $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

Donc :

$\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right] = \dfrac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}.$

**2** $u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = (1 - \mathrm{e})\dfrac{\frac{1}{n}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$

$= (\mathrm{e} - 1)f\left(\dfrac{1}{n}\right).$

**3** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e} - 1$.

**72** **1** $P(X \leqslant 2\,000) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}63$.

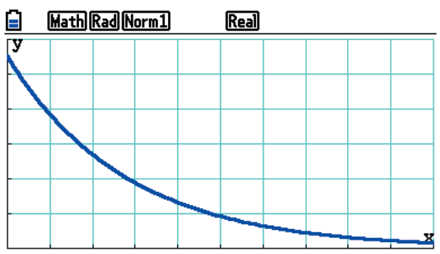
**2** $P(X \geqslant 10\,000) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-5}) = \mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}0067$.

**73** **1** $I(x) = 110\mathrm{e}^{-\frac{x}{28}}$.

$I'(x) = -\dfrac{110}{28}\mathrm{e}^{-\frac{x}{28}} < 0$, donc la fonction $I$ est décroissante.

| $x$ | $0$ | | $100$ |
|---|---|---|---|
| $I(x)$ | $110$ | $\searrow$ | $3{,}09$ |

**2**



**3** La lumière a perdu la moitié de son intensité à environ 19,4 m de profondeur.

**74** **1** $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. La dérivée est positive si $x$ est positif, négative si $x$ est négatif.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

D'après le tableau de variations, on peut dire que $f$ est positive sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathrm{e}^x - (x+1) \geqslant 0$, donc $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.

**2** $1 + y \leqslant \mathrm{e}^y$, donc $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, ce qui équivaut pour tout $x > 1$ à $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \geqslant 1 - x$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

**3** **a.** On pose $x = \dfrac{1}{n}$ et d'après **1**, $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ ;

donc $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

**b.** $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}}$ (on a bien $\dfrac{1}{n+1} < 1$), donc on obtient $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$, donc $\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

**4** **a.** On a, d'après les questions précédentes, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, c'est-à-dire :

$$u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant u_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 0 \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{3}{n}.$$

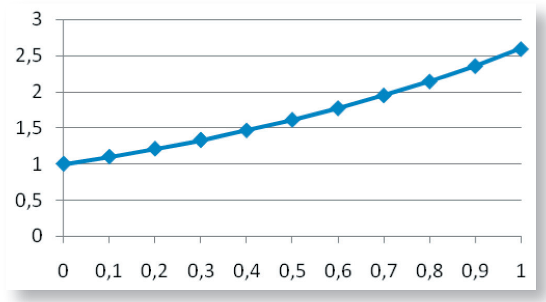
**b.** Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathrm{e} - u_n) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la suite $(u_n)$ converge vers e.

**75** **Partie B**

**1** **a.** $f(x_{k+1}) = f\left(x_k + \dfrac{1}{10}\right) \approx f(x_k) + 0{,}1 f(x_k)$

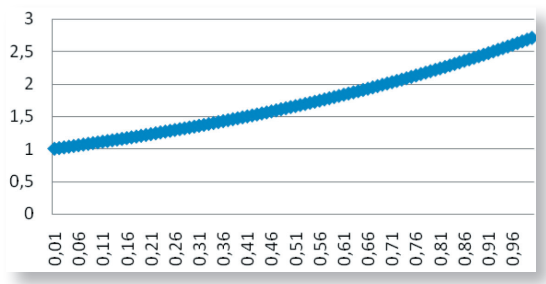
donc $f(x_{k+1}) \approx 1{,}1 \times f(x_k)$.

**b.**




**c.** On a $u_{k+1} \approx 1{,}1 u_k$ avec $u_0 = 1$, donc $u_k \approx 1{,}1^k$.

**2** **a.** $f(x_{k+1}) \approx 1{,}01 \times f(x_k)$.




**b.** $u_k \approx 1{,}01^k$.

**76** **Partie A**

**1** $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. La dérivée est positive lorsque $x$ est positif.

Donc $f$ est croissante sur $[0\,; +\infty[$ et l'on a $f(0) = 1$.

**2** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

La fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$, grâce à sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$ on peut en déduire que l'équation $f(x) = n$, avec $n > 0$, a une unique solution sur $[0\,; +\infty[$.

**3** **a.** $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

**b.** $f(x) = 2$ pour $\alpha_2 \approx 1{,}15$ ; $f(x) = 3$ pour $\alpha_3 \approx 1{,}51$.

**Partie B**

**1** On a $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n + 1$. Si on avait $\alpha_n > \alpha_{n+1}$, alors par croissance de $f$, on aurait $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$, c'est-à-dire $n > n + 1$, ce qui est faux. Par l'absurde, on a montré que, pour tout entier non nul $n$, $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, c'est-à-dire la suite $(\alpha_n)$ est croissante.

**2** Supposons la suite $(\alpha_n)$ majorée par $A$. Alors, pour tout entier non nul $n$, on aurait $\alpha_n \leqslant A$, ce qui entraînerait $f(\alpha_n) \leqslant f(A)$, mais cette inégalité contredit la limite de $f$ en $+\infty$.

*Conclusion* : cette suite est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

**3** $f(\alpha_n) = n$, donc $\dfrac{f(\alpha_n)}{\mathrm{e}^{\alpha_n}} = \dfrac{n}{\mathrm{e}^{\alpha_n}}$ ;

donc $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_n} - \alpha_n}{\mathrm{e}^{\alpha_n}} = \dfrac{n}{\mathrm{e}^{\alpha_n}} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^{\alpha_n}} = \dfrac{n}{\mathrm{e}^{\alpha_n}}$.

Or, comme $(\alpha_n)$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers l'infini, le quotient $\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^{\alpha_n}}$ tend vers 0.

*Conclusion* : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_n}}{n} = 1$.

**77** **1** $N(0) = \dfrac{1}{\dfrac{k_c + C}{k_d}} = 1{,}2$ ; donc $\dfrac{k_c}{k_d} + C = \dfrac{10}{12}$,

donc $C = \dfrac{5}{6} - \dfrac{k_c}{k_d}$.

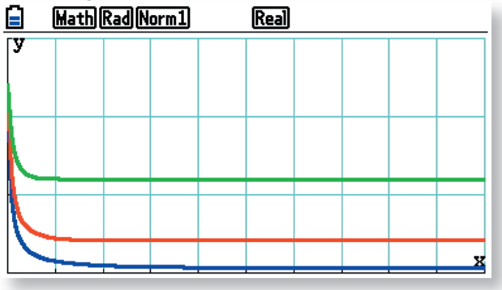
**2** $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \dfrac{k_d}{k_c}$.

**3** $$N'(t) = \frac{k_d \mathrm{e}^{k_d^t}\left(\dfrac{k_c}{k_d}\mathrm{e}^{k_d^t} + C\right) - \mathrm{e}^{k_d^t}\left(k_c \mathrm{e}^{k_d^t}\right)}{\left(\dfrac{k_c}{k_d}\mathrm{e}^{k_d^t} + C\right)^2}$$

$$= \frac{C k_d \mathrm{e}^{k_d^t}}{\left(\dfrac{k_c}{k_d}\mathrm{e}^{k_d^t} + C\right)^2}.$$

Si la constante $C$ est négative, la fonction $N$ est strictement décroissante sur $[0\,; +\infty[$, sinon elle est croissante.

Cas pour $C$ négative :



**78** **1** **a.** $v(t) = 10 - Ce^{-t}$.

**b.** $v(0) = 1$, donc $C = 9$.

**c.** $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 10$.

La vitesse limite est de 10 mètres par seconde.

**2** La distance parcourue sera également de 500 mètres. On trouve que le parachute doit être déclenché au bout de 50 s (au bout de 51 s, il sera en dessous de 500 m).

**3** On constate que $v'(t) = Ce^{-t}$.

D'où $v'(t) + v(t) = 10$.

**79** **1** $v(0) = 1$.

D'où :

$$\frac{-\sqrt{10}(K-1)}{2-2K} = 1 \Leftrightarrow K + 1 = -0{,}2\sqrt{10} + 0{,}2\sqrt{10}\,K$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1 + 0{,}2\sqrt{10}}{-1 + 0{,}2\sqrt{10}}.$$

**2** $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. La vitesse limite est donc sensiblement plus faible.

**3** $v'(t) = \dfrac{-40Ke^{\sqrt{10}\,t}}{\left(2 - 2Ke^{\sqrt{10}\,t}\right)}$

et $v^2(t) = \dfrac{10K^2e^{\sqrt{10}\,t} + 10 + 20Ke^{\sqrt{10}\,t}}{\left(2 - 2Ke^{\sqrt{10}\,t}\right)^2}$.

$$v'(t) + v^2(t) = \frac{10K^2e^{\sqrt{10}\,t} + 10 - 20Ke^{\sqrt{10}\,t}}{\left(2 - 2Ke^{\sqrt{10}\,t}\right)^2} = \frac{10}{4}.$$

**80** **1** On a :

$P(0) = 5{,}3 \Leftrightarrow 0{,}03y_0 = 0{,}00053y_0 + (5{,}3r - 0{,}00053y_0)$

$\Leftrightarrow y_0 = 5{,}3$.

**2** $P(t) = \dfrac{0{,}159}{0{,}00053 + 0{,}02947e^{-0{,}03t}}$.

$P$ est strictement croissante (sa dérivée est strictement positive).

**3** On teste le modèle avec un tableur :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | t | P(t) |
| 2 | 0 | 5,3 |
| 3 | 40 | 16,9037562 |
| 4 | 80 | 49,6338631 |
| 5 | 120 | 119,080599 |
| 6 | 160 | 205,817078 |
| 7 | 180 | 239,781522 |
| 8 | 190 | 252,940794 |

Le modèle est satisfaisant sur cette période.

**4** **a.** La limite est $\dfrac{r}{a} = 300$. La population ne peut pas dépasser 300 millions d'habitants.

**b.** Le modèle donne 263 millions pour 2000 et 272 pour 2010 : il n'est plus satisfaisant.

**81** **Partie A**

**1** $f'_1(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.

Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, c'est-à-dire positive sur $\left[0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;+\infty\right[$ ; donc la fonction $f_1$ est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;+\infty\right[$.

**2** $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{u \to +\infty} ue^{-u} \times \dfrac{1}{\sqrt{u}} = 0$.

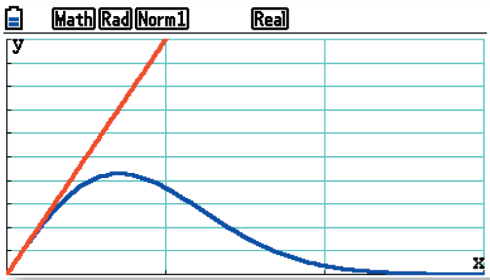
La courbe représentative de $f_1$ est asymptote à l'axe des abscisses en $+\infty$.

**3**

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_1(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ | $\searrow$ | |

**4** $f_1(x) - x = x(e^{-x^2} - 1)$ ; or, $x$ est positif, donc $0 < e^{-x^2} < 1$ ; donc cette différence est négative. La courbe $\mathscr{C}_1$ est en dessous de la droite $\Delta$.

**5**



**Partie B**

**1** $f'_3(x) = 3x^2 \times e^{-x^2} + x^3 \times (-2x)e^{-x^2}$

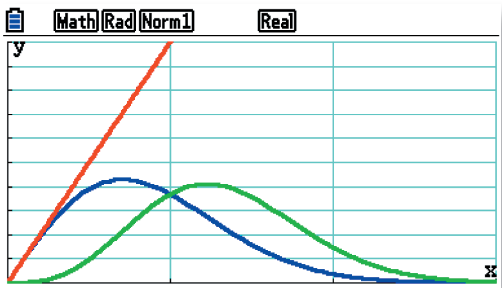
$= x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$

ce qui est du signe de $3 - 2x^2$.

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_3(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_3(x)$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,e^{-1{,}5}$ | $\searrow$ | |

**2** $f_3(x) - f_1(x) = x(x^2 - 1)e^{-x^2}$. Comme $x$ est positif, cette différence est positive si $x$ est supérieur ou égal à 1. La courbe $\mathscr{C}_3$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_1$ sur $[0\,;1]$ et au-dessus sur $[1\,;+\infty[$.

**3**



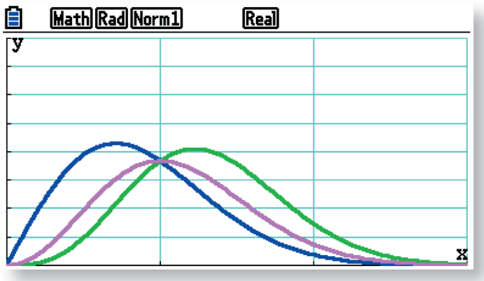
**Partie C**

**1** $f'_n(x) = nx^{n-1} \times e^{-x^2} + x^n \times (-2x)e^{-x^2}$

$= x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$, ce qui est du signe de $n-2x^2$.

La dérivée est positive sur $\left[0\,;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et négative sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\,;+\infty\right[$, donc la fonction $f_n$ est croissante sur $\left[0\,;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\,;+\infty\right[$.

**2** Si $n = 2$, alors $\sqrt{\frac{n}{2}} = 1$ ; or, $f_n(1) = e^{-1}$. Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point $S_2(1\,; e^{-1})$.




**82** **1** La courbe de $f_a$ semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, cette fonction semble décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Elle semble admettre un minimum en 0 qui vaut $a$.

**2** $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x}{a}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{x}{a}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

**3** $f_a(-x) = \frac{a}{2}\left(\exp\left(\frac{-x}{a}\right) + \exp\left(\frac{x}{a}\right)\right) = f_a(x)$,

donc cette fonction est paire.

Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**4** $f'_a(x) = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a}\left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(\frac{-x}{a}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\left(\exp\left(\frac{2x}{a}\right) - 1\right)$.

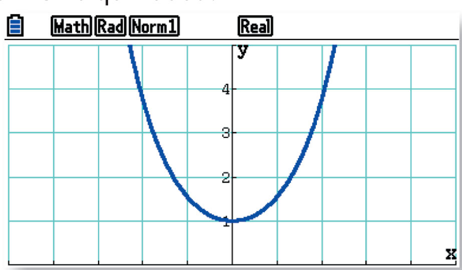
Or, si $x \geqslant 0$, $\exp\left(\frac{2x}{a}\right) \geqslant 1$ ; donc $f'_a(x) \geqslant 0$, par symétrie, la dérivée est négative si $x$ est négatif.

**5**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_a(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_a(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $a$ | ↗ | $+\infty$ |

**6** D'après le tableau de variations, $f_a$ admet un minimum en 0 qui vaut $a$.

**7**




**83** **1** $f(0) = 1 = e^0$.

**2** La courbe de la fonction exponentielle semble être au-dessus de celle de la fonction polynôme.

**3** $g'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ ; $g''(x) = e^x - 1 - x$ ;

$g^{(3)}(x) = e^x - 1$.

**4** **a. b. c.** $g^{(3)}(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x$ positif et négative sinon.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g^{(3)}(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g''(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

On en déduit que, pour tout réel $x$, $g''(x) \geqslant 0$.

**5** **a. b.**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |

On en déduit que, pour tout réel $x$ positif, $g'(x) \geqslant 0$ et, pour tout réel $x$ négatif, $g'(x) \leqslant 0$.

**6** **a. b.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

On déduit de ce tableau de variations que la fonction $g$ est positive pour tout réel $x$ ; donc la courbe de la fonction exponentielle est bien au-dessus de celle de la fonction $f$.

**7** **a.** Dans la colonne D, on calcule la valeur absolue de la différence des deux expressions, c'est-à-dire la distance entre les deux courbes.

**b.** Toutes les valeurs de ce tableau comprises entre 0 et 0,38 (valeurs incluses).

## Pistes pour l'accompagnement personnalisé

### Revoir les outils de base

**84** **a.** Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$.

**b.** $\exp(0) = 1$ ; $\exp(1) = e$. **c.** $y = x + 1$.

### Les savoir-faire du chapitre

**85** **a.** $e^{20}$ ;

**b.** $e^{-3}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - 2e^x$

$= e^{2x-3} + e^{-2x-3} + 2e^{-3} - 2e^x$ ;

**c.** $e^{x+2}$.

**86** **a.** 0 ; **b.** 1 ; **c.** $+\infty$ ; **d.** 1.

**87** **1** $f'(x) = (2x + 2)e^{x^2 + 2x}$.

**2** $f'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$.

**3** $f'(x) = \dfrac{(x + 2)e^x}{(1 - 2e^x)^2}$.

**88** **1** $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1 + 3x)e^{3x}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{1}{3e}$ | ↗ | |

**2** $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | |

**3** $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} < 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | |

## Approfondissement

**89** **1**

| Années | Population |
|---|---|
| 0 | 5,30 |
| 10 | 7,15 |
| 20 | 9,66 |
| 30 | 13,04 |
| 40 | 17,60 |
| 50 | 23,75 |
| 60 | 32,06 |

Les valeurs obtenues sont proches de celles du tableau.

**2** $P'(t) = 0{,}03P(t)$.

**3** La limite de $P(t)$ en $+\infty$ est $+\infty$.

Ce modèle ne peut être valable sur une longue période.

**4** Évolution d'une population de bactéries, etc.

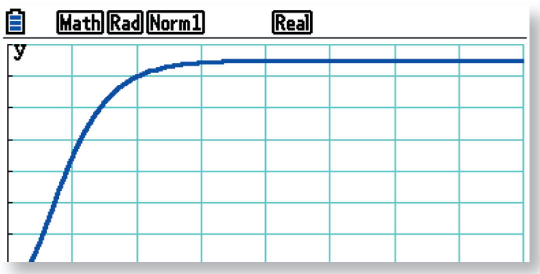
**90** **1** $\lim\limits_{x \to +\infty} M(t) = C$.

**2** Cette limite peut être représentée par la masse du rongeur à l'âge adulte.

**3** $M'(t) = Cabe^{-at}\exp(-be^{-at})$. La fonction $M$ doit être croissante, donc $b$ doit être strictement positive.

**4** **a.** $M(t) = 750\exp(-3{,}9e^{-0{,}04t})$.

**b.**




## Vers le Supérieur

**91** **1** Si $f$ n'est pas la fonction nulle, alors il existe un réel $u$ tel que $f(u) \neq 0$.

On a alors $f(u) = f(u + 0) = f(u)f(0)$ et, comme $f(u) \neq 0$, alors $f(0) = 1$.

**2** S'il existe un réel $a$ tel que $f(a) = 0$, alors pour tout réel $u$, on a :

$$f(u) = f(u - a + a) = f(u - a)f(a) = 0\ ;$$

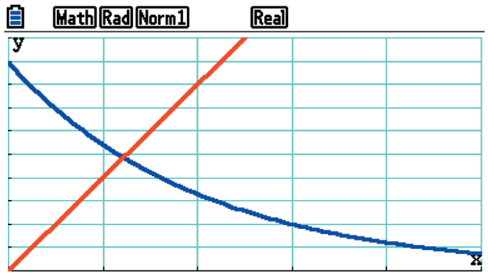
donc $f$ est la fonction nulle.

**3** $f(u + t) = f(u)f(t)$, donc $f'(u + t) = f(u)f'(t)$.

**4** On prend $t = 0$ et on obtient, pour tout réel $u$, $f'(u) = f(u)f'(0)$.

On a une relation du type $f' = kf$, où $k$ est une constante ; donc $f(x) = e^{kx}$.

**92** **1**




**2** Pour 23 € l'article, la demande est d'environ 20 000 articles, donc le montant de la demande est environ égal à 460 000 €.

**3** Le prix unitaire doit être inférieur à 30 €.

**4** $f'(x) = -20e^{-0{,}1x} < 0$, donc la fonction $f$ est décroissante.

**5** **a.** Le prix d'équilibre est d'environ 21 €.

**b.** L'entreprise peut espérer vendre 25 000 objets.

**93** **1** La fonction $f_\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$.

**2** Si $\alpha \geqslant 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} xe^{\frac{1}{x-\alpha}} = +\infty$,

car $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} \dfrac{1}{x - \alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$.

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} xe^{\frac{1}{x-\alpha}} = -\infty$,

car $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} \dfrac{1}{x - \alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$ ;

$\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} xe^{\frac{1}{x-\alpha}} = 0$, car $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} \dfrac{1}{x - \alpha} = -\infty$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$ ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x-\alpha}} = +\infty$,

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - \alpha} = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0} e^u = 1$ ;

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x-\alpha}} = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - \alpha} = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0} e^u = 1$.

**3** On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x-\alpha}} - x - 1\right)$ d'après l'exercice **95**, page 117.

On pose $u = \dfrac{1}{x-\alpha}$ ; on obtient :

$$\lim_{u \to 0}\left(\left(\frac{1}{u}+\alpha\right)e^u - \left(\frac{1}{u}+\alpha\right) - 1\right)$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1}{u}(e^u - 1) + \alpha e^u - \alpha - 1 = 0,$$

car $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$.

Comme la limite est nulle, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de $f_\alpha$ en $+\infty$.
On pourrait faire le même raisonnement en $-\infty$, donc cette droite est aussi asymptote à la courbe en $-\infty$.

**4** $f'_\alpha(x) = e^{\frac{1}{x-\alpha}} - \dfrac{x}{(x-\alpha)^2} e^{\frac{1}{x-\alpha}}$

$$= e^{\frac{1}{x-\alpha}}\left(1 - \frac{x}{(x-\alpha)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x-\alpha}}\left(\frac{x^2 - (2\alpha+1)x + \alpha^2}{(x-\alpha)^2}\right).$$

La dérivée est du signe de $x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2$.
$\Delta = 4\alpha + 1$.

Si $\alpha < -\dfrac{1}{4}$, alors $\Delta < 0$ et la dérivée est positive, la fonction est strictement croissante sur son ensemble de définition.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

Si $\alpha = -\dfrac{1}{4}$, alors $\Delta = 0$ et la dérivée est positive, la fonction est croissante sur son ensemble de définition. On a le même tableau de variations que précédemment.

Si $\alpha > -\dfrac{1}{4}$, alors $\Delta > 0$, les deux racines sont :

$$x_1 = \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha + 1}$$

$$\text{et } x_2 = \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha + 1}.$$

On a de façon évidente $x_2 > \alpha$.

On aura $x_1 < \alpha$ si, seulement si,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha + 1} \Leftrightarrow 1 < 4\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha > 0 \quad .$$

Si $-\dfrac{1}{4} < \alpha < 0$, on aura $x_1 > \alpha$.

- Cas $-\dfrac{1}{4} < \alpha < 0$ :

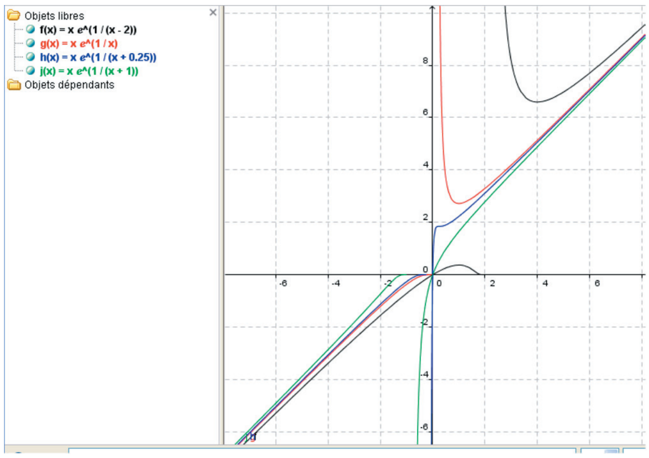
| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ ‖ $-\infty$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

- Cas $\alpha = 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

- Cas $\alpha > 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | ↘ | $0$ ‖ $+\infty$ | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |




**94** $N'(t) = \alpha N(t) - N^2(t)$.

On pose $u = \dfrac{1}{N}$, alors $N' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

L'équation s'écrit :

$$-\frac{u'(t)}{u^2(t)} = \alpha\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u^2(t)} \Leftrightarrow -u'(t) = -\alpha u(t) + 1.$$

Les fonctions $u$ sont du type $u(t) = Ce^{-\alpha t} + \dfrac{1}{\alpha}$.

Donc $N(t) = \dfrac{1}{Ce^{-\alpha t} + \dfrac{1}{\alpha}}$, avec $N(0) = \dfrac{1}{C + \dfrac{1}{\alpha}} = 2\alpha$,

ce qui équivaut à $C = -\dfrac{1}{2\alpha}$.

Finalement, $N(t) = \dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{1}{2}e^{-\alpha t}} = \dfrac{2\alpha}{2 - e^{-\alpha t}}$.

# Fonction logarithme népérien

CHAPITRE 5

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Fonction logarithme népérien**<br><br>Fonction $x \longmapsto \ln x$. | • Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. | On peut introduire la fonction logarithme népérien grâce aux propriétés de la fonction exponentielle ou à partir de l'équation fonctionnelle. |
| Relation fonctionnelle, dérivée. | • Utiliser, pour $a$ réel strictement positif et $b$ réel, l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$.<br>• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.<br>• Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. | On souligne dans les cadres algébrique et graphique que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre. Tout développement théorique sur les fonctions réciproques est exclu.<br>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1 et la limite en 0 de $\frac{\ln x}{x}$.<br>On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines.<br>⇄ [SI] Gain lié à une fonction de transfert.<br>⇄ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH.<br>(AP) *Équations fonctionnelles.* |
| **Calcul de dérivées : compléments** | Dérivée de $x \longmapsto \ln(u(x))$ | |

### 2. Intentions des auteurs

Ce chapitre fait suite au chapitre 4 consacré à la fonction exponentielle. Conformément au programme, le lien de réciprocité entre les deux fonctions est au cœur des activités d'introduction et des exercices.
Les exercices et TP proposés poursuivent un double objectif :
– faire acquérir aux élèves une certaine aisance dans les études de fonctions faisant intervenir l'exponentielle et le logarithme népérien ;
– proposer de nombreuses applications ou problèmes issus de situations concrètes qui font intervenir la fonction logarithme népérien (décibel, pH, etc.).
Les outils informatiques ou l'utilisation de logiciels de calcul formel ont une place privilégiée dans les résolutions des différents problèmes.

# Partir d'un bon pied

**Objectif**

*Les activités de cette page ont été conçues pour réactiver les connaissances concernant la fonction exponentielle (A) et préparer à l'étude d'une fonction réciproque (B et C).*

**A** **1** **c.** **2** **c.** **3** **b.** **4** **b.** **5** **a.**

**B** **1** En $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \mathrm{e}^y = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .

En $-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$.

**2** Pour tout $x$ réel : $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} > 0$.

**3** La fonction $f$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
Par balayages successifs, on obtient $0{,}69 < \alpha < 0{,}70$.

**C** **1** Tracé de la courbe à main levée.

**2** **a.** 2. **b.** $-1$. **c.** 0.

**3** **a.** $f$ est continue, strictement croissante sur $[-5\,;4]$. De plus, $f(-5) = -6$ et $f(4) = 3$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, chaque élément de $[-6\,;3]$ a bien un unique antécédent par $f$.

**b.**

| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-5$ | $-4{,}5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ |

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 4 |

# Découvrir

## Activité 1 Une approche numérique du logarithme népérien

**Objectif**

*Les activités sont conçues pour amener une découverte progressive de la fonction logarithme népérien et de ses propriétés, en variant les types d'approche (numérique, graphique, fonctionnelle ).*
*On introduit la notation via l'étude de l'équation $\mathrm{e}^x = a$.*

**1** Voir le cours.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | 0 $\nearrow$ $+\infty$ |

**2** **a.** La fonction exponentielle étant continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on justifie l'existence de la soution par le théorème des valeurs intermédiaires.

**b.** Par balayages successifs, on obtient :

$$0{,}693 < \ln 2 < 0{,}694.$$

On peut donc prendre 0,69 comme valeur approchée.

**3** On obtient que $\ln 8 \approx 2{,}08$ à $10^{-2}$ près.

**4** **a.** On peut donc définir $\ln a$, pour tout réel $a$ strictement positif, comme étant l'unique antécédent de $a$ par la fonction exponentielle.

**b.**

| ln3 | ln6 | ln18 | ln0,1 | ln0,01 | ln500 | ln5 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,10 | 1,79 | 2,89 | -2,30 | -4,61 | 6,21 | 8,52 |

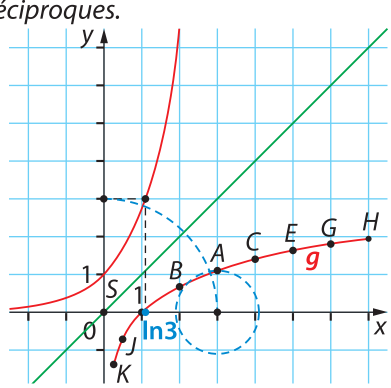
**c.** On peut conjecturer, aux arrondis près, que :

$$\ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \quad \text{et} \quad 3 \times \ln 2 = \ln 8.$$

**5** On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{a\to 0} \ln a = -\infty$.

## Activité 2 Une approche graphique du logarithme népérien

**Objectif :** *On prépare le lien entre les courbes de deux fonctions réciproques.*




**1** **2** et **3** On remarque que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

## Activité 3 Images de suites numériques

**Objectif :** *On montre que la fonction exponentielle transforme une progression arithmétique en une progression géométrique, ainsi que le résultat correspondant pour la fonction logarithme népérien.*

**1** **a.** $u_n = 3 + 5n$.

**b.** $v_n = \mathrm{e}^3 \times (\mathrm{e}^5)^n$.

$v$ est donc une suite géométrique de premier terme $\mathrm{e}^3$ et de raison $\mathrm{e}^5$.

**c.** La fonction exponentielle transforme une suite arithmétique de raison $r$ en une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^r$.

**2** **a.** $g_n = 2 \times 3^n$.

**b.**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | $g_n$ | $w_n$ | $w_{n+1}-w_n$ |
| 2 | 0 | 2 | 0,69314718 | 1,09861229 |
| 3 | 1 | 6 | 1,79175947 | 1,09861229 |
| 4 | 2 | 18 | 2,89037176 | 1,09861229 |
| 5 | 3 | 54 | 3,98898405 | 1,09861229 |
| 6 | 4 | 162 | 5,08759634 | 1,09861229 |
| 7 | 5 | 486 | 6,18620862 | 1,09861229 |
| 8 | 6 | 1458 | 7,28482091 | 1,09861229 |
| 9 | 7 | 4374 | 8,3834332 | 1,09861229 |
| 10 | 8 | 13122 | 9,48204549 | 1,09861229 |
| 11 | 9 | 39366 | 10,5806578 | 1,09861229 |
| 12 | 10 | 118098 | 11,6792701 | 1,09861229 |
| 13 | 11 | 354294 | 12,7778824 | 1,09861229 |
| 14 | 12 | 1062882 | 13,8764946 | |

La suite  est arithmétique de premier terme ln2 et de raison ln3.

**c.** La fonction logarithme népérien transforme une suite géométrique de raison $r$ en une suite arithmétique de raison $\ln r$.

## Activité 4 Relation fonctionnelle et fonctions logarithmes

**Objectif**

*On met en place les propriétés que l'on peut déduire de l'équation fonctionnelle.*

**1** $f(1) = f(1) + f(1)$. D'où $f(1) = 0$.

**2** $f(1) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$.

D'où : $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

**3 a.** On obtient $y_0 f'(xy_0) = f'(x)$.

**b.** En appliquant la relation à $x = 1$, on en déduit que :

$$f'(y_0) = \frac{f'(1)}{y_0}.$$

## Activité 5 Loi de Kepler

**Objectif**

*Grâce au tableur, on met en lumière une loi de Kepler, que l'on vérifie à la dernière question.*

**3 d.** On peut conjecturer une relation affine entre $\ln T$ et $\ln R$, du type :

$$\ln T = 1{,}4987 \times \ln R - 22{,}31.$$

D'où $T = e^{-22{,}31} \times e^{1{,}4987 \times \ln R}$.

**4** On utilise la régression linéaire : $T \approx 365{,}3$ jours ; ce qui semble bien valider la loi établie à la question **3**.

# Exercices d'application

## Savoir faire Utiliser le logarithme népérien pour résoudre des équations ou des inéquations

**1 a.** $x = \ln 5$ ; **b.** $x = \ln 4$ ; **c.** $x = -\ln 2$ ;
**d.** il n'y a pas de solution.

**2 a.** $x = e^5$ ; **b.** $x = e^{-4}$ ;
**c.** il n'y a aucune solution ;
**d.** il n'y a aucune solution.

**3** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 2)$.
On a $e^{x^2} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \ln 2$
$\Leftrightarrow x \in ]-\infty\,; -\sqrt{\ln 2}] \cup [\sqrt{\ln 2}\,; +\infty[$.
On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\ln 2}$ | | $0$ | | $\sqrt{\ln 2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

**4** $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{x^2} + 2}$ ;

donc $f'(x) = \dfrac{e^x(e^{2x} + 2) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + 2)^2}$

$= \dfrac{e^{3x} + 2e^x - 2e^{3x}}{(e^{2x} + 2)^2} = \dfrac{e^x(2 - e^{3x})}{(e^{2x} + 2)^2}$.

On a $e^x > 0$ et $(e^{2x} + 2)^2 > 0$, donc on étudie le signe de $2 - e^{2x}$.

$2 - e^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leqslant 2 \Leftrightarrow 2x \leqslant \ln 2$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow x \leqslant \ln\sqrt{2}$.

On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\ln 2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | $\searrow$ | |

## Savoir faire Étudier une fonction comportant un logarithme népérien

**5 a.** $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**b.** et **c.** $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x$.

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**6 a.** Par somme, de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**b.** $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0}(1 + \ln x) = -\infty$.

D'où, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

**c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2\ln x}{x} = \dfrac{1 + 2\ln x}{x}$.

$f'(x)$ est du signe de $1 + 2\ln x$.

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \ln x \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**7 a.** En 0 $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$, d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**b.** $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$.

$f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$.

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**8** **a.** Par différence de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

**b.** D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$,

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$. Donc, par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

**c.** $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

# Travaux pratiques

## 9 Qui est le plus grand ?

### Étape 1

**1** **a.** On a $3^4>4^3$ et $8^9>9^8$.

**b.** On peut conjecturer que $2\,014^{2\,015}>2\,015^{2\,014}$.

**2** **b.** $2\,015\ln 2\,014\approx 15\,330$ et $2\,014\ln 2\,015\approx 15\,323$.

La conjecture semble donc vérifiée.

### Étape 2

**2** On a vu (Savoir Faire, exercice **7**) que :

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

La fonction est donc décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

La suite $\dfrac{\ln n}{n}$ est donc décroissante pour $n\geqslant 3$.

Pour $n=1$, on constate que $1^2<2^1$, et pour $n=2$, $2^3<3^2$.

### Étape 3

On a pour $n\geqslant 3$, $n^{n+1}>(n+1)^n$.

Et le résultat est inversé pour $n=1$ et $n=2$.

## 10 « Vitesse de croissance » de la fonction ln

**1** Alors que les abscisses varient de 1 à 5, les valeurs des ordonnées varient à peine de 0 à 1,5.

**2** **a.** Il s'agit du coefficient directeur, de la pente de la droite $(AB)$.

**b.** 6,93 ; 1,82 ; 0,95 ; 0,36 ; 0,01.

Il semble que le taux de variations décroisse vers 0.

**c.** Par exemple, pour $\alpha=100\,000$.

**d.** On veut $\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}<10^{-n}$.

D'où $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<10^{-n}$. D'où $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{10^{-n}}-1}$.

On voit donc bien que le taux d'accroissement peut être rendu aussi proche de 0 que l'on veut.

## 11 Une approximation de ln2

**1** $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2}>0$.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}<0$.

**2** On a $u_n\leqslant\ln 2$ et $v_n\geqslant\ln 2$. Les inégalités sont strictes, car les suites sont strictement monotones.

Voici un exemple avec *Xcas*, et une application avec $n=51$.

On obtient un encadrement à 0,1 près, ce qui est vraiment très moyen !

```
encadre();
ln est compris entre
0.683247160576 et 0.693148150675et le nombre d'étapes est 51

Evaluation time: 7.41
```

```
encadre() :={
local eps;v ;u;n;
saisir("Donner la valeur de p",p);
u:=0 ;n:=1;v:=1;
tantque v-u>10^(-p) faire
u:=evalf(u+((-1)^(n+1))/n);v:=evalf(=u+1/(2n+1));
n:=n+1;
ftantque
afficher("ln est compris entre
"+u+ " et "+v+"et le nombre d'étapes est "+n+"
");
}
:;
```

## 12 Logarithme décimal

### Partie A

**1** $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 0{,}001=-3$.

**2** On encadre $x$ par deux puissances de 10 consécutives, et on utilise la croissance du logarithme népérien.

On obtient :

$$3<\log 1789<4$$
$$4<\log 25\,665<5$$
$$-3<\log 0{,}00933<-2.$$

**3** La dérivée est égale à $\dfrac{1}{x\ln 10}$. La fonction est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

### Partie B

**1** $L=70$ dB.

**2** $I=I_0\mathrm{e}^{\frac{L}{10}\ln 10}=0{,}01\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

**3** $I=I_0\mathrm{e}^{\frac{L}{10}\ln 10}\approx 100\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

**4** **a.** $f(10^{-12})=0$.

**b.** $f(x) = 10\log\left(\dfrac{x}{10^{-12}}\right) = \dfrac{10}{\ln 10}(\ln x + 12\ln 10)$

$= 10\log x + 120.$

**c.** $f'(x) = \dfrac{10}{x}.$

La fonction est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

**5** C'est vrai, on retrouve une propriété classique du logarithme décimal.

**6 a.** $I_{70} = I_0 \mathrm{e}^{\frac{70}{10}\ln 10} = 10^{-5}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}.$

$I_{80} = I_0 \mathrm{e}^{\frac{80}{10}\ln 10} = 10^{-4}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}.$

L'intensité sonore est donc de $1{,}1 \times 10^{-4}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$, ce qui correspond à un niveau sonore de 80,4 dB.

On retrouve quasiment le niveau sonore de la machine la plus bruyante.

## Faire le point

**16** **1** b. **2** b. **3** c. **4** c. **5** a. **6** a.

**17** **1** b. **2** c. **3** c.

**18** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux.

**19** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai.

## Exercices d'application

### 1 La fonction logarithme népérien

**20** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Faux. **5** Faux.

**21** $a = 2\,;\ b = -3\,;\ c = 5\,;\ d = \dfrac{1}{3}\,;\ e = 49\,;\ f = \dfrac{1}{8}.$

**22** **a.** $x = \ln 4\,;$ **b.** $x = \mathrm{e}^{-3}\,;$

**c.** $x = \mathrm{e}^2\,;$ **d.** $x = \mathrm{e}$ ou $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

**23** **a.** $x = \ln 4\,;$ **b.** $x = \ln\dfrac{6}{5}\,;$

**c.** $x = \dfrac{\ln 2}{2}\,;$ **d.** pas de solution.

**24** **a.** Ensemble de définition : $]-2\,;+\infty[\,;$

une solution : $x = 0.$

**b.** Ensemble de définition : $\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[\,;$

une solution : $x = \dfrac{5+\mathrm{e}}{2}.$

**c.** Ensemble de définition : $]-\infty\,;1[\,;$

une solution : $x = 1 - \mathrm{e}^2.$

**d.** Ensemble de définition : $]0\,;+\infty[\,;$

pas de solution.

**25** **a.** Ensemble de définition : $]0\,;+\infty[\,;$

une solution : $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

**b.** Ensemble de définition : $]0\,;+\infty[\,;$

pas de solution.

**c.** Ensemble de définition : $]1\,;3[\,;$

deux solutions : $x = 0$ et $x = 2.$

**d.** Ensemble de définition : $\left]\dfrac{6}{5}\,;+\infty\right[\,;$

deux solutions : $x = 2$ et $x = 3.$

**26** **a.** $x = 0\,;$

**b.** $x = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right);$

**c.** Pas de solution ;

**d.** $x = \mathrm{e}^3.$

**27** **a.** $x = \ln 3 - 2\,;$

**b.** $x = \dfrac{-\ln 4 + 1}{2}\,;$

**c.** $x = 2 - \ln\dfrac{5}{12}.$

**28** **1** $X = 1$ ou $X = 2.$

**2** **a.** $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^2\,;$

**b.** $x = 0$ ou $x = \ln 2.$

**29** **1** $X = \pm\sqrt{6}.$

**2** **a.** $x = \mathrm{e}^{\sqrt{6}}$ ou $x = \mathrm{e}^{-\sqrt{6}}.$

**b.** $x = \ln\sqrt{6}.$

**30** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

**31** **a.** $x \in ]0\,;\mathrm{e}]\,;$

**b.** $x \in ]\sqrt{3}\,;+\infty[\,;$

**c.** $x \in [\mathrm{e}^{-1{,}5}\,;+\infty[\,;$

**d.** $x \in [\mathrm{e}^2\,;+\infty[.$

**32** **a.** Ensemble de définition : $]-1\,;+\infty[$, solution : $x \in ]-1\,;0].$

**b.** Ensemble de définition : $]-2\,;+\infty[$, pas de solution.

**c.** Ensemble de définition : $]-\infty\,;3[$, solution : $x \in [3-\sqrt{\mathrm{e}}\,;3[.$

**33** **a.** $+\infty\,;$ **b.** $\ln 2\,;$ **c.** $\ln 3\,;$ **d.** $+\infty.$

**34** **a.** $+\infty\,;$ **b.** $-\ln 2\,;$ **c.** $-\infty\,;$ **d.** $+\infty.$

### 2 Propriétés algébriques

**35** **1** c. **2** a. **3** b. **4** b.

**36** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

**37** **1** Vrai (propriété fondamentale du logarithme).

**2** Faux, car seul 0 vérifie $2x = x$ et ce n'est pas un élément de l'ensemble de définition de cette équation.

**3** Vrai, par stricte croissance du logarithme, car $2x > x$ pour $x > 0.$

**4** Vrai, par stricte croissance du logarithme népérien.
**5** Vrai : $x = 0$.

**38** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux.
**4** Vrai. **5** Faux. **6** Vrai.

**39** $a = 2\ln 2 + \ln 3$ ; $b = \frac{3}{2}\ln 2$ ; $c = 2\ln 3$ ;
$d = \ln 3 - \ln 2$ ; $e = \ln 2 + \frac{1}{2}$ ; $f = 2\ln 3 - 1$.

**40** $a = 2\ln 2 + 2\ln 5$ ; $b = 2\ln 2 - 2\ln 5$ ;
$c = \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2$ ; $d = 2 + \ln 2 + \ln 5$ ;
$e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 5$ ; $f = 2\ln 2 + \ln 5 - 0{,}5$.

**41** $a = 4\ln x$ ; $b = 1 - \ln x$ ; $c = \frac{1}{2}\ln x - 1$ ;
$d = 1 + \ln x$ ; $e = \frac{1}{2}\ln x - 0{,}5$ ; $f = \ln x - 0{,}5$.

**42** $a = \ln 20$ ; $b = \ln\frac{6}{7}$ ; $c = \ln\frac{\sqrt{3}}{5}$ ;
$d = \ln 36$ ; $e = \ln\frac{\mathrm{e}}{2}$ ; $f = \ln 125\sqrt{\mathrm{e}}$.

**43** $a = \ln 72$ ; $b = \ln\frac{1}{9}$ ; $c = \ln 5$ ;
$e = \ln\sqrt{15}$ ; $f = \ln \mathrm{e}\sqrt{15}$.

**44** $a = \ln 2\mathrm{e}^3$ ; $b = \ln\frac{1}{21}$ ; $c = \ln\frac{6}{\mathrm{e}^2}$ ;
$d = \ln\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ; $e = \ln\frac{3}{2\mathrm{e}^2}$ ; $f = \ln(25\mathrm{e}^2)$.

## 3 Étude de la fonction logarithme népérien

**45** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Vrai.

**46** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux.

**47** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Faux.

**48** **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai.

**49** **1** **b.** **2** **c.**

**50** **1** $x = \mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $x = \mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.
**2** $x = 1$.

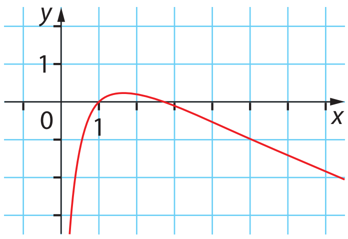
**51** $P_n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{5}{6}}$.
D'où $n \geqslant 25{,}26$. On doit lancer au moins 26 fois.

**52** **1** $f(x) = \ln x(1 - \ln x)$.
D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
**2** $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{1 - 2\ln x}{x}$.
**3** **a.** $1 - 2\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$.

**b.** On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\mathrm{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**4**




**5** Pour $k \in \left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$ : deux solutions.
Pour $k = \frac{1}{4}$ : une solution.
Pour $k \in \left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ : aucune solution.

**53** **1** $p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = 0{,}01$.
**2** La probabilité considérée est égale à $1 - 0{,}4^n$, si on choisit $n$ ordinateurs.
On doit donc résoudre :
$$1 - 0{,}4^n > 0{,}999 \Leftrightarrow 0{,}4^n < 0{,}001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}4}.$$
On doit donc choisir au moins 8 ordinateurs.

**54** **1** $f'(x) = 1 + \ln x$.
**2** $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.
**3** $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$.
**4** $f'(x) = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x$.

**55** **1** $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
**2** $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x$.
On a donc :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3** Il s'agit d'une application du théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
**4** $f(x) = k \Leftrightarrow \ln x = \pm\sqrt{k} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{k}}$.

**56** **1** La première entrée met en mémoire la fonction, la deuxième calcule sa dérivée, la troisième permet de résoudre $f'(x) > 0$ et d'en déduire donc les variations de $f$, les deux dernières de déterminer les limites de $f$ en l'infini.

**2** Pour le signe de $f'(x)$, celle-ci est du signe de $2x+1$.
Pour les limites, la composition des limites donne le résultat, car $x^2+x+1$ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$.
**3** On retrouve bien les variations. Seules les limites ne sont pas évidentes, du fait de la croissance « lente » du logarithme.

**57** **1** Au bout de $n$ années, le capital sera de $1\,000 \times 1{,}03^n$ ; il aura doublé lorsque :

$$200 \times 1{,}03^n = 4\,000 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}5.$$

Donc, il faudra attendre 24 ans.
**2** **a. b.** On retrouve le même résultat. Il suffit de refaire le calcul du **1** avec un capital de départ de $C$.
**3** Si on appelle $t$ le taux de placement, on a :

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+t)}.$$

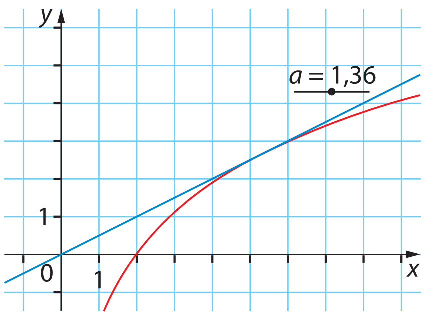
**58** **1** $f$ est définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
**2** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
**3** $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)}$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | \|\| | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \searrow -\infty$ | \|\| | $+\infty \searrow 0$ |

**59** **1** $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x} = -\infty$.
D'où, par somme : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ ;
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x} = 0$.
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
$g$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} > 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient alors l'existence d'une unique solution $x_0$ à l'équation $g(x) = 0$.
L'encadrement est obtenu par balayage.

**2** $f(x_0) = \dfrac{5\ln x_0}{x_0} = \dfrac{5 \times \dfrac{2}{x_0}}{x_0} = \dfrac{10}{x_0^2}$.

**60**




**1** À l'aide du logiciel, on conjecture que $a \approx 1{,}36$, pour un point de contact de coordonnées $(2{,}5\,;1{,}25)$.

**2** L'équation de la tangente à la courbe en $M(x_0\,;y_0)$ est :

$$y = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + a\ln x_0 = \frac{a}{x_0}x - a + a\ln x_0.$$

D'où le résultat par identification avec l'équation réduite de $D$.
**3** On a, par la deuxième équation, $x_0 = \mathrm{e}$, car $a = 0$ n'est pas solution du système.
Donc $a = \dfrac{\mathrm{e}}{2} \approx 1{,}36$.
Et les coordonnées de $M$ sont $\left(\mathrm{e}\,;\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)$.
Les résultats sont donc bien cohérents.

**61** $f(1) = 0$ n'apporte aucune information ;
$f(3) = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$.
On a $f'(x) = a\ln x + \dfrac{ax+b}{x}$. Donc $f'(1) = a + b$.
La tangente considérée dans l'énoncé a pour équation :

$$y = (a+b)(x-1) + 0.$$

D'où $a + b = -2$.
On en déduit donc que $a = 1$ et $b = -3$.

**62** **a.** $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ ;
**b.** $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ ;
**c.** $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{x(x^2+1)}$;
**d.** $f'(x) = \ln(2-x) - \dfrac{x+1}{2-x}$.

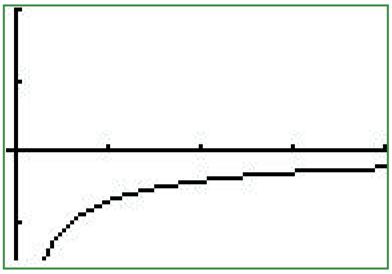
**63** **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ ;
**b.** $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$ ;
**c.** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ ;
**d.** $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

**64** **a.** $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ ;
**b.** $f'(x) = -\tan x$ ;
**c.** $f'(x) = \dfrac{3}{2x}$.

**65** **1** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}2$. Donc comme $u$ est une suite à termes positifs, elle est croissante.
**2** $u_n \geqslant 100 \Leftrightarrow 1{,}2^n \geqslant 125 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 125}{\ln 1{,}2}$.
Il faut donc que $n$ dépasse 27.

**66** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai.

**67** **1**



On conjecture que $f(x) < 0$ sur l'intervalle considéré.
**2** Il suffit de remarquer que $x < x + 1$ pour $x > 0$, d'où $\dfrac{x}{x+1} < 1$, d'où le résultat.

## 4 Croissances comparées

**68** **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Vrai.

**69** **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux.

**70** **1** **a.** $\dfrac{1}{2}$ ; **b.** $-\infty$ ; **c.** $-\infty$ ; **d.** $0$ ; **e.** $-\infty$.

**71** **a.** $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. La limite est donc 0.

**b.** $\dfrac{x+1}{\ln\sqrt{x}} = 2 \times \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{1}{\ln\sqrt{x}}$. La limite est donc $+\infty$.

**c.** $\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$. La limite est donc 0.

**d.** $\dfrac{\ln(x^2)}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x}$. La limite est donc 0.

**72** $\dfrac{x}{(\ln x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^X}{X^2}$.
Comme $X$ tend vers $+\infty$, par croissances comparées, la limite demandée est $+\infty$.

**73** **1** $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \dfrac{\ln x}{x}$.
Or, pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^{n-1}} \leqslant 1$, d'où le résultat par comparaison de limites.
**2** $x^n \ln x = -\dfrac{\ln X}{X^n}$.
Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} X = +\infty$. D'où le résultat par composition des limites, en utilisant le **1**.
**3** **a.** $-\infty$ (en factorisant par $x^2$) ;
**b.** $-\infty$ (en factorisant par $x^3$) ;
**c.** 0 (en développant).

**74** **a.** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{x}{\ln x}$. La limite est donc $+\infty$, par produit de limites.

**b.** $\mathrm{e}^x - \ln x = \ln x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x} - 1\right)$. La limite est donc $+\infty$.

**c.** $\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. La limite est donc 0.

**75** **1** La limite est $-\infty$ (pas de forme indéterminée).
**2** $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} - x\right)$.
On retrouve donc le résultat, par produit de limites.

**3** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1-2x}{x}$. On en déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$f$ admet un maximum strictement négatif, elle est donc bien strictement négative.

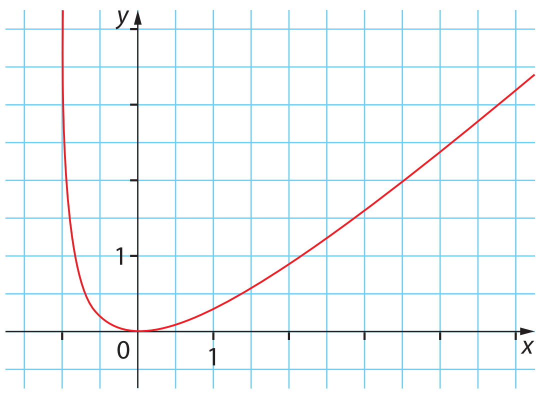
**76** **1** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
**2** $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$. D'où le tableau :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3** On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction strictement croissante continue $f$.
**4** Il suffit de remarquer grâce à la calculatrice que $f(1{,}557) < 0$ ; $f(1{,}558) > 0$.

**77** **1** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
car $f(x) = (1+x)\left(\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$.
**2** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
D'où le tableau :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




**3** 0 est le minimum de $f$, donc $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
**4** **a.** $\dfrac{1}{n} \neq 0$, donc $f\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$, d'où le résultat.
On en déduit $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1$, d'où :
$$\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \mathrm{e} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

**78** **1** Faux, il suffit de prendre $u_n = \frac{1}{n}$.

**2** Vrai, car $\ln(u_0 q^n) = \ln(u_0) + n\ln(q)$.

**3** Vrai, car $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$,
puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$.

**4** Vrai : $u_n = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1) - \ln k) = \ln 1 - \ln n$.
Donc $u$ diverge vers $-\infty$.

## Prépa Bac

## Exercices guidés

**79** **1** **a.** $u_1 = \frac{1}{2}$ ; $u_2 = \frac{2}{3}$ ; $u_3 = \frac{3}{4}$.

**b.** Ce sont les mêmes.

**c.** On montre que $u_n = w_n$ pour tout entier naturel $n$.

**Initialisation :** la propriété est vraie pour $n = 0$.

**Hérédité :** on suppose la propriété vraie pour un entier naturel $n$ ;

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}}$$
$$= \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = w_{n+1}.$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.

▶ La propriété est donc vraie pour tout entier naturel $n$.

**2** **a.** $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4}$
$$= \ln\frac{1\times2\times3}{2\times3\times4} = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4.$$

**b.** $S_n = \ln\frac{1\times2\times\ldots\times n}{2\times\ldots\times(n+1)} = -\ln(n+1)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

**80** **Partie A**

**1** $f'(x) = 2x + \frac{4}{x}$.

Par opérations sur les limites, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$
D'où le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

$f$ est continue et strictement croissante ; de plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, d'où l'existence et l'unicité de $\alpha$.
Par balayages successifs, on obtient $\alpha \approx 0{,}84$.

**3**

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | | $+$ |

**Partie B**

**1** $OM = \sqrt{x^2 + 4(\ln)^2}$.

**2** **a.** $h'(x) = 2x + \frac{4\times 2\ln x}{x} = \frac{2f(x)}{x}$.

Donc $h'$ est du signe de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donc :

| $x$ | $-1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $h(x)$ | ↘ | | ↗ |

**b.** La fonction $h$ possède un minimum qui n'est atteint que pour $x = \alpha$.
Or, $OM = \sqrt{h}$. Donc la distance $OM$ est minimale pour le point $A(\alpha, g(\alpha))$.

**2** $T_A$ a pour équation : $y = g'(\alpha)(x-\alpha) + g(\alpha)$.
Le coefficient directeur de cette tangente est donc $g'(\alpha) = \frac{2}{\alpha}$.
Or, le coefficient directeur de $(OA)$ est $\frac{g(\alpha)}{\alpha}$.
Et $\frac{g(\alpha)}{\alpha} = \frac{2\ln(\alpha)}{\alpha}$.
Le produit des coefficients directeurs est donc égal à $\frac{4\ln(\alpha)}{\alpha^2} = -1$, car, comme $f(\alpha) = 0$, on a :
$$4\ln(\alpha) = -\alpha^2.$$

**81** **1** **d.** $g$ est continue et strictement croissante ; de plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, d'où l'existence et l'unicité de $\alpha$. On obtient l'encadrement par balayages successifs.

**e.**

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | | $+$ |

**2** $f(x) = x\ln x \times \frac{1}{x+1}$, ce qui permet de justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

$f(x) = \frac{x}{x+1} \times \ln x$, ce qui permet de justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**3** $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

D'où le résultat.

## Exercices d'entraînement

**82** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Faux.
**5** Faux. **6** Vrai. **7** Vrai. **8** Faux.

**83** **1** **a.**

| $x$ | $0$ | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ln x(1-\ln x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | |

**b.** Le tableau donne le signe de $f(x)-g(x)$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $]1\,;\mathrm{e}[$, en dessous sur $]0\,;1[\cup]\mathrm{e}\,;+\infty[$ et que les deux courbes se coupent aux points $A(1\,;0)$ et $B(\mathrm{e}\,;1)$.

**2 a.** $h'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x}$ ;

$h'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$.

$h'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x\leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\leqslant\sqrt{\mathrm{e}}$.

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\mathrm{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{4}$ | ↘ | |

**b.** Sur cet intervalle, on a, du fait de la position relative des courbes, $MN=h(x)$.

La distance maximale est donc de $\dfrac{1}{4}$ et elle est obtenue pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.

**84** **1 a.** $f(x)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$.

On utilise le fait que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=0$, avec $h=\mathrm{e}^x$.

**b.** On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

**c.** $f(x)=f(x)^{-x}\ln(\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x}))$.

$=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

On utilise alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ et que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X=0$, avec $X=\mathrm{e}^{-x}$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**d.** Deux asymptotes horizontales $y=0$ et $y=1$.

**2 a.** $g(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{-t}{(1+t)}$.

D'où $g(t)<0$ pour $t>0$. D'où le résultat.

**b.** $g(0)=0$. Donc $g(t)<0$ pour $t>0$ par stricte décroissance de $g$.

**3** $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

$=\mathrm{e}^{-x}\times g(\mathrm{e}^x)$.

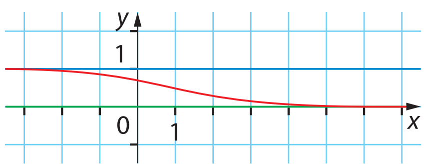
Or, $\mathrm{e}^x>0$. Donc $g(\mathrm{e}^x)<0$.

Donc $f'(x)<0$.

D'où le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $0$ |

**4**




**85** **1 a.** $\lim\limits_{x\to 0} 1+\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$, donc par continuité du logarithme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln 1=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

**b.** $f'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)}-1=\dfrac{-x^2-x-1}{x(x+1)}$.

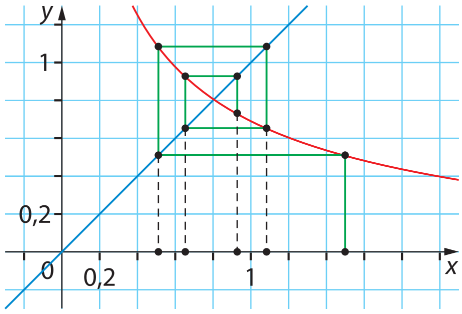
Or, $-x^2-x-1$ a un discriminant strictement négatif, donc $-x^2-x-1<0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)<0$ sur $]0\,;+\infty[$. D'où le résultat annoncé.

**c.** La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha$ appartenant à $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$.

Par balayage, on obtient $\alpha\approx 0{,}806$.

**2 a. b.**




**c.** On utilise la continuité de $g$ pour affirmer que $g(u_n)$ converge vers $g(\ell)$ et le fait que $u_{n+1}$ converge vers $\ell$.

D'où le résultat, car $u_{n+1}=g(u_n)$.

**d.** Le résultat est immédiat par le **1 c.**

**86** **1** Vrai, car $f_n(1)=\ln 2$.

**2** Vrai, car $f_n(2)=\ln 2\times 2^n$.

**3** Faux, car $f'_1(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$

et $f'_1(0)=\ln 2\neq 0$.

**4** Faux, car $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^n\ln(1+x)(x-1)$.

Donc $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ sur $]0\,;1[$.

## Problèmes

**87** **1** Tracé à faire à main levée.

**2 a.** $M(x\,;\mathrm{e}^x)$.

**b.** $D$ est la médiatrice de $[MN]$, d'où le résultat du **c.** et du **d.**

**e.** Posons $N(a\,;b)$.

On a $\dfrac{a+x}{2}=\dfrac{b+\mathrm{e}^x}{2}$ d'après le **c.**

On a $(a-x)+(b-\mathrm{e}^x)=0$.

D'où $\begin{cases} a-b=\mathrm{e}^x-x \\ a+b=x+\mathrm{e}^x \end{cases}$.

D'où $N(\mathrm{e}^x\,;x)$.

**f.** On a bien $\ln(x_N)=y_N$.

**88** **1 a.** $\ln ab=\ln a+\ln b$.

**b.** $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right)=\ln a+\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

D'où le résultat puisque $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$.

**c.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

**2** **a.** $\ln c = \ln(\sqrt{c} \times \sqrt{c}) = 2\ln(\sqrt{c})$. D'où le résultat.

**b.** La propriété est vraie pour $n = 0$.

On la suppose vraie pour un entier naturel $n$ ;

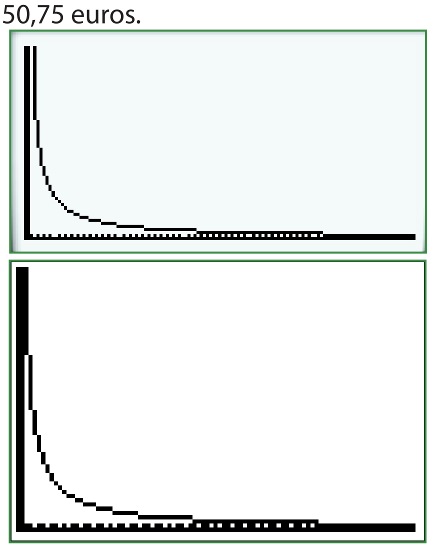
$$\ln a^{n+1} = \ln(a \times a^n) = \ln a + \ln a^n = n \ln a + \ln a$$
$$= (n+1)\ln a.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

On peut donc en déduire que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.

**89** **1** 150,75 euros.

**2**



**3** On a $C = \dfrac{m(1-(1+t)^{-n})}{t} = 10\,000$ euros.

**4** $n$ étant un nombre entier de mois, on peut utiliser la calculatrice ou résoudre une équation en utilisant le logarithme.

On trouve $n = 60$ : il faut cinq ans.

**90** **1** $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$.

**2** $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x - a}{x^2}$.

**3** $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x - a$.

En posant $x_a = e^{1-a}$, on obtient donc le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | $x_a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_a(x)$ | $+$ | | $-$ |
| $f_a(x)$ | $-\infty$ ↗ | $y_a$ | ↘ $0$ |

Avec $y_a = \dfrac{1-a+a}{e^{1-a}} = \dfrac{1}{e^{1-a}}$.

**4** $y_a = \dfrac{1}{x_a}$. Donc $A$ appartient à la courbe de la fonction inverse.

**91** **1** On a $f(0) = 1$. Donc $e^{3+k} = 1$.

D'où $k = -3$.

**2** $f'(t) = \dfrac{k}{20}\exp\left(3 + k\exp\left(\frac{t}{2}\right)\right) < 0$, car $k < 0$.

D'où le résultat.

**3** On veut $\exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < 0{,}02$.

D'où $t > 20\ln\left(\dfrac{3 - \ln 0{,}02}{3}\right) \approx 16{,}7$ années.

Au bout de 17 ans.

**92** **1** $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$,

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ ;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées.

**2** Vérification.

**3** $f'_n(x)$ est du signe de $n - 2 - 2n\ln x$.

$f'_n(x) > 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2\ln x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x < \dfrac{n-2}{2n} \Leftrightarrow x < e^{\frac{n-2}{2n}}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | $e^{\frac{n-2}{2n}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | $+$ | | $-$ |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ ↗ | | ↘ $0$ |

On a donc $a_n = e^{\frac{n-2}{2n}}$.

**4** $b_n = \dfrac{1 + n \times \frac{n-2}{2n}}{e^{\frac{n-2}{2n}}} = \dfrac{n}{2}e^{-\frac{n-2}{2n}}$.

**5** On conjecture que $A(1;1)$ appartient à toutes les courbes, que $a$ a une limite finie tandis que $b$ tend vers l'infini.

**6** $f_n(1) = 1$. Donc $A(1;1)$ appartient à toutes les courbes.

$\dfrac{n-2}{2n}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$. L'exponentielle étant continue, $a$ converge vers $\sqrt{e}$.

Donc $e^{-\frac{n-2}{2n}}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, donc $b$ tend vers $+\infty$.

**93** **1** $u_1 = \dfrac{1}{2}$ ; $u_2 = \dfrac{7}{12}$ ; $u_3 = \dfrac{37}{60}$ ; $u_4 = \dfrac{533}{840}$.

**2** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1}$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.$$

**3** **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

On a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↘ |

D'où $f(x) \leqslant 0$ pour $x > 0$. D'où le résultat.

**b.** On a pour tout $x > 0$ : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1$.

D'où $\ln x \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.

On applique le **a.** et le **b.** à $x = \dfrac{p+1}{p}$.

**4 a.** et **b.** $\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{p=n}^{2n-1} \ln(p+1) - \ln p \leqslant \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$.

D'où : $$u_n \leqslant \ln 2n - \ln n \leqslant u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}.$$

D'où le résultat.

**c.** On en déduit que :

$$0 \leqslant \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

D'où le résultat par le théorème d'encadrement des limites.

**94** **1** Comme $a$ est strictement positif, la limite de $ax^2 + 1$ en $+\infty$ ou $-\infty$ est $+\infty$.

De plus, $\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$, donc on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(ax^2+1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \ln(ax^2+1) = +\infty.$$

**2** $f(-x) = \ln(a(-x)^2+1) = \ln(ax^2+1) = f(x)$, donc $f$ est paire.

**3** $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1}$ et comme $x > 0$ et $a > 0$, on aura pour tout réel strictement positif, $f'(x) > 0$ et $f$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**4** Le point $M$ semble avoir une ordonnée minimale lorsque $a = 1$.

## Validation des conjectures

**1 a.** $(\mathcal{T}_A) : y = \frac{2a}{a+1}(x-1) + \ln(a+1)$

$(\mathcal{T}_B) : y = \frac{-2a}{a+1}(x+1) + \ln(a+1)$.

**b.** Lorsque $x = 0$, $y = \frac{-2a}{a+1} + \ln(a+1)$, ce qui prouve que les deux tangentes se coupent sur l'axe des ordonnées.

**c.** D'après les calculs précédents, on a bien :

$$M\left(0\,;\frac{-2a}{a+1} + \ln(a+1)\right).$$

**2 a.** $g'(x) = \frac{x-1}{(x+1)}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $\ln 2 - 1$ | ↗ | |

**b.** D'après le tableau de variations de $g$, l'ordonnée de $M$ admet bien un minimum lorsque $x = 1$.

**c.** Cette ordonnée minimale vaut $\ln 2 - 1$.

**95** **1** Avec le logiciel, il semble que l'image de 0 existe, pourtant cette fonction n'est pas définie en 0. Son ensemble de définition semble être $\left]-\frac{1}{a}\,;+\infty\right[$, la fonction semble décroissante sur cet ensemble.

**2** On résout $ax + 1 > 0$, on obtient $x > -\frac{1}{a}$ ; de plus, $x$ est différent de 0, donc :

$$\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{a}\,;0\right[ \cup \left]0\,;+\infty\right[.$$

**3** $\lim_{x \to 0} f_a(x) = \lim_{X \to 0} a \times \frac{\ln(X+1)}{X} = a$.

On doit donner à la fonction $f_a$ la valeur $a$ en 0 pour qu'elle soit continue en 0.

**4** $\lim_{x \to -\frac{1}{a}} f_a(x) = +\infty$, car $\lim_{x \to -\frac{1}{a}} \ln(ax+1) = -\infty$ et $x$ est négatif.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(ax+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(a + \frac{1}{X}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(a + \frac{1}{X}\right)}{x}\right) = 0.$$

La courbe représentative de $f$ admet deux asymptotes : l'une verticale d'équation $x = -\frac{1}{a}$, l'autre horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 0$.

**5 a.** $f'_a(x) = \frac{\frac{ax}{ax+1} - \ln(ax+1)}{x^2}$

$$= \frac{ax - (ax+1)\ln(ax+1)}{x^2}.$$

**b.** $g'_a(x) = a - (a\ln(ax+1) + a) = -a\ln(ax+1)$.

| $x$ | $-\frac{1}{a}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'_a(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $g_a(x)$ | | ↗ | $0$ | ↘ | |

La fonction $g_a$ est négative sur son ensemble de définition. On conclut que la fonction $f_a$ est décroissante sur son ensemble de définition.

**96** **1** Elle est égale à $10^{-7}$.

**2** On peut dire qu'elle est supérieure à $10^{-7}$.

**3** $\text{pH} = -\frac{\ln(3 \times 10^{-2})}{\ln(10)} \approx 11{,}5$.

**4** C'est vrai, car $\text{pH} = -\frac{\ln[\text{H}^+]}{\ln 10}$.

Donc si on pose $[\text{H}^+] = x$, $\text{pH}'(x) = -\frac{1}{x \ln 10} < 0$.

**97** **Partie A**

**1 a.** $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

$f$ est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

**b.** On a $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction $f$ étant par ailleurs continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha$ appartenant à $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

**d.** $f(1) = 1$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Donc $0 < \alpha < 1$.

**Partie B**

**a.** $g'(x) = \frac{4x-1}{5x}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $\frac{1+2\ln 2}{5}$ | ↗ | |

**b.** $g$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

Donc, si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, $g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.

Or, $g(1) = \frac{4}{5} < 1$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2+\ln 2}{5} \approx 0{,}54 > \frac{1}{2}$.

On a donc bien le résultat annoncé.

**c.** Soit $x > 0$.

$g(x) = x \Leftrightarrow 4x - \ln x = 5x \Leftrightarrow x + \ln x = 0$.

**2 a.** ◗ Pour $n = 0$ : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 \in [0{,}5\,;1]$ par le **1 b.**

◗ On suppose la propriété vraie au rang $n$. Comme $g$ est croissante, on en déduit :

$$g(0{,}5) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(1).$$

Or, $g(0{,}5) \in [0{,}5\,;1]$ et $g(1) \in [0{,}5\,;1]$ d'après le **1 b.**

Par ailleurs, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

On obtient donc bien la propriété au rang $n+1$.

◗ Donc la propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.

**b.** La suite $u$ est croissante et majorée par 1 d'après la question précédente. Elle converge donc vers un point fixe de $g$ compris entre 0 et 1 qui est, d'après le **1 c.**, une solution de $f(x) = 0$. Donc $u$ converge vers $\alpha$.

**3** $u_{10} \approx 0{,}567124$.

Donc $0{,}567 < \alpha < 0{,}568$.

**98** **1** Par définition, on a $e^{-18\lambda} = 0{,}5$.

Donc $\lambda = \frac{\ln 2}{18}$.

**2** Au bout de 36 jours :

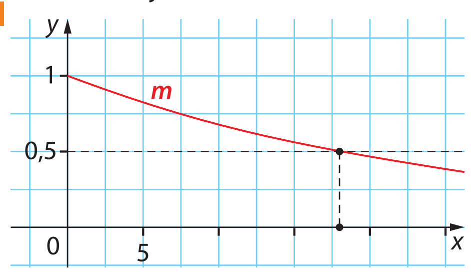
$$m = m_0 e^{-36\lambda} = m_0 e^{-2\ln 2} = \frac{m_0}{4} = 0{,}25\ \mu g.$$

**3** On doit résoudre :

$$e^{-\lambda t} = 0{,}1 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 10}{\lambda} \approx 59{,}8.$$

Au bout de 60 jours.

**4**




**99** **1 b.** **2 d.** **3 c.** **4 b.**

**5** $\ln(u_n) + v_n = \ln(1 + e^{-v_n}) + v_n$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, $\ln(1 + e^{-v_n}) > \ln(e^{-v_n}) = v_n$.

D'où $\ln(u_n) + v_n > -v_n + v_n$.

**100** **Partie A**

**1** $f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 - \ln(1+x)}{(x+1)^2}.$$

**2 a.** $N'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2}$, or $2x^2 + 4x + 3$ a un discriminant strictement négatif, donc ce polynôme est toujours strictement positif ; donc la fonction $N$ est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

**b.** $N(0) = 0$, donc par stricte croissance de $N$, cette fonction est négative sur $]-1\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$.

**c.** On en déduit le sens de variations de $f$ puisque $f'$ est du signe de $N$ :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

**3** On résout $f(x) = x$.

On obtient $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Le point d'intersection de la courbe et de la droite est le point 0.

**Partie B**

**1** Si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors par croissance de $f$, on aura $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 4 - \frac{\ln 5}{5} \leqslant 4.$$

**2** Par récurrence :

**Initialisation :** on a bien $u_0 \in [0\,;4]$.

**Hérédité :** supposons que pour un entier $n$, on a $u_n \in [0\,;4]$, démontrons que $u_{n+1} \in [0\,;4]$.

D'après la question **1**, on a $f(u_n) \in [0\,;4]$, donc $u_{n+1} \in [0\,;4]$.

Par récurrence sur $n$, on a prouvé la propriété.

**b.** $u_{n+1} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leqslant 0$, car $u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell$.

**d.** On résout $f(\ell) = \ell$ ; on obtient $\ell = 0$.

**101** **1** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par somme de limites.

**2** $f'(x) = \frac{1}{x} + x > 0$ pour $x > 0$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3** $f$ est continue, strictement croissante :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$.

Or, $f(1) = -0{,}5$ et $f(2) = \ln 2 + 1 > 0$.

Donc $1 < \alpha < 2$.

**4** Cet algorithme applique la méthode de dichotomie pour déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-n}$ près.

```
dicho() :={
local x;y ;u;n;
input("Donner la valeur de a",a);
input("Donner la valeur de b",b);
input("Donner la valeur de n",n);
u:=a ;v:=b;
tantque v-u>10^(-n) faire
x:=evalf((u+v)/2);y:=evalf(ln(x)+x*x/2-1);
si y<0 alors u:=x sinon v:=x;fsi
ftantque
print("a est égal à
"+u+" et b est égal à "+v+"");
}
```

```
dicho ()
```

```
a est égal à
1.24785614014 et b est égal à 1.24785709381
Evaluation time: 16.1
```

**102** **1** **a.** $f'(0) = -\dfrac{1}{20} f(0)[3 - \ln(f(0))] = -\dfrac{3}{20}$.

**b.** $f$ vérifie (E) si, et seulement si, pour tout $t \in [0\,; +\infty[$ :

$$f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)[3 - \ln(f(t))]$$
$$\Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{20}\ln(f(t)) - \frac{3}{20}$$
$$\Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}.$$

**2** Pour tout $t \in [0\,; +\infty[$ :

$$g'(t) = \frac{1}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}.$$

**a.** $f(t) = \exp(g(t)) = \exp\left(3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$

De plus, $f(0) = 1$, donc $C = -3$.

Donc $f(t) = \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$.

**b.** $\lim\limits_{t \to +\infty} 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

**c.** On veut $\exp\left(3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right) < 0{,}02$.

D'où $t > 20\ln\left(\dfrac{3 - \ln 0{,}02}{3}\right) \approx 16{,}7$ années.

Donc au bout de 17 ans.

## Pistes pour l'accompagnement personnalisé

### Revoir les outils de base

**103** **1** $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+3}$ ; $f'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.

**2** $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 3)^2}$ ; $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$.

**104** **1** $f'(x) = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^x$.

$f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

**2** $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 3)^2} > 0$.

Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

## Les savoir-faire du chapitre

**105** **1** **a.** 3. **b.** $-5$. **c.** $\dfrac{1}{2}(\ln 7 - \ln 3)$. **d.** 4.
**e.** $\dfrac{1}{3}$. **f.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **g.** $2x + 3$. **h.** $x^2$. **i.** $x^2$.

**2** $f'(x) = \mathrm{e}^x - 3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $3 - 3\ln 3$ | ↗ | |

**106** **1** **a.** $x = \mathrm{e}^4$. **b.** $x = \ln 4$.
**c.** $x = \mathrm{e}^4 - 2$. **d.** $x = \ln 5 - 3$.

**2** **a.** Ensemble de définition : $\left]\dfrac{2}{3}\,; +\infty\right[$ ; ensemble solution : $\{2\}$.
**b.** Ensemble de définition : $\left]\dfrac{2}{3}\,; +\infty\right[$ ; ensemble solution : $]2\,; +\infty[$.
**c.** Ensemble de définition : $]1\,; +\infty[$ ; ensemble solution : $\{2\}$.
**d.** Ensemble de définition : $]1\,; +\infty[$ ; ensemble solution : $\varnothing$.

**107** **a.** $+\infty$. **b.** $-\infty$. **c.** 1. **d.** $+\infty$.

**108** **1** $2\ln 3$. **2** $\ln 3$. **3** $\ln 3$.

**109** **a.** $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ si $x > 0$.

Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**b.** $f'(x) = \ln x + 1$ ; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ | ↗ | |

**c.** $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ ; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}$.

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ | ↘ | $0$ |

**d.** $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ est du signe de $x$, donc $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

## Approfondissement

**110** **1** La courbe est quasi rectiligne, ce qui semble indiquer que le logarithme décimal du nombre de séismes est une fonction affine de la magnitude.

**2** Pour $M=3$, on a $N=2\times10^2$, d'où :
$$\log(N)=\log 2+2.$$
**3** Pour $M=6$, on a $N=3\times10^{-1}$, d'où :
$$\log(N)=\log 3-1.$$
On en déduit que $\begin{cases} a-3b=\log 2+2 \\ a-6b=\log 3-1\end{cases}$.

D'où $b\approx 0{,}94$ et $a\approx 5{,}12$.

**111** **1** **a.** et **b.** On peut utiliser une feuille de tableur :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | d | Aln(1+1/d) |
| 2 | 1 | 0,30103 |
| 3 | 2 | 0,17609126 |
| 4 | 3 | 0,12493874 |
| 5 | 4 | 0,09691001 |
| 6 | 5 | 0,07918125 |
| 7 | 6 | 0,06694679 |
| 8 | 7 | 0,05799195 |
| 9 | 8 | 0,05115252 |
| 10 | 9 | 0,04575749 |

**2** Il s'agit de vérifier que dans les chiffres présents dans la déclaration du contribuable, la répartition suit une loi de Benford, ce qui n'est généralement pas le cas lorsque les chiffres ont été « inventés ».

**112** **1** $k\ln(x\times y)=k(\ln x+\ln y)=k\ln x+k\ln y$.

**2** On pose $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

Soient $x$ et $y$ des réels strictement positifs, on a :
$$g(xy)=xg(y)+yg(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{g(xy)}{xy}=\frac{g(y)}{y}+\frac{g(x)}{x}$$
$$\Leftrightarrow f(xy)=f(x)+f(y).$$

Ceci étant vrai pour tous $x$ et $y$, des réels strictement positifs, ceci signifie que $f$ est solution de (E), car $f$ est bien continue sur $]0\,;+\infty[$.

D'où $f(x)=k\ln x$.

D'où $g(x)=kx\ln x$.

## Vers le Supérieur

**113** **1** **a.** $C(10)\approx 7{,}3$ milliers d'euros ;

$C(20)\approx 11{,}1$ milliers d'euros.

Le coût de fonctionnement n'a pas doublé, il n'y a pas proportionnalité.

**2** **a.** $f'(x)=2-\dfrac{40\times0{,}1}{0{,}1x+1}=\dfrac{0{,}2x-2}{0{,}1x+1}$.

On en déduit donc le tableau suivant :

| $x$ | 0 | | 10 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | 17 | ↘ | | ↗ | 57,2 |

**b.** Le coût est minimal pour 10 bateaux, il est égal à 7,3 milliers d'euros, à 100 euros près.

**3** **a.** $B(q)=3q-C(q)=q+40\ln(0{,}1q+1)-15$.

**b.** Il faut louer au moins 4 bateaux.

**114** **1** **a.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ si on pose $f(x)=\ln x$.

Donc $T$ a pour équation :
$$y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a \Leftrightarrow \frac{1}{a}x-y-1+\ln a=0.$$
**b.** $\vec{v}\left(1\,;\dfrac{1}{a}\right)$ est un vecteur directeur.

**2** $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :
$$a\times1+\ln a\times\frac{1}{a}=0 \Leftrightarrow a^2+\ln a=0.$$
**a.** $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$ si $x>0$.

**b.** $f$ est continue strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

D'où le résultat, par application du théorème des valeurs intermédiaires.

**c.** Par balayage, on obtient que l'unique solution de $f(x)=0$ est $a\approx 0{,}653$.

D'où $A(0{,}653\,;-0{,}426)$.

CHAPITRE 6

# Calcul intégral

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Intégration**<br><br>Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ comme aire sous la courbe.<br><br>Notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.<br><br>Théorème : si $f$ est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, la fonction $F$ définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée $f$. | | On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie.<br><br>On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition.<br><br>■ Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du théorème dans le cas où $f$ est positive et croissante. |
| Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. | • Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.<br><br>• Connaître et utiliser les primitives de $u'e^u$, $u'u^n$ ($n$ entier relatif, différent de $-1$) et, pour $u$ strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$. | Une primitive $F$ de la fonction continue et positive $f$ étant connue, on a :<br>$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$. |
| Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. | | ■ Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum On admet le cas général.<br>On fait observer que certaines fonctions comme $x \longmapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ». |
| Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque. | • Calculer une intégrale.<br><br>• Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. | La formule $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$, établie pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque. |
| Linéarité, positivité, relation de Chasles. | • Encadrer une intégrale. | L'intégration par parties n'est pas un attendu du programme. |
| Valeur moyenne. | ♦ Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale. | La notion de valeur moyenne est illustrée par des exemples issus d'autres disciplines.<br>⇄ [SPC] Mouvement uniformément accéléré.<br>⇄ [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique.<br>(AP) *Calcul du volume d'un solide.* |

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

## 2. Intentions des auteurs

Après avoir revu et précisé les notions de suites numériques, limites et continuité d'une fonction numérique, après avoir complété l'herbier des fonctions usuelles avec la fonction exponentielle et logarithme népérien, on introduit dans ce chapitre le concept d'intégrale d'une fonction numérique sur un intervalle fermé. Comme il a été procédé historiquement le moteur de cette notion est le calcul d'aire. Cela justifie l'introduction de la notion d'intégrale par l'intégrale de $a$ à $b$ $(a \leqslant b)$ d'une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.
Le lien avec les primitives permet de généraliser.

Ce chapitre favorise l'introduction naturelle d'algorithmes permettant de calculer une valeur approchée d'une intégrale inaccessible par le calcul algébrique.
Comme le préconise le programme, on a évité une trop grande technicité pour rester le plus proche du sens lié à ces notions.
La notion de valeur moyenne très utilisée dans d'autres disciplines est aussi mise en valeur.
En accompagnement personnalisé, on aborde la notion de volume d'un solide et on prépare les lois continues en probabilité en abordant la notion d'intégrale généralisée.

## Partir d'un bon pied

**Objectifs**

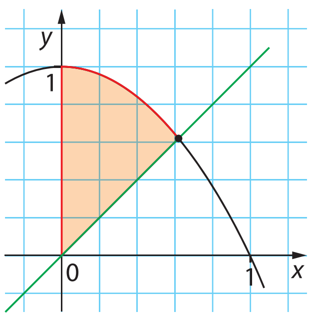
*Réactiver chez l'élève :*
*– les formules de dérivation et approcher la lecture inverse du tableau des dérivées ;*
*– le calcul d'aire de figures usuelles ou un encadrement de l'aire lorsque les formules n'existent pas ;*
*– la caractérisation d'une surface plane à l'aide des coordonnées des points qui la composent.*

**A** **1** **a.** et **c.**
**2** **a.** **b.** et **c.**
**3** **b.** et **c.**
**4** **b.**

**B** **1** Faux.
**2** Vrai.
**3** Faux.

**C** Aire du trapèze $ABCD$ : $\dfrac{5+2}{2}\times 2 = 7\text{ cm}^2$.
Aire de l'ellipse : l'ellipse est comprise dans un rectangle d'aire $7\times 4 = 28\text{ cm}^2$, et contient un rectangle d'aire $5\times 2 = 10\text{ cm}^2$.
Surface sous la parabole : elle est comprise dans un rectangle d'aire $3\times 2{,}5 = 7{,}5\text{ cm}^2$, et contient un rectangle d'aire $1\times 2 = 2\text{ cm}^2$.
Aire du trapèze vert : $\dfrac{1+\left(\dfrac{4}{3}+1\right)}{2}\times 4 = \dfrac{20}{3}\text{ cm}^2$.

**D** **1** **a.** et **b.**




**2** L'ensemble coloré est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \quad \text{et} \quad y \geqslant x-2.$$

## Découvrir

### Activité 1 Aire sous une hyperbole à l'aide de rectangles

**Objectif :** *Aborder le calcul de l'aire de la surface sous la courbe par la méthode des rectangles en utilisant un algorithme.*

**1** **a.** La surface $\mathcal{S}$ contient les cinq rectangles inférieurs, et est contenue dans les cinq rectangles supérieurs.
Les hauteurs des rectangles inférieurs sont $f\left(1+\frac{1}{5}\right)$, $f\left(1+\frac{2}{5}\right)$, … et $f\left(1+\frac{5}{5}\right)$ ; les hauteurs des rectangles supérieurs sont $f(1)$, $f\left(1+\frac{1}{5}\right)$, … et $f\left(1+\frac{4}{5}\right)$.

$$\text{Donc } \frac{1}{5}\times f\left(1+\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{5}\times f\left(1+\frac{5}{5}\right) \leqslant \mathcal{A}$$
$$\leqslant \frac{1}{5}\times f(1)+\ldots+\frac{1}{5}\times f\left(1+\frac{4}{5}\right),$$

d'où les inégalités indiquées en factorisant par $\frac{1}{5}$.
**b.** En utilisant les résultats du logiciel, on a :
$\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1627}{504} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1879}{504}$, c'est-à-dire :
$\dfrac{1627}{2\,520} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \dfrac{1879}{2\,520}$.
Or $\dfrac{1627}{2\,520} \approx 0{,}6$ (par défaut) et $\dfrac{1879}{2\,520} \approx 0{,}8$ (par excès).
Donc $0{,}6 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}8$.

**2** **a.** La surface $\mathcal{S}$ contient les $n$ rectangles inférieurs, et est contenue dans les $n$ rectangles supérieurs, qui sont de largeur $\frac{1}{n}$.
Les hauteurs des rectangles inférieurs sont $f\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $f\left(1+\frac{2}{n}\right)$, … et $f\left(1+\frac{n}{n}\right)$ ; les hauteurs des rectangles supérieurs sont $f(1)$, $f\left(1+\frac{1}{n}\right)$, … et $f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)$.

$$\text{Donc } \frac{1}{n}\times f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\times f\left(1+\frac{n}{n}\right) \leqslant \mathcal{A}$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\times f(1)+\ldots+\frac{1}{n}\times f\left(1+\frac{n-1}{n}\right),$$

d'où les inégalités indiquées en factorisant par $\frac{1}{n}$.

**b.** Comme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n}$, on calcule de proche en proche la somme en ajoutant $\frac{f\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n}$ pour un entier $k$ allant de 1 à $n$.

Pour que l'algorithme affiche $S_n$ et $T_n$, on propose d'ajouter l'instruction :

Afficher($S + (f(1) - f(2))/n$) ;

**c.** Pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$T_n - S_n = \frac{1}{n}\times\left[\left(f(1)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right]\right.$$
$$= \frac{1}{n}\times(f(1)-f(2)) = \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n}.$$

**d.** Pour que $S_n$ et $T_n$ soient des valeurs approchées de $\mathcal{A}$ à 0,001 près, il suffit que $\frac{1}{2n} \leqslant 0{,}001$, c'est-à-dire $n \geqslant 500$.

Après programmation, on obtient : $0{,}693 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}694$.

**3** Au **1 b.**, on a : $0{,}6 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}8$.

Donc $1{,}82 \leqslant e^{\mathcal{A}} \leqslant 2{,}23$.

Au **2 d.** on a : $0{,}693 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}694$.

Donc $1{,}9997 \leqslant e^{\mathcal{A}} \leqslant 2{,}0018$.

On peut conjecturer que $e^{\mathcal{A}} = 2$, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \ln(2)$.

## Activité 2 Aire sous une parabole à l'aide de trapèzes

**Objectif :** *Aborder le calcul de l'aire de la surface sous la courbe par la méthode des trapèzes en utilisant un algorithme, puis une méthode exacte.*

**1** Pour tout entier $k$ entre 0 et $n-1$ :

$$\mathcal{A}_k = \frac{y_M + y_N}{2}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{2n}\times\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2\right)$$

$$\mathcal{A}_k = \frac{1}{2n^3}\times(k^2+(k+1)^2).$$

**2 a.** Pour tout entier $k$ entre 0 et $n-1$, la droite $(MN)$ est au-dessus de la parabole sur $\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$.

Donc le trapèze $ABNM$ contient la surface située sous la parabole, l'axe des abscisses, et les droites d'équation et $x = \frac{k}{n}$ et $x = \frac{k+1}{n}$. On en déduit que $S_n$ est une valeur approchée par excès de $\mathcal{A}$.

**b.** On propose :

```
ALGO
Variables :
    n, k : entiers ; S : réel ;
Début :
    Entrer(n) ;
    S ← 0 ;
    Pour k allant de 0 à n − 1 Faire
        S ← S + (k² + (k + 1)²)/(2n³) ;
    FinPour ;
    Afficher(S) ;
Fin.
```

**c.** On obtient $S_{10} = 0{,}335$ et $S_{100} = 0{,}33335$.

On conjecture que $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

**3 a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^3}(k^2+(k+1)^2) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{2n^3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^3}$$

$$S_n = \frac{0}{2n^3} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{2n^3} + \frac{n^2}{2n^3}.$$

Donc :

$$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2.$$

**b.** Comme $\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2$, on a :

$$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}.$$

**c.** On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

## Activité 3 Aire et primitives

**Objectif :** *Relier la problématique du calcul d'une aire aux calculs de primitives.*

**1** Aire de $OABC = \frac{2+3}{2}\times 2 = 5$ u.a.

**2** Aire de $OMNC = \frac{2+\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}\times x = \frac{x^2}{4} + 2x$.

**3 a.** $f(x) = \frac{x}{2} + 2$. Donc la fonction $F$ est la dérivée de la fonction $f$.

**b.** $F(2) - F(1) = \left(\frac{2^2}{4} + 2\times 2\right) - \left(\frac{0}{4} + 0\right) = 5$.

## Activité 4 Fonction « aire sous la courbe »

**Objectif :** *Démontrer, dans le cas d'une fonction $f$ continue et croissante, que la fonction « aire sous la courbe » entre $a$ et $x$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

**1** $\mathcal{A}(a) = 0$.

$\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a)$ est l'aire de $S$, en unités d'aire.

**2 a.** La fonction $f$ est croissante sur $[t\,; t+h]$.

Donc le domaine sous la courbe de $f$ sur $[t\,; t+h]$ contient le rectangle inférieur de largeur $h$ et de longueur $f(t)$, et est contenu dans le rectangle supérieur de largeur $h$ et de longueur $f(t+h)$.

Comme ce domaine a pour aire $\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t)$ (car $h > 0$), on a :

$$h\times f(t) \leqslant \mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) \leqslant h\times f(t+h).$$

**b.** La fonction $f$ est croissante sur $[t+h\,; t]$.

Donc le domaine sous la courbe de $f$ sur $[t+h\,; t]$ contient le rectangle inférieur de largeur $(-h)$ et de longueur $f(t+h)$, et est contenu dans le rectangle supérieur de largeur $(-h)$ et de longueur $f(t)$.

Comme ce domaine a pour aire $\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t+h)$ (car $h < 0$), on a :

$$(-h)\times f(t+h) \leqslant \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t+h) \leqslant (-h)\times f(t).$$

**c.** Si $h > 0$, $f(t) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t+h) - \mathscr{A}(t)}{h} \leqslant f(t+h)$ ;

si $h < 0$, $f(t+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t) - \mathscr{A}(t+h)}{-h} \leqslant f(t)$,

c'est-à-dire : $f(t+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t+h) - \mathscr{A}(t)}{h} \leqslant f(t)$.

Comme la fonction $f$ est continue en $t$,

$$\lim_{h \to 0} f(t+h) = f(t).$$

Par le théorème des gendarmes, la limite du taux d'accroissement de $\mathscr{A}$ entre $t$ et $t+h$, lorsque $h$ tend vers 0, est égale à $f(t)$.

Donc la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en $t$ et $\mathscr{A}'(t) = f(t)$.

**3** Une primitive de la fonction carrée est : $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$.

Donc l'aire sous la parabole sur $[0\,;1]$ est :

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

# Exercices d'application

## Savoir faire Déterminer une intégrale à partir de calculs d'aires

**1** **a.** $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ par la relation de Chasles.

En utilisant l'aire d'un triangle et d'un carré, on obtient :

$$\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1 \times 1}{2} + 1^2 = \frac{3}{2}.$$

**b.** Pour $t \in [0\,;1]$, on a $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = 1 \times t = t$ ;

Pour $t \in [1\,;2]$, on a :

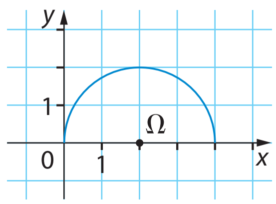
$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = 1 + \frac{1+t}{2} \times (t-1) = \frac{t^2+1}{2}.$$

**2** **a.** $y = \sqrt{4x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x - x^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

On reconnaît l'équation du demi-cercle supérieur de centre $(2\,;0)$ et de rayon 2.

**b.** On a :




Donc $\int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \times 2^2\pi = 2\pi$.

**3** **a.** $\int_0^1 (3x^2 + 1)\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_0^1 1\mathrm{d}x$

$$= 3 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 = 2.$$

**b.** $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$.

## Savoir faire Déterminer des primitives

**4** **a.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{4}x^4 - x^2 + 2x$.

**b.** Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $g$ est :

$x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{1}{2x^2}$.

**c.** Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $h$ est $x \longmapsto 6\sqrt{x}$.

**5** Les primitives de $f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x) + k$.

Comme la courbe cherchée passe par le point $A(0\,;1)$, on a :

$\ln(1 + \mathrm{e}^0) + k = 1$, soit $k = 1 - \ln(2)$.

La primitive cherchée est $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^x}{2}\right) + 1$.

**6** **a.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ est $x \longmapsto 2\sqrt{x^2+1}$.

**b.** Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $g$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$.

**7** **a.** La dérivée de $u\sqrt{u}$ est :

$$u' \times \sqrt{u} + u \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3}{2}u'\sqrt{u}.$$

Donc une primitive de $u'\sqrt{u}$ est $\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$.

**b.** Une primitive sur $]1\,;+\infty[$ de $x \longmapsto x\sqrt{x^2-1}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$.

## Savoir faire Calculer et utiliser une intégrale

**8** **a.** $\int_{-3}^{3} (x-1)^2\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-3}^{3}$

$$= \frac{1}{3}(3-1)^3 - \frac{1}{3}(-3-1)^3 = 24.$$

**b.** La valeur moyenne est :

$\mu = \dfrac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(x^3 + x^2 - x + 1)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{2} = \dfrac{11}{4}$.

**9** $x \longmapsto x^2 - 1$ s'annule en 1 et en $-1$, et est négative sur $[-1\,;1]$.

Par la relation de Chasles :

$\int_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(x^2-1)\mathrm{d}x$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\dfrac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = 4.$

**10** **a.** Soit la fonction $F$ définie sur $[0\,;3]$ par :

$$F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout réel $x$ de $[0\,;3]$, $F'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$.

Donc $F$ est une primitive de $f$ si $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ainsi $F(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

**b.** En unités d'aire, l'aire du domaine jaune est :

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 1 - 4\mathrm{e}^{-3}.$$

## Savoir faire Utiliser les propriétés de l'intégrale

**11** Pour tout réel $x$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Donc $\cos^2 x - 1 = \dfrac{\cos(2x)-1}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)-1}{2}\,\mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

**12** **a.** Pour le dénominateur, $\Delta = -3$. Donc pour tout réel $x$, $x^2 - x + 1 \neq 0$.
Donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-2x}{x^2-x+1}$ est définie et continue sur $[0\,;1]$.
On a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-2x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 = 0.$

**b.** La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est définie et continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. On a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

**13** Sur $[0\,;1]$, on pose $d(x) = \sqrt{1+x} - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)$.

$d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1\right) \leqslant 0$, car $0 \leqslant x \leqslant 1$.
La fonction $d$ est donc décroissante sur $[0\,;1]$.
Comme $d(0) = 0$, pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$, $d(x) \leqslant 0$.
On peut aussi remarquer que :

$$d(x) = \frac{-x^2/4}{\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{x}{2}\right)} \leqslant 0.$$

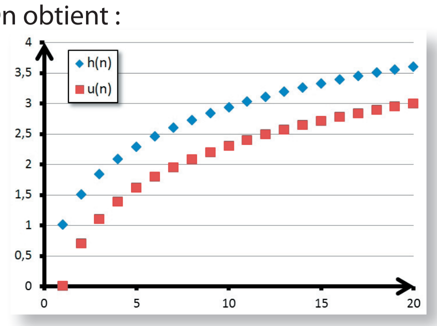
Donc $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$. On en déduit que $A \leqslant B$.

## Travaux pratiques

**14** **Étude de la série harmonique**

**1 Lire l'énoncé et fixer les notations**

**1** et **2** On obtient :




Il semble que la différence des deux suites devienne presque constante.

**2 Élaborer une démarche**

**1** Soit un entier $n \geqslant 1$. Pour tout entier $k$ entre 1 et $n-1$, la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $[k\,;k+1]$. Donc pour tout réel $x$ de $[k\,;k+1]$ :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

En intégrant chaque membre des inégalités entre $k$ et $k+1$, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

**2** Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$d_{n+1} - d_n = (h_{n+1} - \ln(n+1)) - (h_n - \ln(n))$$
$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

Or d'après la question **1**,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit $-\dfrac{1}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(n+1) \leqslant -\dfrac{1}{n+1}$.

Donc $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \leqslant d_{n+1} - d_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit que $d_{n+1} - d_n \leqslant 0$.
Donc la suite $d$ est décroissante.

**3** Pour tout entier $n \geqslant 1$, par la relation de Chasles, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or par la question **1**, $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$,

$\dfrac{1}{3} \leqslant \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$,

… ,

$\dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n-1}$.

En sommant membres à membres ces inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

Donc :

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Donc : $\qquad \dfrac{1}{n} + [\ln(x)]_1^n \leqslant h_n \leqslant 1 + [\ln(x)]_1^n$.

Donc en soustrayant $\ln(n)$, on a : $\dfrac{1}{n} \leqslant d_n \leqslant 1$.

**4** La suite $d$ est décroissante, et minorée par 0 (d'après la question **3**). Donc la suite $d$ converge.

**15** **Mouvement d'un solide en chute libre**

**1** ▸ La fonction $v$ est la primitive de $a$ telle que $v(0) = 3$.
Comme $v'(t) = -10$, $v(t) = -10 \times t + k$, où $k$ est un réel.
Comme $v(0) = 3$, on a $k = 3$.
Donc $v(t) = -10t + 3$.

▸ La fonction $z$ est la primitive de $v$ telle que $z(0) = 1$.
Comme $z'(t) = v(t)$, $z(t) = -10 \times \dfrac{t^2}{2} + 3t + k$, où $k$ est un réel.
Comme $z(0) = 1$, on a $k = 1$.
Donc $z(t) = -5t^2 + 3t + 1$.

**2** On résout $z(t) = 0$, avec $t \geqslant 0$.

$\Delta = 29$ ; $t_1 = \dfrac{-3-\sqrt{29}}{-10} = \dfrac{3+\sqrt{29}}{10} \approx 0{,}839$

et $t_2 = \dfrac{3-\sqrt{29}}{10} \approx -0{,}239$.

Donc la bille atteint le sol au bout de $t_0 \approx 0{,}839$ s.

## 16 Étude d'une suite définie par une intégrale

**1 a.** En utilisant la relation de Chasles :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 1dx = 1.$$

**b.** $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$

$$= -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+1) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right) = 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right).$$

Donc $u_0 = 1 - u_1 = -\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

**2 a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, en utilisant la relation de Chasles :

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}+e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}dx$$
$$= \int_0^1 e^{-nx}dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

- On a : $u_2 + u_1 = \dfrac{1-e^{-1}}{1} = 1 - e^{-1}$.

Donc $u_2 = 1 - e^{-1} - u_1 = -\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) - e^{-1}$

$$= \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - e^{-1}.$$

- On a : $u_3 + u_2 = \dfrac{1-e^{-2}}{2}$. Donc :

$$u_3 = \frac{1-e^{-2}}{2} - u_2 = \frac{1}{2} + e^{-1} - \frac{e^{-2}}{2} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

**b.** La valeur initiale affectée dans $u$ n'est pas correcte, et il manque le calcul de $u_1$. Dans la boucle « Tant Que », il manque le retrait de $u$, et la variable $i$ doit être remplacée par $i-1$. Ainsi, on propose :

**ALGO**

Variables :
    $n$, $i$ : entiers ; $u$ : réel ;
Début :
    Entrer $(n)$ ;
    $u \leftarrow \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$
    Si $n \geqslant 1$ alors $u \leftarrow \ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right) + 1$ ;
    FinSi ;
    Pour $i$ allant de 2 à $n$ faire
        $u \leftarrow \dfrac{1-e^{-(i-1)}}{i-1} - u$
    FinPour ;
    Afficher$(u)$ ;
Fin.

**3 a.** En B4, on entre =(1-EXP(-A3))/A3-B3.

**b.** On conjecture que la suite $u$ converge vers 0.

**4 a.** Pour tout entier $n$, $u_{n+1} \geqslant 0$.

Donc par la question **2 a.**, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

**b.** On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**c.** Par la question **4 a.**, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Pour avoir $u_n \leqslant 0{,}1$, il suffit donc que $\dfrac{1}{n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 10$.

Donc pour $n \geqslant 100$, on est sûr que $u_n \leqslant 0{,}1$.

## 17 Formule de Simpson et calcul approché d'intégrale

**1 a.** $I_S = \dfrac{1-0}{6}\left[f(0) + 4f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(1)\right]$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{4}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{47}{60} \approx 0{,}783.$$

**b.** Pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$, on obtient par un logiciel de calcul formel :

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ;

$g(x) = f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ;

$h(x) = f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ ;

$k(x) = f^{(3)}(x) = \dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$ ;

$m(x) = f^{(4)}(x) = \dfrac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$.

Donc $m'(x) = \dfrac{240x(3-x^2)(3x^2-1)}{(1+x^2)^6}$.

D'où le tableau de variations de la fonction $f^{(4)}$, dérivée d'ordre 4 de $f$ :

| $x$ | 0 | | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f^{(4)}(x)$ | 24 | ↘ | $-10{,}125$ | ↗ | $-3$ |

On en déduit que le maximum de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[0\,;1]$ est 24. Donc $M_4 = 24$.

**c.** Un majorant de l'erreur commise en approchant $I$ par $I_S$ est donc $\dfrac{1\times M_4}{2\,880} = \dfrac{1}{120} \approx 0{,}0084$.

**2 a.** On obtient :

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | intervalle [ a ; b ] | | | | | |
| 2 | a | b | f(a) | f((a+b)/2) | f(b) | formule de Simpson |
| 3 | 0 | 0,1 | 1 | 0,99750623 | 0,99009901 | 0,099668732 |
| 4 | 0,1 | 0,2 | 0,99009901 | 0,97799511 | 0,96153846 | 0,097726965 |
| 5 | 0,2 | 0,3 | 0,96153846 | 0,94117647 | 0,91743119 | 0,094061259 |
| 6 | 0,3 | 0,4 | 0,91743119 | 0,8908686 | 0,86206897 | 0,089049576 |
| 7 | 0,4 | 0,5 | 0,86206897 | 0,83160083 | 0,8 | 0,083141205 |
| 8 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 0,76775432 | 0,73529412 | 0,076771857 |
| 9 | 0,6 | 0,7 | 0,73529412 | 0,7029877 | 0,67114094 | 0,070306431 |
| 10 | 0,7 | 0,8 | 0,67114094 | 0,64 | 0,6097561 | 0,064014951 |
| 11 | 0,8 | 0,9 | 0,6097561 | 0,58055152 | 0,55248619 | 0,05807414 |
| 12 | 0,9 | 1 | 0,55248619 | 0,52562418 | 0,5 | 0,052583048 |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | Total | 0,785398163 |

Une valeur approchée de $I$ est 0,785 381 63 .

**b.** En utilisant le tableau de variations de $f^{(4)}$ à la question **1 b.** et que $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}57$, on obtient :

| Intervalle $[x_i\,;\,x_{i+1}]$ | $f^{(4)}(x_i)$ | $f^{(4)}(x_{i+1})$ | Majorant de $\lvert f^{(4)}\rvert$ |
|---|---|---|---|
| $[0\,;0{,}1]$ | 24 | 20,56 | 24 |
| $[0{,}1\,;0{,}2]$ | 20,564 | 11,99 | 20,564 |
| $[0{,}2\,;0{,}3]$ | 11,994 | 2,19 | 11,994 |
| $[0{,}3\,;0{,}4]$ | 2,19 | −5,394 | 5,394 |
| $[0{,}4\,;0{,}5]$ | −5,39 | −9,339 | 9,339 |
| $[0{,}5\,;0{,}6]$ | −9,339 | −10,07 | 10,125 |
| $[0{,}6\,;0{,}7]$ | −10,07 | −8,82 | 10,07 |
| $[0{,}7\,;0{,}8]$ | −8,822 | −6,78 | 8,822 |
| $[0{,}8\,;0{,}9]$ | −6,782 | −4,71 | 6,782 |
| $[0{,}9\,;1]$ | −4,719 | −3 | 4,719 |

L'écart entre $I$ et la valeur obtenue à la question **1 a.** est majorée par la somme des $\frac{(x_{i+1}-x_i)^5}{2\,880}\times M_{4[x_i\,;\,x_{i+1}]}$, c'est-à-dire :

$$\frac{(0{,}1)^5\times 24}{2\,880}+\frac{(0{,}1)^5\times 20{,}564}{2\,880}+\ldots+\frac{(0{,}1)^5\times 4{,}719}{2\,880},$$

qui est majorée par $4\times 10^{-7}$.

## Faire le point

**21** **1** **b.** et **c.** **2** **a.** et **b.** **3** **b.** **4** **a.** et **c.** **5** **b.** **6** **a.** **7** **c.** **8** **b.**

**22** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux. **5** Vrai.

## Exercices d'application

### 1 Intégrale d'une fonction continue et positive

**23** **1** **a.** et **c.** **2** **b.** **3** **c.**

**24** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

**25** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux.

### Utiliser la définition

**26** **1** $M(x\,;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow y=f(x)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ et $y\geqslant 0$.

Donc $\mathscr{C}$ est le demi-cercle supérieur de centre $O$ et de rayon 1.

**2** $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire du demi-disque de centre $O$ et de rayon 1, en u.a. Donc $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

**27** En utilisant les formules d'aires de triangles, rectangle et trapèze, on a :

$\int_{-4}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{3\times 4}{2}=6$ ;

$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2+4}{2}\times 2=6$ ;

$\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=2\times 2=4$.

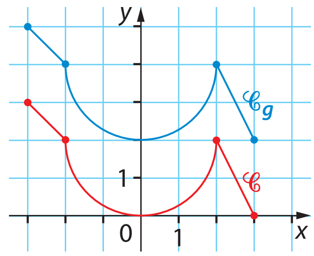
Par la relation de Chasles,

$$\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-4}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=16.$$

**28** **1** $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=4\times 2-\frac{\pi\times 2^2}{2}=8-2\pi$.

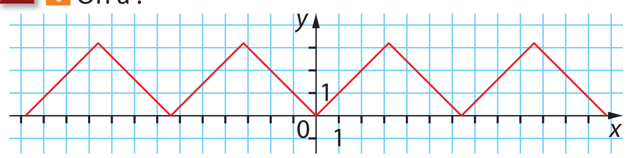
$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{2}+(8-2\pi)+1=\frac{23}{2}-2\pi.$$

**2 a.**




**b.** $\int_{-3}^{3} g(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x+6\times 2=\frac{47}{2}-2\pi$.

**29** **1** On a :




**2** ▸ Sur $[0\,;\pi]$, la fonction $f$ est affine et croissante. Comme $f(0)=0$, la fonction $f$ est continue et positive sur $[0\,;\pi]$.

▸ De la même façon, la fonction $f$ est continue et positive sur $]\pi\,;2\pi[$.

▸ De plus $f(\pi)=\pi$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}} f(x)=-\pi+2\pi=\pi$.

Donc la fonction $f$ est continue en $\pi$, et donc sur $[0\,;2\pi[$. Comme elle est périodique de période $2\pi$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

**3** $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi\times\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$ ;

$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}=\pi^2$.

**4** Par $2\pi$-périodicité, $\int_{-2\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

Donc $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi^2$.

De même :

$$\int_{-4\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4\pi}^{-2\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \pi^2 + 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{7\pi^2}{2}.$$

## Encadrer une intégrale

**30** **1** Sur $[0\,;1]$, le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ contient le rectangle inférieur de longueur 1 et de largeur 1, et est contenu dans le rectangle supérieur de longueur 2 et de largeur 1.

On en déduit la comparaison des aires, en u.a. :

$$1 \times 1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1 \times 2,$$

soit : $$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2.$$

**2** De même, on obtient :

$0 \leqslant \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3$ ;

$2 \leqslant \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3$;

$0{,}5 \leqslant \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$;

$0 \leqslant \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0{,}5$.

**3** Par la relation de Chasles,

$$\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x.$$

En sommant membre à membre les inégalités des questions précédentes, on obtient :

$$3{,}5 \leqslant \int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 9{,}5.$$

**31** En utilisant deux trapèzes de hauteur 5, on a :

$$\frac{1+3}{2} \times 5 \leqslant \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1+4}{2} \times 5.$$

Donc $10 \leqslant \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 12{,}5$.

## Valeur moyenne

**32** La fonction $f$ est affine et positive sur $[1{,}5\,;+\infty[$.

- La valeur moyenne de $f$ sur $[2\,;5]$ est :

$$\mu_1 = \frac{1}{5-2}\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'aire d'un trapèze, on a :

$$\mu_1 = \frac{1}{3} \times \frac{f(2)+f(5)}{2} \times (5-2) = 4.$$

- La valeur moyenne de $f$ sur $[10\,;20]$ est :

$$\mu_2 = \frac{1}{20-10}\int_{10}^{20} f(x)\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'aire d'un trapèze, on a :

$$\mu_2 = \frac{1}{10} \times \frac{f(10)+f(20)}{2} \times (20-10) = 27.$$

**33** **1** $\mu_1 = \dfrac{1}{-1-(-2)}\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1+4}{2} \times 1 = 2{,}5$ ;

$\mu_2 = \dfrac{1}{4-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1+3}{2} \times 5 = 2.$

**2** $\mu = \dfrac{1}{4-(-2)}\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x.$

$= \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1+4}{2} \times 1 + \dfrac{1+3}{2} \times 5\right) = \dfrac{25}{12}.$

La moyenne (arithmétique) de $\mu_1$ et $\mu_2$ est :

$$\frac{2{,}5+2}{2} = 2{,}25.$$

Donc $\mu$ n'est pas la moyenne (arithmétique) de $\mu_1$ et $\mu_2$.

**3** En observant le calcul de $\mu$, on constate que :

$$\mu = \frac{1}{6}(1 \times \mu_1 + 5 \times \mu_2).$$

Donc $\mu$ est la moyenne pondérée de $\mu_1$ et $\mu_2$, affectés respectivement des coefficients 1 et 5.

# 2 Intégration et primitives

**34** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

**35** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai.

**36** **1** **b.** **2** **a.** **3** **b.**

## Utiliser des représentations graphiques

**37** La fonction $f$ est la dérivée de ses primitives. Comme $f$ est négative sur $]-\infty\,;-1]$ et positive sur $[-1\,;+\infty[$, ses primitives sont décroissantes sur $]-\infty\,;-1]$, et croissantes sur $[-1\,;+\infty[$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ne représentent donc pas des primitives de $f$. Par élimination, la courbe $\mathscr{C}_3$ représente une primitive de $f$.

**38** La fonction $f$ est la dérivée de la fonction $F$.

Par lecture graphique, on obtient le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = F'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

**a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai.

## Utiliser la définition

**39** **a.** Pour tout réel $x$,

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} - 6 = x^2 + x - 6.$$

En développant, $f(x) = x^2 + 3x - 2x - 6 = F'(x)$.

Donc $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Pour tout réel $x$,

$$F'(x) = 1\mathrm{e}^{3x} + x(3\mathrm{e}^{3x}) = (1+3x)\mathrm{e}^{3x} = f(x).$$

Donc $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** Pour tout réel $x$,

$$F'(x) = (2x)\times\ln(x^2+1) + (x^2+1)\times\frac{2x}{x^2+1} - 2x$$

$$= 2x\ln(x^2+1) + 2x - 2x = f(x).$$

Donc $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**40** **1** Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

**2** La primitive de ln qui prend la valeur 0 en 1 est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = x\ln(x) - x + k \text{ avec } F(1) = 0.$$

Donc : $1\ln(1) - 1 + k = 0$, soit $k = 1$.

Donc : $\quad F(x) = x\ln(x) - x + 1.$

**41** **1** La fonction $f$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Donc $f$ n'est pas dérivable en 0.

**2** Pour tout réel $x \geqslant 0$, $F'(x) = \dfrac{2x}{2} = x = f(x)$.

Pour tout réel $x < 0$, $F'(x) = -\dfrac{2x}{2} = -x = f(x)$.

Donc $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto F(x) + k$, où $k$ est un réel.

Comme on cherche celle qui s'annule en 1, $k$ vérifie :

$F(1) + k = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} + k = 0$, soit $k = -\dfrac{1}{2}$.

La primitive cherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto F(x) - \dfrac{1}{2}$.

**42** **1** Pour tout réel $x \in [0\,;2[$, $F'(x) = f(x)$.

- Ainsi pour tout réel $x \in [0\,;1[$, $F'(x) = 0$. La fonction $F$ est donc constante sur $[0\,;1[$.

Comme $F(0) = a$, pour tout réel $x \in [0\,;1[$, on a : $F(x) = a$.

- Pour tout réel $x \in [1;2[$, $F'(x) = 1$.

Donc il existe une constante $k$ telle que pour tout réel $x \in [1;2[$, $F(x) = x + k$.

Or la fonction $F$ est continue sur $[0\,;2[$, car dérivable sur $[0\,;2[$.

Donc $F(1) = a = 1 + k$. Ainsi $k = a - 1$.

Donc pour tout réel $x \in [1;2[$, $F(x) = x + a - 1$.

**2** - Sur $[0\,;1[$, $\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1} = \dfrac{a-(1+a-1)}{x-1} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 0.$

- Sur $]1;2[$, $\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1} = \dfrac{x+a-1-a}{x-1} = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1.$

La fonction $F$ n'est donc pas dérivable en 1.

Il y a donc contradiction avec le fait que $F$ soit une primitive de $f$. Donc la fonction $f$ n'admet pas de primitive.

## Détermination de primitives

**43** **1** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction donnée est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2x.$$

**2** Une primitive sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ de la fonction donnée est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2x^2}.$$

**44** **1** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction donnée est définie par exemple par :

$$F(x) = 3\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}x^2 - x.$$

**2** Une primitive sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ de la fonction donnée est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x} - x.$$

**45** **1** Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{3x^2+4x-2}{x^4} = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^4}.$$

Une primitive sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$ est définie par exemple par :

$$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{4}{-2x^2} - \frac{2}{-3x^3} = -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3}.$$

**2** On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u^2}$, où $u$ ne s'annule pas.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{-1}{x^2+2}.$$

**46** **1** On reconnaît la forme $\dfrac{1}{2}u' \times u^3$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(2x+3)^4 = \frac{1}{8}(2x+3)^4.$$

**2** On reconnaît la forme $\dfrac{1}{4}u' \times u^2$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}(x^4-1)^3 = \frac{1}{12}(x^4-1)^3.$$

**47** **1** On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Une primitive sur $]0{,}5\,;+\infty[$ est définie par exemple par :

$$F(x) = 2\sqrt{2x-1}.$$

**2** On reconnaît la forme $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u^2}$, où $u$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par exemple par :

$$F(x) = \frac{-1}{2}\times\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

**48** **1** On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$, où $u$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par exemple par :

$$F(x) = \ln(x^2+2).$$

**2** On reconnaît la forme $-\dfrac{u'}{u}$, sur un intervalle où $u$ ne s'annule pas.
Une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où $k\in\mathbb{Z}$, est définie par : $F(x)=-\ln|\cos(x)|$.

**49** **1** On reconnait la forme $\dfrac{3}{2}u'\times e^u$.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par exemple par :
$$F(x)=\frac{3}{2}e^{x^2}.$$
**2** On reconnaît la forme $\dfrac{7}{3}\dfrac{u'}{u}$.
- Sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$, une primitive est définie par exemple par : $F(x)=\dfrac{7}{3}\ln(3x+1)$.
- Sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right[$, $\dfrac{7}{3x+1}=\dfrac{-7}{-3x-1}$. Une primitive est définie par exemple par :
$$F(x)=\frac{7}{3}\ln(-3x-1).$$

**50** **1** On reconnaît la forme $u'\times u$.
Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ est par exemple définie par :
$$F(x)=\frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$
**2** On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.
Une primitive sur $]0\,;1[$ ou sur $]1;+\infty[$ est définie par exemple par : $F(x)=\ln(|\ln(x)|)$.

**51** **a.** On reconnaît la forme $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u^4}$.
Les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de $f$ sont définies par :
$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-3}\times\frac{1}{(x^2+2x)^3}+k=\frac{-1}{6(x^2+2x)^3}+k,$$
où $k$ est un réel.
**b.** On reconnaît la forme $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u}$.
Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $g$ sont définies par :
$$G(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+k,\text{ où } k \text{ est un réel.}$$

**52** **1** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto x^2-5x+k$, où $k$ est un réel.
Comme $F(0)=1$, on a : $0^2-5\times0+k=1$, soit $k=1$.
Donc $F(x)=x^2-5x+1$.
**2** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto e^x+k$, où $k$ est un réel.
Comme $F(2)=0$, on a : $e^2+k=0$, soit $k=-e^2$.
Donc : $F(x)=e^x-e^2$.

**53** **1** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto\dfrac{x^2}{8}-\sin(x)+k$, où $k$ est un réel.
Comme $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, on a : $\dfrac{\pi^2}{32}-1+k=0$,
soit $k=1-\dfrac{\pi^2}{32}$.
Donc : $F(x)=\dfrac{x^2}{8}-\sin(x)+1-\dfrac{\pi^2}{32}$.
**2** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto x^3+2x+k$, où $k$ est un réel.
Comme $F(-1)=3$, on a : $(-1)^3+2(-1)+k=3$, soit $k=6$.
Donc : $F(x)=x^3+2x+6$.

**54** **1** En développant,
$$f(x)=\cos(x)\times(\sin(x))^2+\cos(x)\times\sin(x).$$
En utilisant la forme $u'\times u^n$, les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{3}(\sin(x))^3+\dfrac{1}{2}(\sin(x))^2+k$, où $k$ est un réel.
Comme $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, on a : $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+k=1$, soit $k=\dfrac{1}{6}$.
Donc : $F(x)=\dfrac{1}{3}(\sin(x))^3+\dfrac{1}{2}(\sin(x))^2+\dfrac{1}{6}$.
**2** En utilisant la forme $\dfrac{u'}{u}$, où $u$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto -x+\ln(2+\cos(x))+k$, où $k$ est un réel.
Comme $F(0)=1+\ln(3)$, on a :
$\ln(2+1)+k=1+\ln(3)$, soit $k=1$.
Donc : $F(x)=-x+\ln(2+\cos(x))+1$.

**55** **1** En utilisant la dérivée d'un produit, on obtient :
$$(u\sqrt{u})'=u'\times\sqrt{u}+u\times\frac{u'}{2\sqrt{u}}=u'\times\left(\sqrt{u}+\frac{u}{2\sqrt{u}}\right)$$
$$=u'\times\left(\sqrt{u}+\frac{1}{2}\sqrt{u}\right)=\frac{3}{2}u'\sqrt{u}.$$
**2** Par la question précédente : $\left(\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right)'=u'\sqrt{u}$.
Donc une primitive sur I de $u'\sqrt{u}$ est la fonction $\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$.
Donc les primitives sur I de $u'\sqrt{u}$ sont les fonctions $\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}+k$, où $k$ est un réel.
**3** **a.** $f=u'\sqrt{u}$, où $u(x)=2x+3$.
Donc les primitives sur I de $f$ sont les fonctions
$x\mapsto\dfrac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+k$, où $k$ est un réel.
**b.** $f=\dfrac{1}{2}u'\sqrt{u}$, où $u(x)=x^2+3$.
Donc les primitives sur I de $f$ sont les fonctions
$$x\mapsto\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+k$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+k,\text{ où } k \text{ est un réel.}$$
**c.** $f=u'\sqrt{u}$.
Donc les primitives sur I de $f$ sont les fonctions $x\mapsto\dfrac{2}{3}(1+e^x)\sqrt{1+e^x}+k$, où $k$ est un réel.

## Avec transformation d'écriture

**56** **1** Pour tout réel $x\neq1$,
$$\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}=\frac{a(x-1)+b}{(x-1)^3}=\frac{ax+(-a+b)}{(x-1)^3}.$$
Par identification des coefficients avec $f(x)$, on a : $a=2$ et $b=5$.
**2** Une primitive de $f$ sur $]-\infty\,;1[$ est par exemple définie par :
$$F(x)=\frac{-2}{x-1}+\frac{-5}{2(x-1)^2}.$$

**57** **1** Pour tout réel $x \neq 1$,

$$x - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x(x^2+2x+1)-3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^3+2x^2+x-3}{(x+1)^2} = f(x).$$

**2** Les primitives de $f$ sur $]-1\,;+\infty[$ sont les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{x+1} + k$, où $k$ est un réel.

Comme $F(0) = -1$, on a : $0 + 3 + k = -1$, soit $k = -4$.

Donc : $\quad F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{x+1} - 4.$

**58** **1** Pour tout réel $x$,

$$\frac{e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{e^x - (1+e^x)}{1+e^x} = \frac{-1}{1+e^x} = f(x).$$

**2** On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$, où $u$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \ln(1+e^x) - x + k$, où $k$ est un réel.

Comme $F(0) = 0$, on a : $\ln(1+1) - 0 + k = 0$, soit $k = -\ln(2)$.

Donc : $F(x) = \ln(1+e^x) - x - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) - x.$

## Fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$, où $f$ est continue positive

**59** **1** La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est continue sur $[-1\,;+\infty[$.

Donc la fonction $f$ est dérivable sur $[-1\,;+\infty[$, et pour tout réel $x \geqslant -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Plus précisément, $f$ est la primitive sur $[-1\,;+\infty[$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ qui s'annule en $-1$.

**2** Pour tout réel $x$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

**60** **a.** La fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = e^{-x^2} > 0$.

Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**b.** La fonction $f$ est dérivable sur $[-4\,;4]$, et pour tout réel $x \in [-4\,;4]$, $f'(x) = \sqrt{16 - x^2} \geqslant 0$.

Donc la fonction $f$ est croissante sur $[-4\,;4]$.

**61** **1** Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{x+1} > 0$. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**2** **a.** Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose $d(t) = e^t - (t+1)$.

On a : $d'(t) = e^t - 1 \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

Donc la fonction $d$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $d(0) = 0$, pour tout réel $t \geqslant 0$, $d(t) \geqslant 0$.

Alors en divisant par $1 + t > 0$, on a : $\dfrac{e^t}{t+1} - 1 \geqslant 0$, soit $\dfrac{e^t}{t+1} \geqslant 1$.

**b.** Par la question précédente, $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^t}{t+1}dt \geqslant \int_0^2 1dt$.

Donc $f(2) \geqslant 2$.

**3** $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{e^t}{t+1}dt = 0$. Ainsi $0 \leqslant 1 \leqslant f(2)$.

La fonction $f$ est continue (car dérivable), strictement croissante sur $[0\,;2]$, et d'intervalle-image $[0\,;f(2)]$, contenant 1.

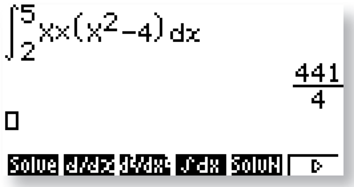
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $c$ dans $[0\,;2]$.

## Primitives et intégrales

**62** **a.** $I = \displaystyle\int_0^1 2e^x dx = [2e^x]_0^1 = 2e^1 - 2e^0 = 2e - 2.$

**b.** $I = \displaystyle\int_2^5 t(t^2-4)dt = \left[\frac{1}{4}(t^2-4)^2\right]_2^5$

$= \dfrac{1}{4}(5^2-4)^2 - \dfrac{1}{4}(2^2-4)^2 = \dfrac{441}{4}.$




**63** **a.** $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x+1}}dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_0^2$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{4 \times 2 + 1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4 \times 0 + 1} = 1.$

**b.** $I = \displaystyle\int_{-1}^3 \frac{2}{x+2}dx = [2\ln(x+2)]_{-1}^3$

$= 2\ln(5) - 2\ln(1) = 2\ln(5).$

**64** **a.** $I = \displaystyle\int_2^4 x(x^2-1)dx = \left[\frac{1}{4}(x^2-1)^2\right]_2^4$

$= \dfrac{1}{4}(4^2-1)^2 - \dfrac{1}{4}(2^2-1)^2 = 54.$

**b.** $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{4}{(2x+1)^2}dx = \left[\frac{-2}{2x+1}\right]_1^5$

$= \dfrac{-2}{11} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{33}.$

**65** **1** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$x - 2 + \frac{4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+4}{x+2}$$
$$= \frac{x^2-4+4}{x+2} = \frac{x^2}{x+2}.$$

**2** $I = \displaystyle\int_0^1 \left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right)dx$

$= \left[\dfrac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right]_0^1$

$= \left(\dfrac{1}{2} - 2 + 4\ln(3)\right) - (0 - 0 + 4\ln(2))$

$= \dfrac{-3}{2} + 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right).$

**66** **1** $F' = f$. Par lecture graphique, la fonction $F$ est croissante sur $[0\,;2]$, décroissante sur $[2\,;4]$, et croissante sur $[4\,;+\infty[$.

Donc la fonction $f$ est positive sur $[0\,;2]$ et $[4\,;+\infty[$, et négative sur $[2\,;4]$.

**2** $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = 5 - 0 = 5$.

**3** On a : $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = G(2) - G(0)$.

Donc $G(2) - 1 = 5$. Donc $G(2) = 6$.

## 3 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

**67** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux.

**68** **1** Faux. **2** Faux. **3** Vrai.

**69** **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai.
**d.** Faux, il s'agit d'un minimum local en $x = 1$.

### Calculs d'intégrales

**70**
- $\int_{-1}^{3} x(x^2-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(x^2-1)^2\right]_{-1}^{3}$
$= \frac{1}{4}(3^2-1)^2 - \frac{1}{4}((-1)^2-1)^2 = 16.$
- $\int_2^4 \frac{x}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2-1}\right]_2^4$
$= \frac{-1}{2\times 15} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{2}{15}.$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\sin(x))^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$

**71** **a.** $I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$.

**b.** $I = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-5}^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{25}$.

**72** **a.** $I = \left[\frac{-1}{4(x-2)}\right]_{-4}^{1} = \frac{-1}{-4} - \frac{-1}{-24} = \frac{5}{24}$.

**b.** $I = \left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi} = 0$.

**73** **a.** $I = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2))^2$.

**b.** $I = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_2^0 = -\frac{1}{2}\ln(5)$.

**74** **a.** $I = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

**b.** $I = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+3}\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{12} - \frac{1}{3}$.

**75** **a.** $I = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{5} = 1830$.

**b.** $I = [\ln(\mathrm{e}^t+1)]_0^3 = \ln(\mathrm{e}^3+1) - \ln(2)$
$= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^3+1}{2}\right)$.

**76** **a.** $I = \int_1^3\left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = [x^2 + \ln(x)]_1^3$
$= 8 + \ln(3)$.

**b.** $I = \left[\frac{1}{2}\ln(|t^2-1|)\right]_{-0,5}^{0} = -\frac{1}{2}\ln(0{,}75)$
$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

### Calculs d'aires

**77** **1** La fonction $-f$ est positive sur $[a\,;b]$. Donc $\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$ est égal à l'aire du domaine sous la courbe de $-f$ sur $[a\,;b]$.
Or la courbe représentative de $-f$ est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
Donc $\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.
Donc $I = -\int_a^b(-f(x)\mathrm{d}x)$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

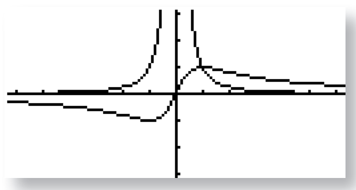
**2** Par la relation de Chasles,
$$I = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2.$$

**3** Par la relation de Chasles,
$$\int_{-1}^{8} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x + \int_5^8 f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3\times 2}{2} - \frac{3\times 2}{2} + \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}.$$

**78** Pour tout réel $x$,
$$-2x^3 + 6x^2 + 8x = -2x(x+1)(x-4).$$
La fonction $f$ représentée par la courbe $\mathscr{C}$ est donc positive sur $]-\infty\,;-1] \cup [0\,;4]$, et négative sur $[-1\,;0] \cup [4\,;+\infty[$.
Donc, en unité d'aire, l'aire de la surface colorée est :
$$\mathscr{A} = \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x.$$
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ étant définie par $F(x) = -\frac{x^4}{2} + 2x^3 + 4x^2$, on obtient que :
$$\mathscr{A} = \frac{19}{2} + \frac{3}{2} + 64 = 75.$$

**79** L'aire de la surface colorée, en unité d'aire, est :
$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{2}((2-x^2)-(-x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

**80** On trace les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives
$y = \frac{1}{x^2}$ et $y = \frac{2x}{1+x^2}$
à la calculatrice :



Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $d(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{1+x^2}$.

Alors $f(x) = \frac{(1-x)(2x^2+x+1)}{x^2(1+x^2)}$. D'où le tableau de signes de $d(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | + | | + | 0 | − |
| $2x^2+x+1$ | + | | + | | + |
| $x^2$ | + | 0 | + | | + |
| $1+x^2$ | + | | + | | + |
| $d(x)$ | + | ‖ | + | 0 | − |

Donc $\mathscr{C}_1$ est en-dessous de $\mathscr{C}_2$ sur $[1;+\infty[$, donc sur $[1;2]$.

L'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, et la droite d'équation $x = 2$, en unités d'aire, est donc égale à :

$$\int_1^2 \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x^2) + \frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \left(\ln(5) + \frac{1}{2}\right) - (\ln(2)+1) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}.$$

**81** **1** Pour tout réel $x > 0$, on pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

$d(x) = x^2 - \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) = \frac{-4}{x^2} < 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $]0\,;+\infty[$.

**2** Soit $t \geqslant 1$. On a :

$$A(t) = \int_1^t (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int_1^t \frac{4}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{4}{x}\right]_1^t = 4 - \frac{4}{t}.$$

**3** $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(4 - \frac{4}{t}\right) = 4.$

## Fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, où $f$ est continue

**82** **Démonstration de cours**

**1** La fonction $F$ est une primitive de $f$ sur I.

Donc pour tout réel $x$ de I, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.

Donc : $F_a(x) = F(x) - F(a)$.

**2** La fonction $F_a$ est dérivable sur I et pour tout réel $x$ de I, $(F_a)'(x) = F'(x) - 0 = f(x)$.

Donc $F_a$ est une primitive de $f$ sur I.

De plus, $F_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Donc $F_a$ est la primitive de $f$ sur I qui s'annule en $a$.

**83** **a.** Faux, car $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Donc $f'(0) = 2$.

**b.** Vrai, car $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$, qui est positif sur $]-1;1[$.

**c.** Faux, car $f(0) = \int_0^0 \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t = 0$.

**d.** Vrai. Pour tout réel $x \in\, ]-1;1[$, on pose :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

On a $g(0) = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0$, et pour tout réel $x \in\, ]-1;1[$,

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1-x+x+1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$.

Donc $g$ est la primitive de $f'$ sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0. Donc $g = f$.

**84** **1** Pour tout réel $x$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-3x}(\mathrm{e}^{3x}+1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}+1}.$$

- Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x} = +\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- Pour tout réel $x$, $f'(x) = \frac{-3\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^{3x}+1)^2} < 0$. Donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**2** **a.** La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tous $a < b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

- Si $\alpha < 0$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = -\int_\alpha^0 f(x)\mathrm{d}x$.

On a : $\int_\alpha^0 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Donc $I(\alpha) \leqslant 0$.

- Si $\alpha \geqslant 0$, $I(\alpha) \geqslant 0$.

**b.** $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{3}\ln(1+\mathrm{e}^{-3x})\right]_0^\alpha$

$$= \frac{-1}{3}\ln(1+\mathrm{e}^{-3\alpha}) + \frac{1}{3}\ln(2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-3\alpha}}\right).$$

**c.** $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-3\alpha} = 1$. Donc $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \frac{1}{3}\ln(2)$.

**85** **1** On pose $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.

Pour tout réel $x$,

$$F'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax + (a+b))\mathrm{e}^x.$$

La fonction $F$ est une primitive de $f$ ⇔ pour tout réel $x$, $F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$ et $b = -1$.

**2** $\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [(x-1)\mathrm{e}^x]_{-1}^1 = 0 + 2\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$.

**86** **1** **a.** On a : $f = -u' \times \mathrm{e}^u$, où $u(x) = \frac{1}{x}$.

Donc les primitives de $f$ sur $]-\infty\,;0[$ sont les fonctions $x \longmapsto -\exp\left(\frac{1}{x}\right) + k$, où $k$ est un réel.

Comme $F(-1) = 0$, on a : $-\exp(-1) + k = 0$, soit $k = \mathrm{e}^{-1}$.

Donc : $F(x) = -\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{e}^{-1}$.

**b.** Pour tout réel $x < 0$, $F'(x) = f(x) > 0$. Donc la fonction $F$ est croissante sur $]-\infty\,;0[$.

**2** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

Donc par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} F(x) = \mathrm{e}^{-1}$.

Graphiquement, l'aire du domaine délimité par la courbe de $f$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 0$ est égale à $e^{-1}$, en u.a.

**3** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = e^{-1} - 1$.

## Propriétés de l'intégrale

### 87 Démonstration de cours : conservation de l'ordre

**1** Pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $g(x) - f(x) \geqslant 0$.

Donc en utilisant la propriété de positivité,

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

**2** Or par linéarité,

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Donc : $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$,

soit : $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**88** **1** On suppose que $f$ est positive sur I.

- Si $a \leqslant b$, alors par la propriété de positivité :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

- Si $a \geqslant b$, comme $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

**2** On suppose que $f$ est négative sur I.

- Si $a \leqslant b$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

- Si $a \geqslant b$ , comme $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

**3** - Sur $[-1;2]$, $\frac{1}{x-3} < 0$. Comme $-1 < 2$, alors $I_1 \leqslant 0$.
- Sur $[-3;2]$, $(2x+1)^2 \geqslant 0$. Comme $2 > -3$, alors $I_2 \leqslant 0$.
- Sur $[1-e\,;e]$, $\frac{1}{x^2+1} > 0$. Comme $e > 1 - e$, alors $I_3 \leqslant 0$.
- Sur $\left[\frac{1}{e}\,;1\right]$, $\ln(x) \leqslant 0$. Comme $\frac{1}{e} < 1$, alors $I_4 \leqslant 0$.

**89** **1** **a.** Par la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

car la courbe représentative de $f$ est symétrique par rapport à l'origine $O$. Donc $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

**b.** Par la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

car la courbe représentative de $f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

**2** - $I_1 = 0$, car la fonction sinus est impaire sur $[-\pi\,;\pi]$.
- $I_2 = 2\displaystyle\int_0^3 (3x^2 + x)\mathrm{d}x = 2\left[x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 63$, car la fonction $x \longmapsto 3x^2 + |x|$ est paire.

**90** **1** $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$.

**2** Par linéarité,

$$I + J = \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Donc $J = \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

**91** **1** Pour tout réel $x \in [2\,;4]$,

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-1}{(2x-3)^2} = f(x).$$

**2** $I = \displaystyle\int_2^4 \left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{(2x-3)^2}\right)\mathrm{d}x$.

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(2x-3) + \frac{1}{2(2x-3)}\right]_2^4$$
$$= \left(\frac{1}{2}\ln(5) + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{2}{5}.$$

**92** **1** Pour tout réel $x \geqslant 1$, on a :

- $x^2 + 1 \geqslant x^2$.

Donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant x$.

- $x^2 + 1 \leqslant x^2 + x \leqslant \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leqslant \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Donc $\sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$,

c'est-à-dire $f(x) \leqslant x + \frac{1}{2}$.

**2** En intégrant les inégalités précédentes sur $[1;3]$, on obtient : $\displaystyle\int_1^3 x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$,

soit : $\displaystyle\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 \leqslant \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_1^3$.

Donc : $\displaystyle 4 \leqslant \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 5$.

**93** **1** **a.** Pour tout réel $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{25}$.

Donc la tangente $\Gamma$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point $B$ a pour équation :

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{25}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{5}.$$

Donc la droite $\Gamma$ admet pour équation :

$$y = -\frac{16}{25}x + \frac{28}{25}.$$

**b.** Le coefficient directeur de la droite $(AB)$ est :

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=-\frac{2}{5}.$$

La droite $(AB)$ admet pour équation :

$$y=-\frac{2}{5}(x-x_A)+y_A=-\frac{2}{5}(x-0)+1.$$

Donc la droite $(AB)$ admet pour équation : $y=-\frac{2}{5}x+1$.

**2** ▶ Pour tout réel $x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$,

$$f(x)-\left(-\frac{16}{25}x+\frac{28}{25}\right)=\frac{(2x-1)^2(4x-3)}{25(x^2+1)}\leqslant 0.$$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\Gamma$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

▶ Pour tout réel $x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$,

$$f(x)-\left(-\frac{2}{5}x+1\right)=\frac{x(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)}\geqslant 0.$$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $(AB)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

**3** Pour tout réel $x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, on a :

$$-\frac{2}{5}x+1\leqslant f(x)\leqslant-\frac{16}{25}x+\frac{28}{25}.$$

Donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{5}x+1\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{16}{25}x+\frac{28}{25}\right)\mathrm{d}x.$$

Donc : $\left[-\frac{x^2}{5}+x\right]_0^{\frac{1}{2}}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\left[-\frac{8x^2}{25}+\frac{28}{25}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

Donc : $\frac{9}{20}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{12}{25}$.

## Valeur moyenne

**94** **1** Pour tout réel $x$,

$$f(x+2)=\cos(\pi x+2\pi)=\cos(\pi x)=f(x).$$

Donc la fonction $f$ est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

**2** Une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est par exemple définie par :

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x).$$

**3** La valeur moyenne de $f$ sur $[-1\,;1]$ est :

$$\mu=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(F(1)-F(-1))$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\sin(\pi)+\frac{1}{\pi}\sin(\pi)\right)=0.$$

**95** **a.** Approximativement, il faut situer le terrain nivelé à une hauteur de 110 m.

**b.** $h=\frac{1}{400}\int_0^{400}h(x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{400}\int_0^{400}\left(\frac{x^2}{1600}-\frac{x}{4}+125\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{400}\left[\frac{x^3}{4\,800}-\frac{x^2}{8}+125x\right]_0^{400}=\frac{325}{3}\approx 108{,}3.$$

**96** La valeur moyenne de la capacité pulmonaire est :

$$\mu=\frac{1}{70-20}\int_{20}^{70}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{50}\int_{20}^{70}\left(\frac{110\ln(x)}{x}-\frac{220}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{50}\left[55(\ln(x))^2-220\ln(x)\right]_{20}^{70}$$

$$=\frac{1}{50}\left[(55(\ln 70)^2-220\ln 70)-(55(\ln 20)^2-220\ln 20)\right]$$

$$=\frac{11}{10}\left((\ln 70)^2-(\ln 20)^2\right)-\frac{22}{5}\ln\left(\frac{7}{2}\right)\approx 4{,}5.$$

# Prépa Bac

## Exercices guidés

**97** **1** ▶ Pour tout réel $x\in[0\,;3]$, $f(x)\geqslant 0$.

Donc $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, soit $I\geqslant 0$.

▶ Pour tout réel $x\in[-5\,;-2]$, $f(x)\leqslant 0$.

Donc $\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$, soit $J\leqslant 0$.

▶ La fonction $f$ n'est pas de signe constant sur $[-1\,;1]$, donc on ne connaît pas le signe de $K=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

**2** ▶ Pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $0\leqslant f(x)\leqslant 2$.

Donc $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 2\mathrm{d}x$. Donc $0\leqslant A\leqslant 2$.

▶ Pour tout réel $x\in[1\,;2]$, $1\leqslant f(x)\leqslant 2$.

Donc $\int_1^2 1\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 2\mathrm{d}x$. Donc $1\leqslant B\leqslant 2$.

**98** **1** ▶ Pour tout réel $x\in[0\,;2]$,

$$x^2-2x=x(x-2)\leqslant 0.$$

Donc $|x^2-2x|=-x^2+2x$.

▶ $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{x-1}{-x^2+2x+1}\mathrm{d}x$.

Pour le dénominateur, $\Delta=8$ ; $x_1=\sqrt{2}+1\approx 2{,}4$ et $x_2=-\sqrt{2}+1\approx-0{,}4$.

Donc pour tout réel $x\in[0\,;2]$, $-x^2+2x+1>0$.

Alors $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{-2}\times\ln(-x^2+2x+1)\right]_0^2=0$.

**2** Soit $m>2$.

La valeur moyenne de $f$ sur $[0\,;m]$ est :

$$\mu=\frac{1}{m}\int_0^m f(x)\mathrm{d}x.$$

Par la relation de Chasles,

$$\int_0^m f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^m f(x)\mathrm{d}x.$$

Donc $\int_0^m f(x)\mathrm{d}x=0+\int_2^m\frac{x-1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$

$$=\int_2^m\frac{x-1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_2^m\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=[\ln(x-1)]_2^m=\ln(m-1).$$

Donc la valeur moyenne de $f$ sur $[0\,;m]$ est :

$$\mu=\frac{\ln(m-1)}{m}.$$

**99** **1** Pour tout réel $x$, on pose :
$$d(x)=f(x)-\frac{5}{2}x=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x+2}-\frac{5}{2}x.$$
On a : $d'(x)=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x+2}-\dfrac{5}{2}<0$.
Donc la fonction $d$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $d(2)=0$, la fonction $d$ est positive sur $]-\infty\,;2]$, et négative sur $[2\,;+\infty[$.
On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$ sur $]-\infty\,;2]$, et en dessous de la droite $\Delta$ sur $[2\,;+\infty[$.
Donc en unités d'aire, $\mathscr{A}=\displaystyle\int_0^2\left[f(x)-\frac{5}{2}x\right]\mathrm{d}x$.
Donc en cm², $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2\left[f(x)-\frac{5}{2}x\right]\mathrm{d}x$.
**2** **a.** Pour tout réel $x$,
$$G'(x)=(-2x-2)\mathrm{e}^{-x+2}+(-x^2-2x-3)(-\mathrm{e}^{-x+2})$$
$$=\mathrm{e}^{-x+2}\times(-2x-2+x^2+2x+3)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x+2}$$
Donc $G'(x)=f(x)$.
Donc la fonction $G$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**b.** Donc :
$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times\left[G(x)-\frac{5}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^2-8\right)\text{cm}^2\approx 3{,}08\text{ cm}^2.$$

**100** **1** $I_0=\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=1-\mathrm{e}^{-1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.
**2** **a.** Pour tout entier naturel $n$,
$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x-\int_0^1x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$
Comme pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $x^n\geqslant 0$, $x-1\leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$.
Donc $x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\leqslant 0$.
Par la relation d'ordre, on en déduit que $I_{n+1}-I_n\leqslant 0$.
Donc la suite $(I_n)$ est décroissante.
**b.** Pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $x^n\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$. Donc par la relation de positivité, $I_n\geqslant 0$.
La suite $(I_n)$ est donc décroissante et minorée par 0.
Donc la suite $(I_n)$ est convergente.
**3** **a.** Pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1$. Donc $x^n\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n$.
Donc par la relation d'ordre, $\displaystyle\int_0^1x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^n\mathrm{d}x$.
**b.** D'après la question précédente, $I_n\leqslant\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.
Donc pour tout entier naturel $n$, $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$.
D'après la théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

**101** **1** Pour tout réel $x$,
$$f(x)=1-\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$
Comme $\mathrm{e}^{2x}>0$, $\mathrm{e}^{2x}+1>0$ et $(\mathrm{e}^x-1)^2\geqslant 0$.
Donc pour tout réel $x$, $f(x)\geqslant 0$.
**2** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$, $F'(x)=f(x)$.
Comme $f(x)\geqslant 0$, la fonction $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
**3** **a.** Pour tout réel $t$,
$$f(t)=1-\frac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}=1-\frac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}(1+\mathrm{e}^{-2t})}$$
$$=1-\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}.$$
Comme $1+\mathrm{e}^{-2t}\geqslant 1$, on a : $0\leqslant\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\leqslant 1$.
Donc : $\qquad 0\leqslant\dfrac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\leqslant 2\mathrm{e}^{-t}$,
d'où : $\qquad 0\geqslant-\dfrac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\geqslant-2\mathrm{e}^{-t}$.
En ajoutant 1, on a : $1\geqslant f(t)\geqslant 1-2\mathrm{e}^{-t}$.
**b.** Soit un réel $x\geqslant 0$.
D'après la question précédente, en utilisant la relation d'ordre, on a :
$$\int_0^xf(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x(1-2\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t.$$
Donc : $F(x)\geqslant\left[t+2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x$.
Ainsi : $F(x)\geqslant x+2\mathrm{e}^{-x}-2$.
Comme $\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$, on a pour tout réel $x\geqslant 0$, $F(x)\geqslant x-2$.
**c.** Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x-2=+\infty$, d'après le théorème de minoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.
**4** Pour tout réel $x$,
$f(-x)=1-\dfrac{2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1}=1-\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ en multipliant par $\mathrm{e}^{2x}$ le numérateur et le dénominateur du quotient.
La fonction $f$ est paire, donc :
$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^xf(t)\mathrm{d}t=-F(x).$$
On a donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$.

## Exercices d'entraînement

**102** **1** Pour tout réel $x\in\,]-3\,;3[$ :
$$f(-x)=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=-\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)=-f(x).$$
Donc la fonction $f$ est impaire sur $]-3\,;3[$.
Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet l'origine $O$ comme centre de symétrie.
**2** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\x<3}}(3+x)=6$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\x<3}}(3-x)=0^+$.
Donc par quotient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\x<3}}\frac{3+x}{3-x}=+\infty$.
Donc par composition avec la fonction ln,
$$\lim_{\substack{x\to 3\\x<3}}f(x)=+\infty.$$
Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=3$.
Par symétrie par rapport à $O$, la courbe $\mathscr{C}$ admet aussi une asymptote verticale d'équation $x=-3$.
**3** Pour tout réel $x\in[0\,;3[$, $0<3-x\leqslant 3+x$.
En divisant par $3-x>0$, on a : $1\leqslant\dfrac{3+x}{3-x}$.

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(1) \leqslant \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$, soit $0 \leqslant f(x)$.

Donc la fonction $f$ est positive sur $[0\,;3[$.

**4 a.** Pour tout réel $x \in ]-3\,;3[$,

$$f(x) = \ln(3+x) - \ln(3-x).$$

Donc $h'(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) + x \times \left(\dfrac{1}{3+x} + \dfrac{1}{3-x}\right)$

$$= \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) + \frac{6x}{9-x^2}.$$

**b.** Par la question précédente, pour tout réel $x \in ]-3\,;3[$,

$$f'(x) = h'(x) - \frac{6x}{9-x^2}.$$

Donc une primitive $F$ de $f$ sur $]-3\,;3[$ est par exemple définie par $x \longmapsto h(x) + 3\ln(9-x^2)$.

**c.** En unités d'aire, l'aire de la surface coloriée est :

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(0)$$

$$= (2\ln(5) + 3\ln(5)) - (0 + 3\ln(9))$$

$$= 5\ln(5) - 6\ln(3) \approx 1{,}46.$$

**103** **1 a.** Pour tout réel $x > 0$, $0 < x < x+1$. Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(x) < \ln(x+1)$. Donc $g(x) > 0$. La fonction $g$ est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

**b.** ◗ $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

◗ $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$, par composition on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln(1) = 0.$$

**2 a.** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x + 2 + g(x)$.

◗ $\lim\limits_{x\to 0} (x+2) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

Donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

◗ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**b.** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) - (x+2) = g(x) > 0$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}$ sur $]0\,;+\infty[$.

**3 a.** Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$G'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}$$

$$= \ln(x+1) - \ln(x) = g(x).$$

Donc la fonction $G$ est une primitive de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.

**b.** En unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$ est :

$$\int_1^3 [f(x) - (x+2)]\mathrm{d}x = \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$$

$$= G(3) - G(1) = 6\ln(2) - 3\ln(3) \approx 0{,}86.$$

**104** **Pré-requis**

Par linéarité,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

Or pour tout réel $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \geqslant 0$.

On en déduit que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

**A. 1** $\int_1^x (2-t)\mathrm{d}t = \left[2t - \dfrac{t^2}{2}\right]_1^x = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{3}{2}$.

**2** Pour tout réel $t \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{t} - (2-t) = \frac{(t-1)^2}{t} \text{ (positif).}$$

Donc $\dfrac{1}{t} \geqslant 2 - t$.

**3** Par la question **2**, pour tout réel $x \geqslant 1$ :

$$\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x (2-t)\mathrm{d}t.$$

Donc $[\ln(t)]_1^x \geqslant -\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{3}{2}$.

Ainsi pour tout réel $x \geqslant 1$, $\ln(x) \geqslant -\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{3}{2}$.

**B. 1** $\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{x^3}{6} + x^2 - \dfrac{3}{2}x\right]_1^4$

$$= \left(-\frac{4^3}{6} + 4^2 - \frac{3\times 4}{2}\right) - \left(-\frac{1^3}{6} + 1^2 - \frac{3\times 1}{2}\right) = 0.$$

Graphiquement, sur $[1;4]$, l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est nulle.

**2** Soit la fonction $F$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$.

$$F'(x) = 1\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Donc la fonction $F$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.

Par la partie **A**, la courbe $\Gamma$ est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $[1;+\infty[$, donc sur $[1;4]$.

Donc l'aire de $\mathscr{D}$, en unités d'aire, est égale à :

$$\int_1^4 \ln(x)\mathrm{d}x - \int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_1^4 - 0$$

$$= (4\ln(4) - 4) - (1\ln(1) - 1) = 4\ln(4) - 3.$$

**105** **1 a.** Soit un entier $n \geqslant 1$.

Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$, donc :

$$1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2.$$

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \ln(2)$.

En utilisant la relation d'ordre sur les intégrales,

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \ln(2)\mathrm{d}x.$$

Donc $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

**b.** Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 [\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)]\mathrm{d}x.$$

Or pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc :

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

Donc : $1 \leqslant 1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^n$,
d'où : $0 \leqslant \ln(1 + x^{n+1}) \leqslant \ln(1 + x^n)$.
Ainsi : $\ln(1 + x^{n+1}) - \ln(1 + x^n) \leqslant 0$.
On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
Donc la suite $(I_n)$ est décroissante.
**c.** La suite $(I_n)$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(I_n)$ est convergente.
**2 a.** Pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0.$$
Donc la fonction $g$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
**b.** Or $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$. Or pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0)$.
Donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$.
**c.** D'après la question **2 b.**, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
Soit un réel $x \geqslant 0$. En posant $t = x^n$, on a donc :
$$\ln(1 + x^n) \leqslant x^n.$$
**3** En utilisant la relation d'ordre et la question **2 c.**, on a :
$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1 + x^n)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x.$$
Donc $0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0$.

**106** **1** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,
$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - 1e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2} \geqslant 0.$$
Donc la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;1]$.
**2 a.** Soit un entier $k$ entre 0 et $n-1$.
La fonction $f$ étant croissante sur $\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$, pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$, on a :
$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
Donc en utilisant la relation d'ordre sur les intégrales :
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}x.$$
Donc : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
**b.** On somme les inégalités précédentes membre à membre, pour $k$ allant de 0 à $n-1$. Donc :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
Par la relation de Chasles, on a donc :
$$\frac{1}{n}S_n \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}T_n.$$
**c.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$$T_n - S_n = \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f(1)\right) - \left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$
$$= f(1) - f(0) = \frac{e}{2} - 1.$$
Donc : $\frac{1}{n}(T_n - S_n) = \frac{e-2}{2n}$.
**d.** $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{T_n}{n}$ sont des valeurs approchées de $I$ à $10^{-p}$ près équivaut à $\left|\frac{S_n}{n} - I\right| \leqslant 10^{-p}$ et $\left|\frac{T_n}{n} - I\right| \leqslant 10^{-p}$.
Or $\left|\frac{S_n}{n} - I\right| \leqslant \frac{1}{n}(T_n - S_n)$ et $\left|\frac{T_n}{n} - I\right| \leqslant \frac{1}{n}(T_n - S_n)$ d'après la question **2 b.**
Donc d'après la question **2 c.**, $\left|\frac{S_n}{n} - I\right| \leqslant \frac{e-2}{2n}$ et $\left|\frac{T_n}{n} - I\right| \leqslant \frac{e-2}{2n}$.
Pour que $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{T_n}{n}$ soient des valeurs approchées de $I$ à $10^{-p}$ près, il suffit donc que $\frac{e-2}{2n} \leqslant 10^{-p}$.
**3 a.** Le résultat final affiché est $S_n$.
**b.** On résout :
$$\frac{e-2}{2n} \leqslant 10^{-p} \Leftrightarrow 2n \geqslant (e-2)\times 10^p \Leftrightarrow n \geqslant \frac{e-2}{n} \times 10^p.$$
Le plus petit entier $n$ qui convient est $E\left(\frac{e-2}{2} \times 10^p\right) + 1$.
On propose donc l'algorithme :

**ALGO**

Variables :
  $n$, $k$ : entiers ; $S$ : réel ;
Début :
  Entrer($p$) ;
  $n \leftarrow E\left(\frac{e-2}{2} \times 10^p\right) + 1$ ;
  $S \leftarrow 0$ ;
  Pour $k$ allant de 0 à $n-1$ faire
    $S \leftarrow S + f\left(\frac{k}{n}\right)$ ;
  FinPour ;
  Afficher($S/n$) ;
Fin.

**c.** Pour $k = 3$, on a : $n = E\left(\frac{e-2}{2} \times 10^3\right) + 1 = 360$.
Il suffit de calculer $\frac{S_n}{n}$ pour un entier $n \geqslant 360$.

| $n$ | 100 | 500 | 1 000 | 5 000 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{S_n}{n}$ | 1,123 6 | 1,125 026 | 1,125 2 | 1,125 34 |

Une valeur approchée de $I$ à 0,001 près est 1,125.

**107** **Partie A**
**1** ▸ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$.
Donc par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
▸ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$.
Donc par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
**2** Pour tout réel $x$, $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ et $g(x) = e \times \frac{x^2}{e^x}$.
Par le théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

**3** Pour tout réel $x$,

$$f'(x) = (1-x)e^{1-x} \quad \text{et} \quad g'(x) = x(2-x)e^{1-x}.$$

D'où les tableaux de variations sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

et :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4/e$ | $\searrow$ | $0$ |

### Partie B

**1** Pour tout réel $x$, on pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

On a : $d(x) = x(1-x)e^{1-x}$.

La fonction $d$ est positive sur $[0\,;1]$, et négative sur $]-\infty\,;0]\cup[1\,;+\infty[$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\Gamma$ sur $[0\,;1]$, et en dessous de la courbe $\Gamma$ sur $]-\infty\,;0]\cup[1\,;+\infty[$.

**2** En utilisant les résultats du logiciel :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[(-x-1)e^{1-x}\right]_0^1 = e-2$$

et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \left[(-x^2-2x-2)e^{1-x}\right]_0^1 = 2e-5.$

**3** La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\Gamma$ sur $[0\,;1]$.

Donc en unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = (e-2)-(2e-5)$$
$$= 3-e.$$

### Partie C

**1** $S(a) = \mathscr{A} \Leftrightarrow 3 - e^{1-a}\times(a^2+a+1) = 3-e$

$\Leftrightarrow e\times e^{-a}(a^2+a+1) = e$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+a+1}{e^a} = 1$

$\Leftrightarrow a^2+a+1 = e^a.$

**2 Question ouverte**

- La courbe $\Gamma$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[1\,;+\infty[$. Donc la fonction $S$ est, par définition géométrique, strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
- En utilisant la définition algébrique, la fonction $S$ est continue sur $[1\,;+\infty[$.
- $S(1) = 0$. Pour tout réel $a \geqslant 1$,

$$S(a) = 3 - e\times\left(\frac{a^2}{e^a} + \frac{a}{e^a} + \frac{1}{e^a}\right).$$

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{e^a}$ et par le théorème de croissance comparée,

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{a}{e^a} = 0$ et $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{a^2}{e^a} = 0.$

Donc par produit et somme, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} S(a) = 3.$

- Comme $0 \leqslant 3-e < 3$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone, l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ admet une unique solution sur $[1\,;+\infty[$.

**108**

### Partie A

**1 a.** Pour tout réel $x\in[1\,;2]$, $\ln(x)\geqslant 0$ et $x>0$. Donc $1+x\ln(x)\geqslant 1>0$.

Donc la fonction $f$ est positive sur $[1\,;2]$.

**b.** Le point $M$ a pour coordonnées $(1\,;f(1))$, c'est-à-dire $(1\,;1)$.

Le point $N$ a pour coordonnées $(2\,;f(2))$, c'est-à-dire $(2\,;1+2\ln(2))$.

Donc le coefficient directeur de la droite $(MN)$ est :

$$\frac{(1+2\ln(2))-1}{2-1} = 2\ln(2).$$

**c.** Pour tout réel $x\in[1\,;2]$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x$ est égal à $f'(x)$.

Or $f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} = 1+\ln(x)$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x$ est parallèle à la droite $(MN)$ si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux, c'est-à-dire : $1+\ln(x) = 2\ln(2)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(4)-1 = \ln(4)-\ln(e) = \ln\left(\dfrac{4}{e}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{e}$.

Le point $E$ est donc l'unique point de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite $(MN)$.

**d.** $f'\left(\dfrac{4}{e}\right) = 2\ln(2)$ et $f\left(\dfrac{4}{e}\right) = 1+\dfrac{4}{e}(2\ln(2)-1)$.

Donc la tangente $(T)$ admet pour équation :

$$y = 2\ln(2)\left(x-\frac{4}{e}\right)+1+\frac{4}{e}(2\ln(2)-1),$$

c'est-à-dire $\quad y = 2\ln(2)x+1-\dfrac{4}{e}$.

**2 a.** Pour tout réel $x\in[1\,;2]$, on a :

$g'(x) = f'(x)-2\ln(2) = 1+\ln(x)-2\ln(2)$

$\quad = 1+\ln(x)-\ln(4) = 1+\ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

**b.** Pour tout réel $x\in[1\,;2]$,

$$g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right)\geqslant -1 \Leftrightarrow \frac{x}{4}\geqslant e^{-1} \Leftrightarrow x\geqslant\frac{4}{e}.$$

D'où le tableau de variations de $g$ sur $[1\,;2]$ :

| $x$ | $1$ | | $\frac{4}{e}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\frac{4}{e}-\ln(4)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e}-\ln(4)$ |

On en déduit que pour tout réel $x\in[1\,;2]$, $g(x)\geqslant 0$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite $(T)$ sur $[1\,;2]$.

**3 a.** En unités d'aire, l'aire du trapèze $MNQP$ est :

$$\frac{y_M+y_N}{2}\times(x_N-x_M) = \frac{f(1)+f(2)}{2} = 1+\ln(2).$$

- En unités d'aire, l'aire du trapèze $M'N'QP$ est :

$$\frac{y_{M'}+y_{N'}}{2}\times(x_{N'}-x_{M'}).$$

On a :

$y_{M'} = 2\ln(2)\times 1-\dfrac{4}{e}$ et $y_{N'} = 2\ln(2)\times 2-\dfrac{4}{e}+1$.

Donc l'aire de $M'N'QP$ est : $3\ln(2)-\dfrac{4}{e}+1$.

**b.** D'après les questions précédentes, le domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ contient le trapèze $M'N'QP$, et est contenu dans le trapèze $MNQP$.

Donc : $\quad 3\ln(2) - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1 + \ln(2)$.

Or par défaut $3\ln(2) - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + 1 \approx 1{,}60$ et par excès $1 + \ln(2) \approx 1{,}70$.

Donc : $1{,}6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1{,}7$ .

**Partie B**

**1** On appelle $F$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

La fonction $F$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = x \times \ln(x) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x\ln(x).$$

Donc la fonction $F$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

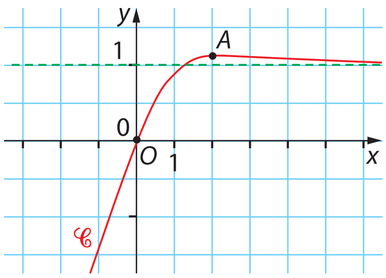
**2** En unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (1 + x\ln(x))\mathrm{d}x$$
$$= [x + F(x)]_1^2 = \frac{1}{4} + 2\ln(2).$$

$\mathscr{A} \approx 1{,}63$, ce qui confirme l'encadrement de la partie **A**.

**109** **Partie A**

**1** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(2\,; 1 + \mathrm{e}^{-2})$. Une courbe représentative possible est par exemple :




**2 a.** D'après le tableau de variations de $f$, la fonction $f$ est positive sur $[0\,;2]$.

Donc $g(2)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

**b.** Pour tout réel $x \in [0\,;2]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-2}$.

Donc par la relation d'ordre,

$$\int_0^2 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 (1 + \mathrm{e}^{-2})\mathrm{d}x.$$

Donc $0 \leqslant g(2) \leqslant 2 + 2\mathrm{e}^{-2}$.

Or $2 + 2\mathrm{e}^{-2} \approx 2{,}27$. Donc $0 \leqslant g(2) \leqslant 2{,}5$.

**3 a.** ▶ D'après le tableau de variations de $f$, pour tout réel $t \in [2\,;x]$, $1 \leqslant f(t)$.

Donc par la relation d'ordre, $\displaystyle\int_2^x 1\mathrm{d}t \leqslant \int_2^x f(t)\mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant x - 2$.

▶ Or par la relation de Chasles,

$$g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + \int_2^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$= g(2) + \int_2^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Or $g(2) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant x - 2$.

On en déduit que $g(x) \geqslant x - 2$.

**b.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$. Donc par le théorème de minoration, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**4** Pour tout réel $x$, $g'(x) = f(x)$.

En utilisant le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$, on obtient le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $g$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**Partie B**

**1** Par définition, la fonction $g$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Pour tout réel $x$, on pose $F(x) = x(1 - \mathrm{e}^{-x})$.

Pour tout réel $x$,

$F'(x) = 1(1 - \mathrm{e}^{-x}) + x(\mathrm{e}^{-x}) = (x - 1)\mathrm{e}^{-x} + 1 = f(x)$.

Et $F(0) = 0$.

Donc la fonction $F$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc $F = g$.

Ainsi pour tout réel $x$, $g(x) = x(1 - \mathrm{e}^{-x})$.

**2** Pour tout réel $x$, $g(x) = x - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, et par le théorème de croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Par différence, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**110** **Partie A**

**1** ▶ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x} = -\infty$.

Donc par somme, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

▶ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Donc par somme, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**2** Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Comme $f(1) = 0$, on en déduit le tableau de signes de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ :

| $x$ | $0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $- \qquad 0 \qquad +$ |

**3** La fonction $f$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de $f$ sur $]0\,;+\infty[$, qui s'annule en 1.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $G(x) = (x - 1)\ln(x)$.

On a :

$$G'(x) = 1 \times \ln(x) + (x - 1) \times \frac{1}{x}$$
$$= \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

De plus $G(1) = 0$.

Donc la fonction $G$ est la primitive $F$ de $f$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

**4 a.** Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = f(x)$.

D'après la question **2**, pour tout réel $x > 1$, $F'(x) > 0$ et $F'(1) = 0$.

Donc la fonction $F$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

**b.** On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

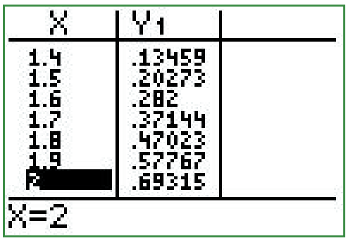
Donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

On a : $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}632$.

La fonction $F$ est donc continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, d'intervalle-image $[0\,;+\infty[$.

Donc l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1;+\infty[$ .

Par balayage à la calculatrice, on obtient : $1{,}9 < \alpha < 2$.




### Partie B

**1** On résout :

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Donc le point $A$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;0\right)$.

**2** On résout :

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

d'après la question **A. 2**.

Comme $g(1) = 1$, les coordonnées du point $P$ sont $(1;1)$.

**3 a.** Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$, la fonction $f$ est négative, donc $g(x) \geqslant h(x)$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\Gamma$ sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$.

On en déduit que :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} g(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} h(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \left(\frac{1}{x} - \ln(x) - 1\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

**b.** Par la question **A. 3**, on a :

$$\mathscr{A} = -\left(F(1) - F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right) = -F(1) + F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Donc :

$$\mathscr{A} = -0 + \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)\times(-1)$$
$$= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

**4 a.** D'après la question **A. 2**, la courbe $\Gamma$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[1;+\infty[$.

Donc :

$$\mathscr{B}(t) = \int_1^t h(x)\mathrm{d}x - \int_1^t g(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^t \left[\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(t) - F(1).$$

Donc : $\mathscr{B} = F(t) = (t-1)\ln(t) = t\ln(t) - \ln(t)$.

**b.** Pour tout réel $t \geqslant 1$, $\mathscr{B}(t) = F(t)$.

D'après la question **A. 4 b.**, l'équation $\mathscr{B}(t) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1;+\infty[$ .

Donc l'équation $\mathscr{B}(t) = \mathscr{A}$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1;+\infty[$.

**111** **1 a.** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(2-x) - \mathrm{e}^{-x}(-1)}{(2-x)^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2}.$$

Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

Donc la fonction $f$ est décroissante sur $[0\,;1]$.

**b.** Par la question précédente, pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1).$$

Or $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Donc pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

**2 a.** Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$, $F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-x-3)\mathrm{e}^{-x} = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Donc la fonction $F$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit que :

$$J = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -4\mathrm{e}^{-1} + 3 = 3 - \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

**b.** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Donc : $$\frac{x^2}{\mathrm{e}} \leqslant x^2 f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

Par la relation d'ordre, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\mathrm{e}}\mathrm{d}x \leqslant K \leqslant \int_0^1 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$.

Donc : $\left[\dfrac{x^3}{3\mathrm{e}}\right]_0^1 \leqslant K \leqslant \left[\dfrac{x^3}{6}\right]_0^1$, d'où : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

**c.** $$J + K = \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left[(2+x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right]\mathrm{d}x.$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \times \frac{2^2 - x^2 + x^2}{2-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\mathrm{d}x.$$

Donc $J + K = 4I$.

**d.** Comme $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$ et $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$, on a :

$$3 - \frac{4}{\mathrm{e}} + \frac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant J + K \leqslant 3 - \frac{4}{\mathrm{e}} + \frac{1}{6},$$

soit : $$3 - \frac{11}{3\mathrm{e}} \leqslant 4I \leqslant \frac{19}{6} - \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

On en déduit que : $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \leqslant I \leqslant \dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Or par défaut $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \approx 0{,}41$ et par excès $\dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}43$.

Donc une valeur approchée de $I$ à $10^{-2}$ près est 0,42 .

**112** **Partie A**

**1 a.** Pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose $t = x^2$.

Alors $x = \sqrt{t}$ .

Donc : $$f(x) = \sqrt{t} \times \mathrm{e}^{-t} = \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t} = \frac{t}{\mathrm{e}^t} \times \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} t = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = 0$.

Donc par composition et produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**b.** Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2xe^{-x^2}) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

qui s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où le tableau de variations de $f$ sur $[0 ; +\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

Car $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}.$$

**2 a.** Pour tout réel $a \geqslant 0$,

$$F(a) = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}.$$

**b.** $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-a^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{a \to +\infty} F(a) = \dfrac{1}{2}$.

### Partie B

**1** Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f$ est décroissante sur $[n ; n+1]$.

Donc pour tout réel $x \in [n ; n+1]$,

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1).$$

Donc par la relation d'ordre,

$$\int_n^{n+1} f(n)dx \geqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)dx.$$

Ainsi $f(n) \geqslant u_n \geqslant f(n+1)$.

**2** ▸ Pour tout entier $n \geqslant 1$, en utilisant les inégalités précédentes pour $n$ et $n+1$, $u_n \geqslant f(n+1)$ et $f(n+1) \geqslant u_{n+1}$. Donc $u_n \geqslant u_{n+1}$.

▸ De plus, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \approx 0{,}32$ et

$$u_1 = \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= F(2) - F(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\right)$$

$$= \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^4} \approx 0{,}17.$$

Donc $u_0 \geqslant u_1$.

▸ On en déduit que la suite $u$ est décroissante.

**3** ▸ Par définition, la suite $u$ est positive.

Ainsi la suite $u$ est décroissante, et minorée. Donc la suite $u$ est convergente.

▸ On sait que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

## Problèmes

**113** **1** La réciproque est fausse.

Par exemple, la fonction $f$ définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = \cos(x)$.

On a : $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = 0$, mais pour tout réel $x \neq \dfrac{\pi}{2}$, $f(x) \neq 0$.

**2** La réciproque est fausse.

Par exemple, les fonctions $f$ et $g$ définies sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}$.

On a : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$.

Donc : $$\int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^1 g(x)dx.$$

Mais pour tout réel $x$, $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; 1\right]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

**114** Soit une fonction $f$ continue sur $[a ; b]$, où $a < b$.

▸ Pour tout réel $x \in [a ; b]$, $f(x) \leqslant |f(x)|$.

Donc : $$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

▸ De même, pour tout réel $x \in [a ; b]$, $-f(x) \leqslant |f(x)|$.

Donc : $$\int_a^b -f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx,$$

c'est-à-dire : $$-\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx,$$

ou encore : $$\int_a^b f(x)dx \geqslant -\int_a^b |f(x)|dx.$$

▸ On en déduit que :

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Donc : $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

**115** **1 a.** Pour tout réel $x$, $f(x) = e^x(e^x - 4) + 3$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 4) = +\infty$, par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**b.** Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y = 3$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

**2 a.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$.

**b.** D'après la question précédente, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Car $f(\ln(2)) = e^{2\ln(2)} - 4e^{\ln(2)} + 3$

$$= e^{\ln(4)} - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1.$$

**3** On résout : $f(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 3$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 4) = 0 \Leftrightarrow e^x = 4$

$\Leftrightarrow x = \ln(4)$.

Le point $E$ a donc pour coordonnées $(\ln(4) ; 3)$.

**4 a.** $J=\int_0^{\ln(4)}\left[-e^{2x}+4e^x\right]dx=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+4e^x\right]_0^{\ln(4)}$

$=\left(-\frac{1}{2}e^{2\ln(4)}+4e^{\ln(4)}\right)-\left(-\frac{1}{2}+4\right)$

$=-\frac{1}{2}\times 4^2+4\times 4+\frac{1}{2}-4=\frac{9}{2}.$

**b.** Pour tout réel $x\in[0\,;\ln(4)]$,

$$f(x)-3=e^x(e^x-4)\leqslant 0.$$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite $\Delta$ sur $[0\,;\ln(4)]$.

On en déduit que $J$ est l'aire de la surface $S$, délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\Delta$, et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=\ln(4)$.

**116** **1 a.** La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout entier $n\geqslant 1$, $u_n$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x=\ln(n)$ et $x=\ln(n+1)$.

**b.** Pour tout entier $n\geqslant 1$,

$u_n=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\frac{4e^t}{e^t+1}dt=\left[4\ln(e^t+1)\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$

$=4\ln(e^{\ln(n+1)}+1)-4\ln(e^{\ln(n)}+1)$

$=4\ln(n+2)-4\ln(n+1)=4\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$

**2** Pour tout entier $n\geqslant 1$,

$S_n=\int_{\ln(1)}^{\ln(2)}f(t)dt+\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}f(t)dt+\ldots$

$+\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}f(t)dt.$

En utilisant la relation de Chasles,

$S_n=\int_{\ln(1)}^{\ln(n+1)}f(t)dt=\int_0^{\ln(n+1)}f(t)dt$

$=\left[4\ln(e^t+1)\right]_0^{\ln(n+1)}=4\ln\left(\frac{e^{\ln(n+1)}+1}{1+1}\right)$

$=4\ln\left(\frac{n+2}{2}\right).$

La valeur $S_n$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=\ln(n+1)$.

**3 a.** Pour tout réel $x$, $f(x)\leqslant 4$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite horizontale d'équation $y=4$.

Donc $\mathscr{A}=\int_0^{\ln(n+1)}[4-f(t)]dt=4\ln(n+1)-S_n$

$=4\ln(n+1)-4\ln(n+2)+4\ln(2).$

Donc $\mathscr{A}=4\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)+4\ln(2).$

**b.** Pour tout entier $n\geqslant 1$, $\mathscr{A}_n=4\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)+4\ln(2).$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1.$

Donc par composition,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathscr{A}_n=4\ln(1)+4\ln(2)=4\ln(2).$$

**117** **1** Pour tout réel $x>0$, $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0.$

Donc la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

- Comme $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-\frac{1}{x}=-\infty$, par somme $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$.
- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

On en déduit le tableau de variations de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.

- $g(2{,}3)\approx-0{,}04$ et $g(2{,}4)\approx 0{,}04$. Donc la fonction $g$ s'annule en $x_0$ sur $[2{,}3\,;2{,}4]$.

**2 a.** On sait que $g(x_0)=0$. Donc $\ln(x_0)-\frac{2}{x_0}=0$, ou encore $\ln(x_0)=\frac{2}{x_0}$.

Donc $f(x_0)=\dfrac{5\ln(x_0)}{x_0}=\dfrac{5\times\frac{2}{x_0}}{x_0}=\dfrac{10}{x_0^2}.$

**b.** Soit $a>1$. On a :

$\int_1^a f(t)dt=\int_1^a\frac{5\ln(t)}{t}dt=\left[\frac{5}{2}(\ln(x))^2\right]_1^a$

$=\frac{5}{2}(\ln(a))^2.$

**3** - En unités d'aire, le domaine $\mathscr{A}_1$ a pour aire :

$\int_1^{x_0}f(t)dt=\frac{5}{2}(\ln(x_0))^2=\frac{5}{2}\left(\frac{2}{x_0}\right)^2=\frac{10}{(x_0)^2}$ d'après la question **2**.

- En unités d'aire, le domaine $\mathscr{A}_2$ a pour aire :

$$OH_0\times OI=f(x_0)=\frac{10}{(x_0)^2}.$$

Donc les domaines $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ ont la même aire.

- De plus, comme $2{,}3<x_0<2{,}4$, on a : $2{,}3^2<x_0^2<2{,}4^2$.

Donc $\dfrac{10}{2{,}3^2}>\dfrac{10}{(x_0)^2}>\dfrac{10}{2{,}4^2}.$

Comme $\dfrac{10}{2{,}3^2}\approx 1{,}90$ (par excès) et $\dfrac{10}{2{,}4^2}\approx 1{,}7$ (par défaut), l'aire des deux domaines est donc comprise entre 1,7 et 1,9.

**118** **1** Soit la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=e^{-x}\left(-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}\right).$$

Pour tout réel $x$, $F'(x)=-e^{-x}\left(-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}\right)$

$+e^{-x}\left(\frac{\sin(x)}{2}-\frac{\cos(x)}{2}\right).$

Donc :

$F'(x)=e^{-x}\left(\frac{\cos(x)}{2}+\frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin(x)}{2}-\frac{\cos(x)}{2}\right)$

$=e^{-x}\times\sin(x)=f(x).$

Donc la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2** On en déduit que :

$I=\int_0^{\pi}f(x)dx=\left[e^{-x}\left(-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}\right)\right]_0^{\pi}$

$=\frac{1+e^{-\pi}}{2}.$

**3** Pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2}\right)\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$= \mathrm{e}^{-(2n+1)\pi}\left(-\frac{\cos((2n+1)\pi)}{2} - \frac{\sin((2n+1)\pi)}{2}\right) - \mathrm{e}^{-2n\pi}\left(-\frac{\cos(2n\pi)}{2} - \frac{\sin(2n\pi)}{2}\right).$$

Donc :

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{2} = \mathrm{e}^{-2n\pi}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\right).$$

Donc :

$$u_n = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\right)\times(\mathrm{e}^{-2\pi})^n.$$

Ainsi la suite $u$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-2\pi}$ et de terme initial $u_0 = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

**119** Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Donc, comme l'intégrale conserve l'ordre,

$$\int_0^{\frac{1}{n}} m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} M\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi $\dfrac{m}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{M}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n} = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite $u$ converge vers 0.

**120** **Partie A : Étude de la chaînette**

**1** Comme $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\beta x} = +\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\beta x} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\beta(x) = +\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\beta(x) = +\infty$.

De plus, pour tout réel $x$,

$$(f_\beta)'(x) = \frac{\beta\mathrm{e}^{\beta x} - \beta\mathrm{e}^{-\beta x}}{2\beta} = \frac{\mathrm{e}^{\beta x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{2}\times(\mathrm{e}^{2\beta x} - 1).$$

Or $\mathrm{e}^{2\beta x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2\beta x} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2\beta x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$, car $\beta > 0$.

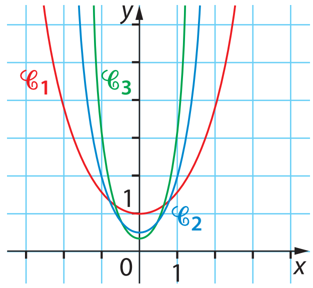
D'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(f_\beta)'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f_\beta(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\dfrac{1}{\beta}$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ ; $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{4}$

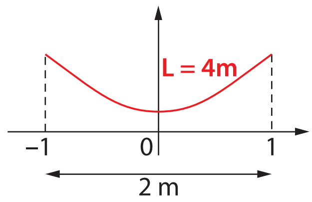
et $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}}{6}$.

D'où le graphique :




**Partie B : Recherche de la flèche**

**1** On a le schéma ci-contre :




Comme une équation de la chaînette est $y = f_\beta(x)$, et comme la longueur de la chaînette est $L = 4$ m, on a :

$$4 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [(f_\beta)'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

**2** ▸ L'équation (E) est équivalente à :

$$4 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[\frac{\mathrm{e}^{\beta x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{2}\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 4 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{e}^{2\beta x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\beta x}}{4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 4 = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2\beta x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\beta x}}{4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 4 = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{(\mathrm{e}^{\beta x} + \mathrm{e}^{-\beta x})^2}{4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 4 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\beta x} + \mathrm{e}^{-\beta x}}{2}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 4 = \left[\frac{\mathrm{e}^{\beta x} + \mathrm{e}^{-\beta x}}{2\beta}\right]_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{(\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta}) - (\mathrm{e}^{-\beta} - \mathrm{e}^{\beta})}{2\beta}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{\mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta}}{\beta}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta} - 4\beta = 0$, car $\beta > 0$.

▸ Soit la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} - 4x.$$

La fonction $g$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x \geqslant 0$ : $\quad g'(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4$

et $g''(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x} - 1)$.

Donc $g''(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$ et $g''(0) = 0$.

Donc la fonction $g'$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Or $g'(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$.

Comme la fonction $g'$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g'(\alpha) = 0$.

Et on a le tableau de signes suivant :

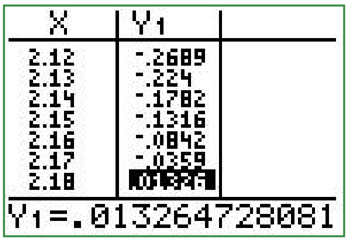
| $x$ | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | 0 | ↘ | $g(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

Car $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{4x}{\mathrm{e}^{x}}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (théorème de croissance comparée), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

◗ D'après le tableau de variations de la fonction $g$ et le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\beta_0$ sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que l'équation (E) admet une unique solution $\beta_0$ sur $]0\,;+\infty[$.

**3** À la calculatrice, on entre la fonction $g$ en Y1.
Puis par balayage, on obtient un encadrement de $\beta_0$ :



| X | Y1 |
|---|---|
| 2.12 | -.2689 |
| 2.13 | -.224 |
| 2.14 | -.1782 |
| 2.15 | -.1316 |
| 2.16 | -.0842 |
| 2.17 | -.0359 |
| 2.18 | [illegible] |

Y1=.013264728081

Ainsi $2{,}17 < \beta_0 < 2{,}18$.
Donc par défaut, à $10^{-2}$ près, $\beta_0 \approx 2{,}17$.

**4** D'après la question **A. 1**, le minimum de la fonction $f_{\beta_0}$ est $\left(\dfrac{1}{\beta_0}\right)$, soit environ 0,46.
La flèche du fil est donc :

$$f_{\beta_0}(1) - f_{\beta_0}(0) = \frac{e^{\beta_0} + e^{-\beta_0}}{2\beta_0} - \frac{1}{\beta_0}$$
$$= \frac{e^{\beta_0} + e^{-\beta_0} - 2}{2\beta_0} \approx 1{,}58 \text{ m}.$$

**121** **1** Pour tout réel $t \geqslant 0$, $i(t) = -2{,}4\sin(400t)$.

**2** Pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$i\left(t + \frac{\pi}{200}\right) = -2{,}4\sin\left(400\left(t + \frac{\pi}{200}\right)\right)$$
$$= -2{,}4\sin(400t + 2\pi)$$
$$= -2{,}4\sin(400t) = i(t).$$

Donc la fonction $i$ est périodique de période $\dfrac{\pi}{200}$.

**3** $$(I_e)^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} 5{,}76(\sin(400t))^2\,dt$$
$$= \frac{400}{\pi} \times 5{,}76 \int_0^{\frac{\pi}{400}} \frac{1 - \cos(800t)}{2}\,dt$$
$$= \frac{2\,304}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(800t)}{1600}\right]_0^{\frac{\pi}{400}}.$$

Donc $(I_e)^2 = \dfrac{2\,304}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{800} - \sin(2\pi)\right) = \dfrac{72}{25}$.

Ainsi $I_e = \sqrt{\dfrac{72}{25}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$.

Donc à $10^{-3}$ près, $I_e \approx 1{,}697$ A.

**122** **Partie 1**

**1** On résout :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{10}{1+x} - 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 3x + 18}{2(x+1)} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -6.$$

Comme les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $[0\,;9]$, la solution est $x = 3$.

**2** $$I = \int_3^9 f(x)\,dx = \int_3^9 \left[\frac{10}{1+x} - 1\right]dx$$
$$= [10\ln(1+x) - x]_3^9 = 10\ln(10) - 9 - 10\ln(4) + 3$$
$$= 10\ln\left(\frac{5}{2}\right) - 6.$$

**Partie 2**

**1 a.** Si le prix de vente est de 40 € la boîte, la quantité achetée est $f(4) = 1$ centaine de boîtes, soit 100 boîtes.
**b.** Le prix d'équilibre $x$ vérifie $f(x) = g(x)$, soit :
$x = 3$ dizaines d'euros. Donc le prix d'équilibre est de 30 €.
Le nombre de boîtes correspondant est :
$g(3) = 1{,}5$ centaines de boîtes, soit 150 boîtes.

**2 a.** Le surplus des producteurs, en milliers d'euros, est :

$$\frac{3 \times g(3)}{2} = 2{,}25.$$

Donc le surplus des producteurs est de 2 250 €.
**b.** Le surplus des consommateurs, en milliers d'euros, est : $\displaystyle\int_3^9 f(x)\,dx = 10\ln\left(\frac{5}{2}\right) - 6 \approx 3{,}163$.
Donc le surplus des consommateurs est d'environ 3 163 €.

**123** **1 a.** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $1 \leqslant 1 + x \leqslant 2$, donc :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1.$$

Donc pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$.
L'intégrale conserve l'ordre,

$$\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx.$$

Donc : $\qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$.

**b.** Par la question précédente, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1,$$

c'est-à-dire : $\qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Donc par le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)$ converge vers 0.

**2** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx$$
$$= \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

**3 a.** Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) + \dots$$
$$+ (-1)^n(I_n + I_{n+1}).$$

Donc en simplifiant, $S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.

**b.** Par la question **2**,

$$S_n = \left(\frac{1}{1}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \dots + (-1)^n\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Donc :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$,

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = I_0 + (-1)^{n-1} I_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$, par somme,

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = I_0.$$

Or $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \ln(2)$.

**124** **1 a.** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on pose :

$$g(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$

On a : $g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Donc $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit que :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

**b.** $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

**2 a.** ◗ Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

Or pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $\frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 0$.

Donc par la relation d'ordre, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi la suite $u$ est décroissante.

◗ Or la suite $u$ est positive en utilisant la propriété de positivité.

Donc la suite $u$ est convergente.

**b.** ◗ Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$.

Donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$, soit $1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$.

◗ Donc pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc : $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

Alors par la relation d'ordre,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x.$$

Donc : $\left[\frac{x^{n+1}}{\sqrt{2}(n+1)}\right]_0^1 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Ainsi : $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**125** **1** $h(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(t) \leqslant 1$
$\Leftrightarrow 0 < t \leqslant \mathrm{e}$.

D'où le tableau de signes de $h(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ :

| $x$ | 0 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | + | 0 | − | |

**2 a.** Pour tout réel $t > 0$,

$$g'(t) = 1 - \ln(t) + t \times \frac{-1}{t} = -\ln(t).$$

**b.** D'après la question précédente,

$$h(t) = 1 - \ln(t) = 1 + g'(t).$$

Donc les primitives de la fonction $h$ sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \longmapsto t + g(t) + k = 2t - t\ln(t) + k$, où $k$ est un réel.

Alors la primitive $H$ de $h$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en $\mathrm{e}^2$ est la fonction $t \longmapsto 2t - t\ln(t) + k$, où le réel $k$ vérifie : $2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2\ln(\mathrm{e}^2) + k = 0$, soit $k = 0$.

Donc la fonction $H$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$H(t) = 2t - t\ln(t) = t(2 - \ln(t)).$$

**3 a.** Pour tout entier $n \geqslant 0$, l'intervalle $[\mathrm{e}^{-(n+1)}\,;\mathrm{e}^{-n}]$ est inclus dans l'intervalle $[0\,;\mathrm{e}]$.

Donc d'après la question **1**, la fonction $h$ est positive sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{-(n+1)}\,;\mathrm{e}^{-n}]$.

En utilisant la positivité de l'intégrale, on a : $v_n \geqslant 0$.

**b.** D'après la question **2 b.**, pour tout entier $n \geqslant 0$ :

$v_n = [H(t)]_{\mathrm{e}^{-(n+1)}}^{\mathrm{e}^{-n}}$

$= \mathrm{e}^{-n}(2 - \ln(\mathrm{e}^{-n})) - \mathrm{e}^{-(n+1)}(2 - \ln(\mathrm{e}^{-(n+1)}))$

$= \mathrm{e}^{-n}(2+n) - \mathrm{e}^{-(n+1)}(3+n)$.

**c.** Pour tout entier $n \geqslant 0$ :

$v_n = 2\mathrm{e}^{-n} + \frac{n}{\mathrm{e}^n} - 3\mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{-1} - \frac{n}{\mathrm{e}^n \times \mathrm{e}}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ (théorème de croissante comparée).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

**4 a.** Pour tout entier $n \geqslant 0$, par la relation de Chasles, on a :

$S_n = \int_{\mathrm{e}^{-1}}^1 h(t)\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{e}^{-2}}^{\mathrm{e}^{-1}} h(t)\mathrm{d}t + \ldots + \int_{\mathrm{e}^{-(n+1)}}^{\mathrm{e}^{-n}} h(t)\mathrm{d}t$

$= \int_{\mathrm{e}^{-(n+1)}}^1 h(t)\mathrm{d}t = H(1) - H(\mathrm{e}^{-(n+1)})$.

Donc $S_n = 2 - \mathrm{e}^{-(n+1)}(3+n)$.

**b.** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$S_n = 2 - \frac{3}{\mathrm{e}^{n+1}} - \frac{n}{\mathrm{e}^n \times \mathrm{e}}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$ (théorème de croissante comparée).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$.

**126** **1** Pour tout réel $x$, $6 - x - x^2 = (2-x)(x+3)$.

Donc pour tout réel $x \in [-3\,;2]$, $6 - x - x^2 \geqslant 0$.

L'aire sous l'arche de parabole d'équation $y = 6 - x - x^2$, en unités d'aire, est donc :

$$\int_{-3}^2 (6 - x - x^2)\mathrm{d}x = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^2 = \frac{125}{6}.$$

**2** Par la forme canonique $6 - x - x^2 = \frac{25}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, on obtient la hauteur $h$ de l'arche de la parabole :

$$h = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

**3** $\frac{2}{3}\times(2-(-3))\times\frac{25}{4}=\frac{125}{6}$. On obtient le même résultat qu'à la question **1**.

**127** **1 a.** $\mathcal{A}_0$ est l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[a_0\,;a_1]$, et de hauteur $\frac{1}{(a_0)^2}$, car la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Donc $\mathcal{A}_0=(a_1-a_0)\times\frac{1}{(a_0)^2}=\frac{a_0(1+\alpha)-a_0}{(a_0)^2}=\frac{\alpha}{a_0}$.

**b.** Pour tout entier $k$ entre 0 et $n-1$, $\mathcal{A}_k$ est l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[a_k\,;a_{k+1}]$, et de hauteur $\frac{1}{(a_k)^2}$. Donc :

$$\mathcal{A}_k=(a_{k+1}-a_k)\times\frac{1}{(a_k)^2}$$
$$=\frac{a_0(1+\alpha)^{k+1}-a_0(1+\alpha)^k}{\left(a_0(1+\alpha)^k\right)^2}$$
$$=\frac{a_0(1+\alpha)^k\times(1+\alpha-1)}{\left(a_0(1+\alpha)^k\right)^2}=\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^k}.$$

**c.** On somme les $\mathcal{A}_{k'}$ pour $k$ allant de 0 à $n-1$ en utilisant la question **1 b.**. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k=\frac{\alpha}{a_0}+\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)}+\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^2}+\ldots+\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^{n-1}}.$$

Donc en factorisant par $\frac{\alpha}{a_0}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k=\frac{\alpha}{a_0}\left[1+\frac{1}{(1+\alpha)}+\frac{1}{(1+\alpha)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\alpha)^{n-1}}\right]$$

**d.** En utilisant la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1, et de raison $\frac{1}{1+\alpha}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k=\frac{\alpha}{a_0}\times\frac{1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}}{1-\frac{1}{1+\alpha}}=\frac{\alpha}{a_0}\times\frac{1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}}{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$
$$=\frac{1+\alpha}{a_0}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}\right].$$

**e.** Or $1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}\leqslant 1$.

Donc pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k\leqslant\frac{1+\alpha}{a_0}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k=S$, on en déduit que $S\leqslant\frac{1+\alpha}{a_0}$.

**2 a.** ▶ Pour tout entier $n\geqslant 1$, on construit les $n$ rectangles « inférieurs » sur la subdivision $a_0$, $a_1$, … , $a_n$, et de hauteurs $\frac{1}{(a_1)^2}=\frac{1}{(a_0)^2(1+\alpha)^2}$, $\frac{1}{(a_2)^2}=\frac{1}{(a_0)^2(1+\alpha)^4}$, … et $\frac{1}{(a_n)^2}=\frac{1}{(a_0)^2(1+\alpha)^{2n}}$.

La somme des aires de ces $n$ rectangles « inférieurs » est :

$$\frac{a_1-a_0}{(a_1)^2}+\frac{a_2-a_1}{(a_2)^2}+\ldots+\frac{a_n-a_{n-1}}{(a_n)^2}$$
$$=\frac{a_0(1+\alpha)-a_0}{(a_0)^2(1+\alpha)^2}+\frac{a_0(1+\alpha)^2-a_0(1+\alpha)}{(a_0)^2(1+\alpha)^4}+\ldots+\frac{a_0(1+\alpha)^n-a_0(1+\alpha)^{n-1}}{(a_0)^2(1+\alpha)^{2n}}$$
$$=\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^2}+\frac{(1+\alpha)\alpha}{a_0(1+\alpha)^4}+\ldots+\frac{(1+\alpha)^{n-1}\alpha}{a_0(1+\alpha)^{2n}}$$
$$=\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^2}+\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^3}+\ldots+\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^{n+1}}$$
$$=\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^2}\left[1+\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{(1+\alpha)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\alpha)^{n-1}}\right]$$
$$=\frac{\alpha}{a_0(1+\alpha)^2}\times\frac{1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}}{1-\frac{1}{1+\alpha}}=\frac{1}{a_0(1+\alpha)}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}\right].$$

▶ L'aire $S_n$ sous la courbe d'équation $y=\frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $[a_0\,;a_n]$ vérifie donc :

$$\frac{1}{a_0(1+\alpha)}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha)^n}\right]\leqslant S_n.$$

Par passage à la limite (l'existence est admise), on a :

$$\frac{1}{a_0(1+\alpha)}\leqslant S.$$

▶ Donc avec la question **1 e.**, $\frac{1}{a_0(1+\alpha)}\leqslant S\leqslant\frac{1+\alpha}{a_0}$.

**b.** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{a_0(1+\alpha)}=\frac{1}{a_0}$ et $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1+\alpha}{a_0}=\frac{1}{a_0}$. Donc par le théorème des gendarmes, $S=\frac{1}{a_0}$.

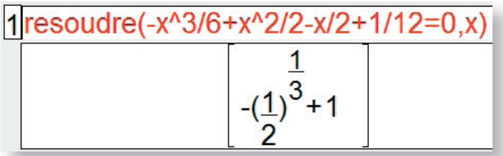
**3** Pour tout réel $t\geqslant a_0$, $\int_{a_0}^{t}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}\right]_{a_0}^{t}=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{t}$.

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{a_0}-\frac{1}{t}=\frac{1}{a_0}$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a_0}^{t}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a_0}.$$

**128** ▶ Une droite $\Delta$ passant par l'origine admet pour équation $y=ax$, où $a$ est un réel.
La droite $\Delta$ et la parabole se coupent aux points d'abscisses $x\Leftrightarrow x-x^2=ax\Leftrightarrow x(1-a-x)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1-a$.
Pour qu'il y ait donc deux points d'intersection sur $[0\,;1]$, il faut que $0<a<1$.
▶ On se place dans le cas où $0<a<1$.
On résout donc :

$$\int_0^{1-a}[x-x^2-ax]\mathrm{d}x=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x-\int_0^{1-a}[x-x^2-ax]\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow 2\times\int_0^{1-a}[x-x^2-ax]\mathrm{d}x=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow 2\times\left[(1-a)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-a}=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{12}=0.$$




On a donc :

$$a=-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+1\approx 0{,}206.$$

**129** Pour tout entier $n\geqslant 0$ :

$$u_n=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{n+1}=\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-(n+1)}$$

$$=\mathrm{e}^{-n}(1-\mathrm{e}^{-1})=(1-\mathrm{e}^{-1})(\mathrm{e}^{-1})^n.$$

Donc la suite $u$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1}$.

On a : $0<\mathrm{e}^{-1}<1$.

Donc la suite $u$ converge vers $0$.

**130** Soit un polynôme $f$ de degré inférieur ou égal à 3. Soient alors quatre réels $m$, $n$, $p$ et $q$ tels que pour tout réel $t$ :

$$f(t)=mt^3+nt^2+pt+q$$

▸ Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{mt^4}{4}+\frac{nt^3}{3}+\frac{pt^2}{2}+qt\right]_a^b$

$$=\frac{m}{4}(b^4-a^4)+\frac{n}{3}(b^3-a^3)+\frac{p}{2}(b^2-a^2)+q(b-a).$$

Or $b^4-a^4=(b-a)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ ;

$b^3-a^3=(b-a)(a^2+ab+b^2)$ ;

$b^2-a^2=(b-a)(a+b)$.

Donc : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=(b-a)\Big[\frac{m}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$$+\frac{n}{3}(a^2+ab+b^2)+\frac{p}{2}(a+b)+q\Big].$$

Donc : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{b-a}{6}\Big[\frac{3m}{2}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$$+2n(a^2+ab+b^2)+3p(a+b)+6q\Big].$$

▸ De plus, $f(a)=ma^3+na^2+pa+q$ ;

$f(b)=mb^3+nb^2+pb+q$ ;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=m\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+n\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+p\left(\frac{a+b}{2}\right)+q.$$

Donc : $f(a)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)$

$$=m\left(a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right)+n\left(a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right)$$

$$+p\left(a+4\left(\frac{a+b}{2}\right)+b\right)+q(1+4+1).$$

$$=m\left(\frac{3}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{2}ab^2+\frac{3}{2}b^3\right)$$

$$+n(2a^2+2ab+2b^2)+p(3a+3b)+6q.$$

▸ On en déduit que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

# Pistes pour l'accompagnement personnalisé

## Revoir les outils de base

**131** ▸ En unités d'aire, l'aire du triangle $BOJ$ est :

$$\frac{OB\times OJ}{2}=\frac{3}{2}.$$

▸ En unités d'aire, l'aire du trapèze $ABJC$ est :

$$\frac{AB+CJ}{2}\times OB=\frac{1+2}{2}\times 3=\frac{9}{2}.$$

▸ En unités d'aire, l'aire du demi-disque de diamètre $[CK]$ est : $\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{CK}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}\pi(\sqrt{5})^2=\dfrac{5\pi}{8}$.

**132** **a.** Pour tout réel $x$,

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

**b.** Pour tout réel $x\in\,]-1;1[$,

$$g(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x).$$

Donc $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{2}{1-x^2}$.

**c.** Pour tout réel $x$, $h'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

**d.** Pour tout réel $x$,

$k'(x)=-2\sin(2x)\times\mathrm{e}^x+\cos(2x)\times\mathrm{e}^x$

$\quad=\mathrm{e}^x\times(\cos(2x)-2\sin(2x))$.

**133** ▸ La parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ se coupent au point d'abscisse $x$

$\Leftrightarrow -x^2+x+2=-0{,}5x+1$

$\Leftrightarrow -x^2+1{,}5x+1=0$ ; $\Delta=6{,}25$

$\Leftrightarrow x=-0{,}5$ ou $x=2$

▸ La surface jaune est le domaine compris entre la parabole $\mathscr{P}$, la droite $\mathscr{D}$, et les droites verticales d'équation $x=-0{,}5$ et $x=2$, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ tels que :

$-0{,}5\leqslant x\leqslant 2$ et $-0{,}5x+1\leqslant y\leqslant -x^2+x+2$.

## Les savoir-faire du chapitre

### Calculer ou encadrer une intégrale en utilisant des calculs d'aires

**134** **1** $I=\displaystyle\int_0^1(x^2+2x+2)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 1\,\mathrm{d}x.$$

Donc $I=C+2B+2A$.

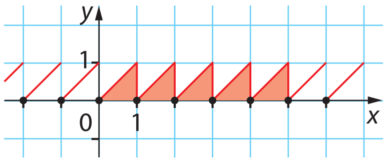
**2** $A$ est l'aire du carré de côté 1 et $B$ est l'aire du triangle isocèle rectangle de côté 1.

Donc $I=\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{2}+2\times 1=\dfrac{10}{3}$.

**135** **a.** Pour tout réel $x$, $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x)\leqslant x<E(x)+1$.

Alors $E(x)+1 \leqslant x+1 < E(x)+2$.
Donc $E(x+1) = E(x)+1$.
On en déduit que :
$$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x+1-E(x)-1$$
$$= x - E(x) = f(x).$$
Donc la fonction $f$ est périodique de période 1.

**b.** ▸ Pour tout réel $x \in [0\,;1[$, $E(x) = 0$. Donc $f(x) = x$.
Alors $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$, en utilisant l'aire du triangle isocèle rectangle de côté 1.
▸ La fonction $f$ étant 1-périodique, on a la représentation graphique suivante :




Donc $J = 5 \times I = \frac{5}{2}$.

## Déterminer des primitives

**136** Pour tout réel $x \in [-2\,;3]$, $F'(x) = f(x)$.
En utilisant la représentation graphique de $f$, on a le tableau suivant :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(x)$ | | | ↘ | | | ↗ | |

**a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Vrai.

**137** **a.** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + k$, où $k$ est un réel.
**b.** Les primitives de $f$ sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + k$, où $k$ est un réel.
**c.** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{4}(\cos(x))^4 + k$, où $k$ est un réel.
**d.** Les primitives de $f$ sur $]2\,;+\infty[$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2-2x) + k$, où $k$ est un réel.

**138** **a.** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto -\cos(x) + k$, où $k$ est un réel.
On résout : $-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc la fonction $F$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = -\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
**b.** Les primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + k$, où $k$ est un réel.
On résout : $\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0} + k = 3 \Leftrightarrow k = 3$.
Donc la fonction $F$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + 3.$$
**c.** Les primitives de $f$ sur $]-\infty\,;-2{,}5[$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{-1}{6(2x+5)^3} + k$, où $k$ est un réel.
On résout : $\frac{-1}{6(2(-3)+5)^3} + k = \frac{1}{6} \Leftrightarrow k = 0$.
Donc la fonction $F$ est définie sur $]-\infty\,;-2{,}5[$ par :
$$F(x) = \frac{-1}{6(2x+5)^3}.$$
**d.** Les primitives de $f$ sur $]-1\,;+\infty[$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + k$, où $k$ est un réel.
On résout : $\frac{1}{3}\ln(0^3+1) + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
Donc la fonction $F$ est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :
$$F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + 1.$$

## Calculer et utiliser une intégrale

**139** La fonction $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$,
$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0.$$
Donc la fonction $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
**1** Faux. **2** Faux.
**3** Vrai. La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est décroissante sur $[0\,;1]$. Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$, soit $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.
Donc : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\mathrm{d}x$,
soit : $\mathrm{e}^{-1} \leqslant F(1) \leqslant 1$.

**140** **a.** $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right]_1^3$
$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1}{1}\right) = 8$.
**b.** $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.
**c.** Pour tout réel $x$, $x^2+x+1 > 0$. Donc :
$$\int_0^3 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^3$$
$$= \ln(13) - \ln(1) = \ln(13).$$
**d.** Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ la fonction cosinus est strictement positive,
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t = \left[-\ln(\cos(t))\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

**141** **1** Pour tout réel $x > 1$,
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{x^2-1}.$$
En identifiant les coefficients,
$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}.$$
Donc pour tout réel $x > 1$,
$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}.$$

**2** $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^3 \left[\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right]\mathrm{d}x$

$$= [2\ln(x-1)+3\ln(x+1)]_2^3$$
$$= (2\ln(2)+3\ln(4)) - 2(2\ln(1)+3\ln(3))$$
$$= \ln(4)+\ln(64)-\ln(27) = \ln\left(\frac{256}{27}\right).$$

## Utiliser les propriétés de l'intégrale

**142** **1** Pour tout réel $t \geqslant 0$ :

- $\frac{1}{1+t}-(1-t) = \frac{t^2}{1+t} \geqslant 0.$

Donc : $\frac{1}{1+t} \geqslant 1-t.$

- $\frac{1}{1+t}-(1-t+t^2) = -\frac{t^3}{1+t} \leqslant 0.$

Donc : $\frac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2.$

- Donc : $1-t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2.$

**2** Soit un réel $x \geqslant 1$. Comme l'intégration conserve l'ordre, on a :

$$\int_0^x (1-t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-t+t^2)\mathrm{d}t.$$

Donc $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leqslant [\ln(1+t)]_0^x \leqslant \left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x.$

Donc pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

**143** Par le logiciel de calcul formel *Xcas*, on a :

```
1 factoriser(x^3/2-x^2-x/2+1)
```

$$\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{2}$$

D'où le tableau de signes de $f(x)$ sur $[-2\,;3]$ :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc en unités d'aire, l'aire de la surface jaune est :

$$-\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+x\right]_{-1}^{1}$$
$$-\left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+x\right]_1^2 + \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+x\right]_2^3$$

$$= \frac{59}{24}+\frac{4}{3}+\frac{5}{24}+\frac{37}{24} = \frac{133}{24}.$$

# Approfondissement

## En lien avec les sciences

**144** **1** La fonction $x$ est la primitive de $v$ sur $[0\,;50]$ qui s'annule en 0.

Donc pour tout réel $t \in [0\,;50]$, $x(t) = \int_0^t v(u)\mathrm{d}u$.

- Pour $t \in [0\,;30]$, $x(t) = \int_0^t u\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$ ;
- Pour $t \in [30\,;40]$,

$$x(t) = \int_0^{30} v(u)\mathrm{d}u + \int_{30}^t v(u)\mathrm{d}u = x(30) + \int_{30}^t 30\mathrm{d}u$$
$$= 450 + [30u]_{30}^t = 450 + 30t - 30^2 = 30t - 450.$$

- Pour $t \in [40\,;50]$,

$$x(t) = \int_0^{40} v(u)\mathrm{d}u + \int_{40}^t v(u)\mathrm{d}u$$
$$= x(40) + \int_{40}^t \left[-\frac{1}{3}(u-40)+30\right]\mathrm{d}u$$
$$= 750 + \int_{40}^t \frac{-u+130}{3}\mathrm{d}u$$
$$= 750 + \left[-\frac{u^2}{6}+\frac{130u}{3}\right]_{40}^t$$
$$= -\frac{t^2}{6}+\frac{130t}{3}-\frac{2\,150}{3}.$$

**2** La vitesse moyenne est :

$$\frac{x(50)}{50} = \frac{62}{3}\text{ m/s} \approx 20{,}67\text{ m/s}.$$

**145** **1** On résout :

$$f(t) \geqslant g(t) \Leftrightarrow 1{,}1t - \ln(t) - \ln(t+1) \geqslant 1{,}1t + \frac{1}{t}$$
$$\Leftrightarrow 0 \geqslant \ln(t) + \ln(t+1) + \frac{1}{t}.$$

Or $t \geqslant 1$. Donc $\ln(t) \geqslant 0$ ; $\ln(1+t) \geqslant 0$ et $\frac{1}{t} > 0$.

Donc pour tout réel $t \geqslant 1$, $\ln(t) + \ln(1+t) + \frac{1}{t} > 0$.

Donc l'inéquation $f(t) \geqslant g(t)$ n'admet pas de solution sur $[1\,;+\infty[$.

Donc la demande n'est jamais satisfaite.

**2** **a.** Pour tout réel $t \geqslant 1$ :

$$k'(t) = \ln(t+1) + \frac{t+1}{t+1} + \ln(t) + \frac{t}{t}$$
$$= \ln(t) + \ln(t+1) + 2.$$

**b.** Pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$g(t) - f(t) = \ln(t) + \ln(t+1) + \frac{1}{t}.$$

Soit $g(t) - f(t) = k'(t) - 2 + \frac{1}{t}$.

Donc une primitive de la fonction $g - f$ est par exemple définie par : $t \mapsto k(t) - 2t + \ln(t)$.

Ainsi :

$$\int_1^5 [g(t)-f(t)]\mathrm{d}t = [(t+1)\ln(t+1) + t\ln(t) - 2t + \ln(t)]_1^5$$
$$= -2\ln(2) + 6\ln(5) + 6\ln(6) - 8,$$

soit $\int_1^5 [g(t)-f(t)]\mathrm{d}t \approx 11{,}021$.

Ainsi le nombre total d'objets manquants est d'environ 11 021, à un objet près.

**146** **1** Pour tout réel $t$,

$$i\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = 10\cos\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = 10\cos(\omega t + 2\pi)$$
$$= 10\cos(\omega t) = i(t).$$

Donc la fonction $i$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

**2** Le maximum de la fonction cosinus est 1, obtenu pour $t = k2\pi$, donc $I_{\max} = 10$ A.

**3** $W = \int_0^T R(10\cos(\omega t))^2 \mathrm{d}t$

$$= 100\,R\int_0^T \frac{\cos(2\omega t)+1}{2}\mathrm{d}t = 50\,R\left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}+t\right]_0^T,$$

avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Donc $W = 50R\times T = \dfrac{100\pi R}{\omega}$.

**4** Le courant continu $I_c$ qui dégage la même quantité de chaleur vérifie :

$$W = \int_0^T R(I_c)^2\mathrm{d}t = R(I_c)^2\times T = \frac{R(I_c)^2 2\pi}{\omega}.$$

Donc $\dfrac{R(I_c)^2 2\pi}{\omega} = \dfrac{100\pi R}{\omega}$, soit $(I_c)^2 = 50$, ou encore $I_c = 5\sqrt{2}$.

**147** **1 a.** $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Dans le pays $F$, 0 % des exploitations les plus petites représente 0 % de la superficie des exploitations totales, et 100 % des exploitations représentent 100 % de la superficie des exploitations totales.

**b.** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{3x^2+6x+1}{2(1+x)^2}.$$

Avec pour le numérateur $\Delta = 24$ ;

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3} \approx -0{,}18 \text{ et } x_2 = \frac{-3-\sqrt{6}}{2} \approx -1{,}82.$$

Donc pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f'(x) > 0$.

Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

**2 a.** $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

**b.** Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 2$.

$\mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e} - 2 \Leftrightarrow x > \ln(\mathrm{e}-2)$.

Or $\ln(\mathrm{e}-2) \approx -0{,}33$.

Donc pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $g'(x) > 0$.

Donc la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

**3 a.** Plus l'indice de Gini est petit, plus l'aire du domaine compris entre la courbe de Lorenz et la droite $\Delta$ (représentant une répartition égalitaire des exploitations) est petite, c'est-à-dire plus cette courbe de Lorenz est proche de la droite $\Delta$, et donc plus la répartition des surfaces des exploitations est proche d'une répartition égalitaire.

**b.** ▸ D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ est plus proche de la droite $\Delta$, que ne l'est la courbe $\Gamma$. Donc le pays correspondant à une répartition la plus égalitaire est le pays $F$.

▸ $$\gamma_F = \frac{\int_0^1 [x-f(x)]\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}} = 2\int_0^1 [x-f(x)]\mathrm{d}x$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^2 - \ln(x+1) + x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln(2) \approx 0{,}11.$$

$$\gamma_G = 2\int_0^1 [x-g(x)]\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^x + \frac{(\mathrm{e}-2)x^2}{2} + x\right]_0^1$$

$$= 3 - \mathrm{e} \approx 0{,}28.$$

Donc $\gamma_F < \gamma_G$. On retrouve le résultat obtenu en utilisant le graphique.

## Calcul de volumes

**148** **1 Volume d'une boule**

**a.** Par le théorème de Pythagore dans le triangle $OPH$, le rayon $r$ du disque $(D)$ vérifie :

$$x^2 + r^2 = R^2.$$

Donc $r^2 = R^2 - x^2$.

L'aire du disque $(D)$ est donc :

$$\pi r^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

**b.** La boule est la réunion de deux demi-boules.

Donc son volume, en unités de volume, est :

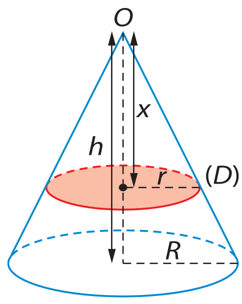
$$V = 2\int_0^R [\pi(R^2-x^2)]\mathrm{d}x = 2\left[\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^R$$

$$= 2\pi\left(R^2\times R - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**2 Volume d'un cône de révolution**

On reprend les notations de la question **1** :

Par le théorème de Thalès, le rayon $r$ du disque intersection vérifie : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{x}{h}$, soit $r = \dfrac{R}{h}x$.




Donc l'aire du disque $(D)$ intersection est : $\pi\left(\dfrac{R}{h}\right)^2 x^2$.

Donc, en unités de volume, le volume du cône de révolution est :

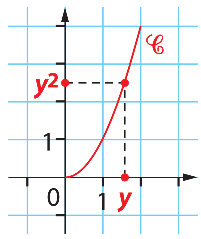
$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 x^2\mathrm{d}x = \left[\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

**149** **Partie 1**

Pour tout réel $y \in [0\,;2]$, la hauteur $z$ est égale à $y^2$, et varie dans $[0\,;4]$.

Pour tout réel $z \in [0\,;4]$, le rayon du disque intersection est $y = \sqrt{z}$.

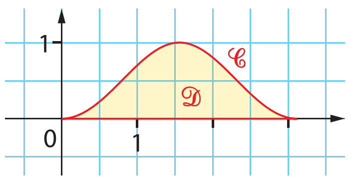
Donc, en unité de volume, le volume du solide engendré est :




$$V = \int_0^4 \pi(\sqrt{z})^2\mathrm{d}z = \int_0^4 \pi z\mathrm{d}z = \left[\pi\frac{z^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi.$$

**Partie 2**

**1** On a :




**2** Pour tout réel $x$, $(\sin(x))^2 = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

$$(\sin(x))^4 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1-2\cos(2x)+(\cos(2x))^2}{4}$$

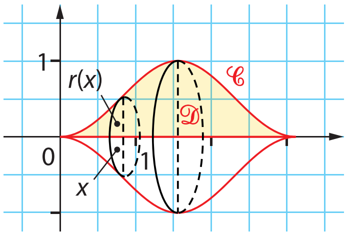
$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1+\cos(4x)}{2}$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}.$$

**3** $\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin(t))^4\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left[\frac{3}{8} - \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8}\right]\mathrm{d}t$

$$= \left[\frac{3t}{8} - \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin(4t)}{32}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

**4** On a :




Pour tout réel $x \in [0\,;\pi]$, le disque d'intersection du solide $S$ avec le plan vertical a pour rayon $r(x) = f(x)$. Donc en unités de volume, le volume du solide $S$ est :

$V = \displaystyle\int_0^{\pi}\pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(\sin(x))^4\,\mathrm{d}x$

$= \pi \times \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{3\pi^2}{8}.$

Comme l'unité de volume est $2\times2\times2 = 8\text{ cm}^3$, le volume du solide $S$ est $\dfrac{3\pi^2}{8}\times 8 = 3\pi^2 \approx 29{,}6\text{ cm}^3$.

## Vers le supérieur

**150** **1** Pour tout réel $x \in \mathrm{I}$,

$$(uv)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Donc en intégrant sur $[a\,;b]$, on a :

$\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)]\,\mathrm{d}x$

$$= \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x.$$

**2** **a.** ▸ On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

Par la formule d'intégration par parties :

$$I = [x\times \mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1 = 1.$$

▸ On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Par la formule d'intégration par parties :

$J = \left[\dfrac{x^3}{3}\times\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\times\frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{9} + \frac{2\mathrm{e}^3}{9}.$

**b.** La primitive $F$ de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est définie par :

$$F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x 1\times\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$.

Par la formule d'intégration par parties :

$F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\times t\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - 0 - \int_1^x 1\mathrm{d}t$

$= x\ln(x) - [t]_1^x = x\ln(x) - x + 1.$

**151** **1** Pour tout entier $n \geqslant 0$ :

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(x)\times(\sin(x))^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\sin(x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{1}{n+1}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$$

$I_{n+2} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin(x))^{n+2}}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin(x))^n}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin(x))^{n+2} - (\sin(x))^n}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin(x))^n\times\frac{(\sin(x))^2 - 1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin(x))^n\times\frac{-(\cos(x))^2}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

$= -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos(x))\times(\sin(x))^n\,\mathrm{d}x.$

Donc $I_{n+2} - I_n = \dfrac{-1}{n+1}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$

**2** ▸ La fonction cosinus est positive sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Donc $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln(1) = \ln(2).$

▸ Alors $I_3 = I_1 - \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \ln(2) - \dfrac{3}{8}.$

▸ Et $I_5 = I_3 - \dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \ln(2) - \dfrac{3}{8} - \dfrac{9}{64}$

$= \ln(2) - \dfrac{33}{64}.$

**3** **a.** Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ par :

$$g(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

On a :

$g'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$

$= \dfrac{1}{2\left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}.$

Donc pour tout réel $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$, on a donc :

$f'(x) = \dfrac{1}{2\left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\times\dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

$= \dfrac{1}{2\left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\times\dfrac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}$

$= \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$

Or $2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x).$$

Donc $f'(x)=\frac{1}{\cos(x)}$.

**b.** ◗ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x=[f(x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\ln(1)=\ln(2+\sqrt{3}).$$

◗ $I_2=I_0-\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◗ $I_4=I_2-\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

**152** **1** $I_0(a)=\int_0^a f_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=[-\mathrm{e}^{-x}]_0^a=1-\mathrm{e}^{-a}.$$

**2** Soit un entier $k\geqslant 1$ et un réel $x\geqslant 0$.

◗ $f_k(0)=\frac{0^k}{k!}\mathrm{e}^0=0$ ;

◗ $f_k(x)=\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}$.

Donc $(f_k)'(x)=\frac{k\,x^{k-1}}{k!}\times\mathrm{e}^{-x}+\frac{x^k}{k!}\times(-\mathrm{e}^{-x})$

$$=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-x}-\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}=f_{k-1}(x)-f_k(x).$$

◗ On a :

$I_k(a)-I_{k-1}(a)=\int_0^a f_k(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f_{k-1}(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^a [f_k(x)-f_{k-1}(x)]\mathrm{d}x.$$

D'après l'égalité obtenue précédemment, on a alors :

$I_k(a)-I_{k-1}(a)=\int_0^a -(f_k)'(x)\mathrm{d}x$

$$=[-f_k(x)]_0^a=-\frac{a^k}{k!}\mathrm{e}^{-a}.$$

**3** D'après la question **2**, on a :

$I_1(a)-I_0(a)=-a\mathrm{e}^{-a}$ ;

$I_2(a)-I_1(a)=-\frac{a^2}{2!}\mathrm{e}^{-a}$ ;

$I_3(a)-I_2(a)=-\frac{a^3}{3!}\mathrm{e}^{-a}$ ; …

$I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}$.

En sommant les égalités précédentes, on a alors :

$I_n(a)-I_0(a)=-a\mathrm{e}^{-a}-\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-a}-\frac{a^3}{3!}\mathrm{e}^{-a}-\ldots$

$$-\frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}$$

$=-\left(a+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-a}=-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

Donc : $I_n(a)=I_0(a)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

Or, $I_0(a)=1-\mathrm{e}^{-a}$.

Donc on obtient : $I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

**4** **a.** Pour tout entier $n\geqslant 1$, pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$f_n(x)\geqslant 0.$$

D'après la positivité, $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

Donc $u_n\geqslant 0$.

Graphiquement, $u_n$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1$.

**b.** Pour tout réel $x\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1$ et $\frac{x^n}{n!}\geqslant 0$.

Donc pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $0\leqslant\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\leqslant\frac{x^n}{n!}$.

Soit pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{x^n}{n!}$.

**c.** ◗ En utilisant la question **4** **b.** et la relation d'ordre, on a :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x,$$

soit : $$0\leqslant u_n\leqslant\left[\frac{x^{n+1}}{n!\times(n+1)}\right]_0^1.$$

Ainsi : $$0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}.$$

◗ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

**d.** On sait que :

$$u_n=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1}.$$

Donc : $$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\frac{1-u_n}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}-u_n\times\mathrm{e}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\times\mathrm{e}=0$.

Donc : $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\mathrm{e}.$$

**153** **1** **a.** Pour tout réel $t>0$,

$$\int_t^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=[2\sqrt{x}]_t^1=2-2\sqrt{t}.$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$. Donc l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$.

**b.** Pour tout réel $t>0$, $\int_t^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln(x)]_t^1=-\ln(t)$.

Donc $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$.

Donc l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ n'est pas convergente.

**c.** Pour tout réel $t>0$,

$$\int_t^1\ln(x)\mathrm{d}x=[x\ln(x)-x]_t^1=-1-t\ln(t)+t.$$

Or, $\lim\limits_{t\to 0}t\ln(t)=0$ (théorème de croissance comparée),

donc $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1\ln(x)\mathrm{d}x=-1$.

Donc l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x = -1$.

**2 a.** Pour tout réel $t > 1$,

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1$.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1$.

**b.** Pour tout réel $t > \mathrm{e}$,

$$\int_{\mathrm{e}}^t \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{\mathrm{e}}^t = 1 - \frac{1}{\ln(t)}.$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{\mathrm{e}}^t \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x = 1$.

Donc l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x = 1$.

**c.** Pour tout réel $t > 0$,

$$\int_0^t \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)\frac{(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^t \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}.$$

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

# Les nombres complexes

## Introduction

### 1. Programme

En classe Terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| Forme algébrique, conjugué.<br><br>Somme, produit, quotient. | • Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. | On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique. |
| Équation du second degré à coefficients réels. | • Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels. | |
| Représentation géométrique | • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. | Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. |
| Affixe d'un point, d'un vecteur | • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur. | |
| Forme trigonométrique :<br>– module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ;<br>– notation exponentielle. | • Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.<br><br>• Connaître et utiliser la relation $z\bar{z} = \lvert z \rvert^2$.<br><br>• Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes. | La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle.<br><br>Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en Première.<br><br>⇄ [SI] Analyse fréquentielle d'un système. |

### 2. Intentions des auteurs

Le programme insiste sur l'aspect algébrique de l'ensemble des nombres complexes, laissant aux applications géométriques un domaine plus réduit que dans les programmes antérieurs.

Nous avons donc fait le choix d'introduire rapidement les outils permettant de calculer dans $\mathbb{C}$ au moyen de la forme algébrique : conjugué, règles opératoires, inverse, et de résoudre l'équation du second degré.

La représentation géométrique se trouve donc formalisée un peu plus tard ; elle peut toutefois être présentée de manière rapide et non formelle dès les premières activités : elle est aussi porteuse de sens, et permet « d'asseoir l'existence » de nombres qui, possédant la propriété d'avoir un carré négatif, peuvent de prime abord sembler suspects aux élèves.

L'aspect historique des nombres complexes est aussi abordé, à travers une activité de culture générale au début, puis autour des travaux des algébristes italiens, sous forme de problèmes en fin de chapitre : ils peuvent faire l'objet d'une recherche ou d'un devoir à la maison.

L'aspect géométrique des nombres complexes est dominé par les écritures trigonométrique et exponentielle. Les élèves doivent savoir passer d'une forme à l'autre, ce qui est l'occasion de réactiver leurs connaissances de trigonométrie.

C'est la forme exponentielle qui rend les calculs agréables et permet de déterminer rapidement modules et arguments d'un produit ou d'un quotient : il importe donc de la présenter conjointement à la forme trigonométrique, aucune des règles sur l'argument d'un produit ou d'un quotient n'ayant été formalisé contrairement à l'ancien programme.

Dans les problèmes qui peuvent donner lieu à des applications géométriques, et pour les calculs d'angles, il conviendra de réactiver la relation de Chasles sur les angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ en

faisant le lien avec la différence des arguments de $Z_B$ et $Z_A$.
Même avec l'insistance soulignée dans le nouveau programme sur l'aspect algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$, il n'en demeure pas moins que cet ensemble est à la croisée des domaines algébriques et géométriques et constitue pour l'élève un champ d'application lui permettant de choisir des outils adaptés aux situations et d'utiliser l'ensemble des connaissances acquises dans son cursus scolaire.

# Partir d'un bon pied

**Objectif**

*En algèbre, revoir le second degré (discriminant, forme canonique, racines et factorisation) et en géométrie réactiver le cours de Seconde sur les coordonnées cartésiennes et celui de Première sur les angles orientés.*

**A** **1** **b.** **2** **a.** **3** **c.** **4** **c.**

**B** **1** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$.

**2** $C(-2\,;0{,}5)$.

**3** $OE = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

**4** $F(-3\,;8)$.

**5** $E'(4\,;-3)$.

**6** $A'(1\,;-3)$.

**7** $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, donc :

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{EJ} = 1\times 4 + 2\times(-2) = 0\ ;$$

donc $(BI)$ et $(EJ)$ sont perpendiculaires.

**C** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.
**5** Faux. **6** Vrai.

# Découvrir

## Activité 1 Des nouveaux nombres

**Objectif**

*Découvrir le nombre « i » à l'aide de la calculatrice, faire « naturellement » quelques calculs avec ce nouveau nombre et définir les parties réelles et imaginaires.*

**1** $\mathrm{i}^2 = -1$ ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.

**2** **a.** $a+b = -1-3\mathrm{i}$ et $a\times b = 4+19\mathrm{i}$.

**b.** $a^2 = 5-12\mathrm{i}$.

**3** **a.** La calculatrice donne $-3$ pour la partie réelle de $a$ et 2 pour sa partie imaginaire, et pour $b$, 2 comme partie réelle et $-5$ comme partie imaginaire.

**b.** On conjecture que $z$ a pour partie réelle $x$, pour partie imaginaire $y$ et pour conjugué $x - \mathrm{i}y$.

## Activité 2 Le second degré dans $\mathbb{C}$

**Objectif**

*Utiliser la forme canonique pour résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré ayant un discriminant négatif.*

**1** **a.** $\mathcal{S} = \{-2\mathrm{i}\,;2\mathrm{i}\}$ ; **b.** $\mathcal{S}\ \{-\sqrt{-k}\,\mathrm{i}\,;\sqrt{-k}\,\mathrm{i}\}$.

**2** **a.** $\Delta = -16 < 0$.

**b.** $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$,

donc $x^2-2x+5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -4$.

**c.** $-4 = (2i)^2$, donc $(x-1)^2 = -4 \Leftrightarrow x-1 = -2i$ ou $x-1 = 2i \Leftrightarrow x = 1-2i$ ou $x = 1+2i$.

**3** $\Delta = -36 < 0$ ;

$z^2+4z+13 = 0 \Leftrightarrow (z+2)^2+9 = 0$

$\Leftrightarrow (z+2)^2 = -9 = (3\mathrm{i})^2$

$\Leftrightarrow z+2 = -3\mathrm{i}$ ou $z+2 = 3\mathrm{i}$ ;

$\mathcal{S} = \{-2-3\mathrm{i}\,;-2+3\mathrm{i}\}$.

## Activité 3 Un peu d'histoire : recherche documentaire

**Objectif**

*Approche historique de la notion et découverte de l'interprétation géométrique.*

**1** Les nombres ayant un carré négatif ont été introduits au XVI^e siècle pour résoudre les équations du troisième degré.

**2** Léonhard Euler, en 1777.

**3** Carl Friedrich Gauss, en 1831.

**4** L'ensemble des nombres complexes est dit « algébriquement clos », car tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine dans cet ensemble.

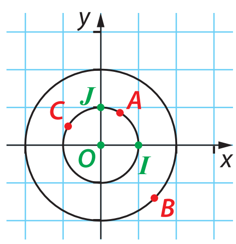
$\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos : par exemple, le polynôme à coefficients réels $x^2+1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

**5** Au point de coordonnées $(x\,;y)$ on associe le nombre complexe $x+y\mathrm{i}$.

## Activité 4 Un autre repérage pour les points du plan

**Objectif :** *Découvrir les coordonnées polaires et faire le lien avec les coordonnées cartésiennes.*

**1**




**2** Pour $I$ : $r = 1$ et $\alpha = 0\ (2\pi)$.

Pour $J$ : $r = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

**3** **a.** Les coordonnées polaires de $m$ sont 1 et $\alpha$.
**b.** $m(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.
**c.** $(\overrightarrow{Om}\,;\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{Om}\,;\overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}) = 0\ \ (2\pi)$, donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{Om}$ sont colinéaires et de même sens.
**d.** D'après la question **3 c.** il existe un réel positif $k$ tel que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{Om}$ ; or, $OM = r$ et $Om = 1$, donc $k = r$.
**e.** L'égalité vectorielle précédente traduite sur les coordonnées donne $x = r\cos\alpha$ et $y = r\sin\alpha$.

# Exercices d'application

## Savoir faire Utiliser la forme algébrique

**1**

| | Partie réelle | Partie imaginaire | Conjugué |
|---|---|---|---|
| $z_1$ | 5 | $-2$ | $5+2\mathrm{i}$ |
| $z_2$ | 15 | 0 | 15 |
| $z_3$ | 0 | 3 | $-3\mathrm{i}$ |
| $z_4$ | $-3$ | 2 | $-3-2\mathrm{i}$ |
| $z_5$ | $-24$ | $-10$ | $-24+10\mathrm{i}$ |

**2** $z_1 = 5+6\mathrm{i}$ ; $z_2 = 11-20\mathrm{i}$ ; $z_3 = -43+\mathrm{i}$ ;
$z_4 = -24-10\mathrm{i}$ ; $z_5 = 6-8\mathrm{i}$ ; $z_6 = \mathrm{i}$.

**3** Si $z = x+\mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels, alors $z+\overline{z} = 2x \in \mathbb{R}$ ; $z-\overline{z} = 2\mathrm{i}y \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\overline{\overline{z}} = \overline{x-\mathrm{i}y} = x-(-\mathrm{i}y) = x+\mathrm{i}y = z$.

**4** **a.** $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$ ;
**b.** $\mathcal{S} = \{2+4\mathrm{i}\}$ ;
**c.** $z^2+2\mathrm{i}z-1 = 0 \Leftrightarrow (z+\mathrm{i})^2 = 0$, donc $\mathcal{S} = \{-\mathrm{i}\}$ ;
**d.** soit $z = x+\mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels ;
$z+\mathrm{i} = 2\overline{z}+1 \Leftrightarrow x+\mathrm{i}(y+1) = 2x+1-2y\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+1 \\ y+1 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} ; \mathcal{S} = \left\{-1-\frac{1}{3}\mathrm{i}\right\}.$$

**5** **a.** $\mathrm{Re}(5z-\mathrm{i}) = 5x$ et $\mathrm{Im}(5z-\mathrm{i}) = 5y-1$ ;
**b.** $\mathrm{Re}((3-2\mathrm{i})z) = 3x+2y$ et $\mathrm{Im}((3-2\mathrm{i})z) = 3y-2x$ ;
**c.** $\mathrm{Re}(z^2) = x^2-y^2$ et $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$ ;
**d.** $\mathrm{Re}(3\overline{z}-5z) = -2x$ et $\mathrm{Im}(3\overline{z}-5z) = -8y$ ;
**e.** $\mathrm{Re}(2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}-\overline{z}) = -2x-y-2$
et $\mathrm{Im}((2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}-\overline{z})) = -x+2y+4$ ;
**f.** $\mathrm{Re}((z-1)(\overline{z}-\mathrm{i})) = x^2+y^2-x+y$
et $\mathrm{Im}((z-1)(\overline{z}-\mathrm{i})) = -x+y+1$.

## Savoir faire Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

**6** $\frac{1}{z_1} = -\mathrm{i}$ ; $\frac{1}{z_2} = \frac{2+\mathrm{i}}{4+1} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$ ;
$\frac{1}{z_3} = \frac{1-2\mathrm{i}}{4+1} = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$.

**7** **a.** $\mathcal{S} = \{0\}$ ;
**b.** $(2+\mathrm{i})z = 3z-\mathrm{i} \Leftrightarrow (-1+\mathrm{i})z = -\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{1+1} = \frac{\mathrm{i}-1}{2},$$

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

**8** **a.** $z_1 = \frac{\overline{z}^2}{z\overline{z}}$, donc $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
et $\mathrm{Im}(z_1) = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$ ;
**b.** $z_2 = \frac{\mathrm{i}z^2}{z\overline{z}}$, donc $\mathrm{Re}(z_2) = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$
et $\mathrm{Im}(z_2) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

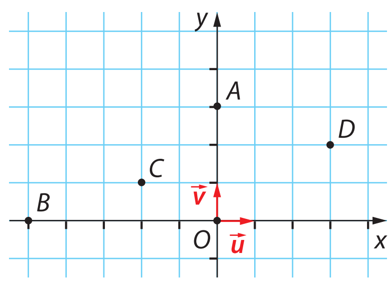
**9** **a.** $z^2 = -16 = (4\mathrm{i})^2$, donc $\mathcal{S} = \{-4\mathrm{i}\,;4\mathrm{i}\}$ ;
**b.** $z^2 = 5$, donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\}$ ;
**c.** $z^2 = 9$ ou $z^2 = -9$ et $-9 = (3\mathrm{i})^2 = (3\mathrm{i})$
donc $\mathcal{S} = \{-3\,;3\,;-3\mathrm{i}\,;3\mathrm{i}\}$ !
**d.** $z^2+2\mathrm{i}z-1 = z^2+2\mathrm{i}z+\mathrm{i}^2 = (z+\mathrm{i})^2$,
donc $\mathcal{S} = \{-\mathrm{i}\}$.

**10** **1** $\Delta = 1$ ; $\mathcal{S}\ \{2\,;3\}$.
**2** $\Delta = 51$ ; $\mathcal{S} = \left\{\frac{5-\sqrt{51}}{2}\,;\frac{5+\sqrt{51}}{2}\right\}$.
**3** $\Delta = -256 = (16\mathrm{i})^2$ ; $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}-2\mathrm{i}\,;\frac{1}{2}+2\mathrm{i}\right\}$.
**4** $\Delta = -16 = (4\mathrm{i})^2$ ; $\mathcal{S} = \{1-\mathrm{i}\,;1+\mathrm{i}\}$.

**11** **a.** $\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = z-\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow z \neq -\mathrm{i}$ et $z-\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$
$\Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}-1) = 0$ ; $\mathcal{S} = \{\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i}\}$.
**b.** $\frac{z+2}{z} = -\frac{z}{z+2} \Leftrightarrow (z+2)^2 = -z^2$
$\Leftrightarrow 2z^2+4z+4 = 0 \Leftrightarrow z^2+2z+2 = 0$ ;
$\Delta = -4 = (2\mathrm{i})^2$ ; $\mathcal{S} = \{-1-\mathrm{i}\,;-1+\mathrm{i}\}$.

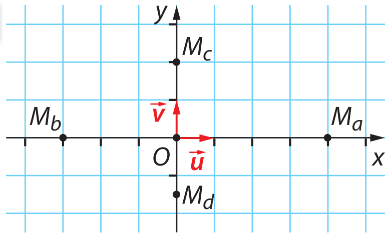
## Savoir faire Nombres complexes et géométrie

**12**



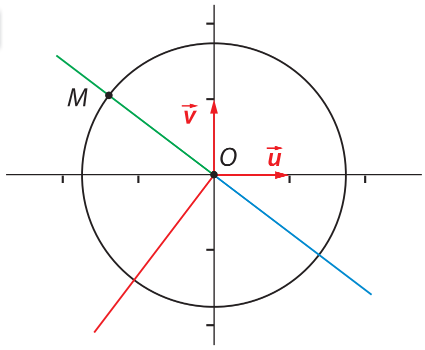

**13** **a.** $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, donc $z_C = z_B - z_A = 1-3\mathrm{i}$.
**b.** $[OB]$ et $[CA]$ ont le même milieu, donc $z_B = z_A + z_C$ et on retrouve $z_C = 1-3\mathrm{i}$.

**14**




| $z$ | Module | Un argument |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 0 |
| $-3$ | 3 | $\pi$ |
| $2i$ | 2 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $-1{,}5i$ | 1,5 | $-\frac{\pi}{2}$ |

**15**




L'origine est à exclure de chaque ensemble de solutions.

## Savoir faire Utiliser différentes formes

**16**

| $z$ | Module | Un argument |
|---|---|---|
| $2i$ | 2 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $-3i$ | 3 | $-\frac{\pi}{2}$ |
| 5 | 5 | 0 |
| $-7$ | 7 | $\pi$ |

**17** $z_1 = \sqrt{3} + i$ ; $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; $z_3 = -\sqrt{3} + i$.

**18** ▸ $z_1 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, donc un argument de $z_1$ est $\frac{5\pi}{6}$.

▸ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, donc un argument de $z_2$ est $-\frac{3\pi}{4}$.

▸ Avec la notation exponentielle,

$$z_3 = \frac{2\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{2\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)} :$$

un argument de $z_3$ est $\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{19\pi}{12}$.

▸ $z_4 = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, donc un argument de $z_4$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

▸ $z_5 = 1 - (-1) = 2$, donc un argument de $z_5$ est 0.



**19**

| $z$ | Module | Un argument |
|---|---|---|
| $z_A$ | 2 | $\frac{\pi}{3}$ |
| $z_B$ | 1,5 | $-\frac{3\pi}{4}$ |
| $z_C$ | 1 | $\frac{\pi}{6}$ |

## Travaux pratiques

### 20 Étude d'un lieu de points

**1** $M = M' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z^2 = z^2 + 1$

$\Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z = 1$.

**2** D'après la question **1**, les points $I'(-1)$ et $I(1)$ ont pour image eux-mêmes.

$\frac{1}{2}\left(i + \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{2i}(i^2 + 1) = 0$

et $\frac{1}{2}\left(-i + \frac{1}{-i}\right) = -\frac{1}{2i}(i^2 + 1) = 0$, donc les points $A(i)$ et $B(-i)$ ont pour image l'origine.

$\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$,

donc $C\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ a pour image $I$.

*Conjecture* : l'image du cercle $\Gamma$ semble être le segment $[II']$.

*Preuve* : si $M(z) \in \Gamma$, $\frac{1}{z} = \bar{z}$,

donc $z' = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \in [-1;1]$,

donc $M' \in [II']$.

Réciproquement, si $M'(z')$ avec $z' \in [-1;1]$, le calcul précédent nous conduit à considérer le point $M$ d'affixe $z = z' + i\sqrt{1 - z'^2}$ : $|z| = 1$, donc $M \in \Gamma$ ; donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$ et $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}(z) = z'$. Ainsi, $M'$ est bien l'image d'un point de $\Gamma$.

### 21 Résolution d'équations polynomiales et applications

**Partie A**

**1 a.** $\Delta = -100 = (10i)^2$ ; $\mathcal{S} = \{1 - 5i ; 1 + 5i\}$.

**b.** $\Delta = -16 = (4i)^2$ ;

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i ; -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i\right\}$.

**c.** $4z^2 + 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow (2z + 1)^2 = 0$ ; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

**2** $P(z) = (z - (1 - 5i))(z - (1 + 5i))$

$= (z - 1 + 5i)(z - 1 - 5i)$ ;

$Q(z) = (z - i\sqrt{7})(z + i\sqrt{7})(z - \sqrt{7})(z + \sqrt{7})$ ;

$R(z) = 13\left(z - \left(-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right)\right)\left(z - \left(-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i\right)\right)$

$= \frac{1}{13}(13z + 3 + 2i)(13z + 3 - 2i)$.

**Partie B**

**1** Soit $y \in \mathbb{R}$ ; $f(iy) = y^4 + 6y^3 i - 14y^2 - 24yi + 40$

$= y^4 - 14y^2 + 40 + i(6y^3 - 24y)$.

Donc $f(\mathrm{i}y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^4-14y^2+40=0 \\ 6y^3-24y=0 \end{cases}$ ;

$6y^3-24y=0 \Leftrightarrow 6y(y^2-4)=0$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $y=-2$ ou $y=2$.

Seuls $-2$ et $2$ sont solutions de la première équation du système, donc l'équation $f(z)=0$ admet deux solutions imaginaires pures qui sont $-2\mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}$.

**2** $(z^2+az+b)(z^2+4)=z^4+az^3+(4+b)z^2$ $+4az+4b$ ;

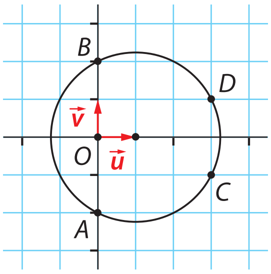
par identification, on obtient $a=-6$ et $b=10$.

**3** $f(z)=0 \Leftrightarrow z^2-6z+10=0$ ou $z^2+4=0$ ;

Pour $z^2-6z+10=0$, $\Delta=-4=(2\mathrm{i})^2$ finalement,

$\mathcal{S}=\{-2i\,;2i\,;3-i\,;3+i\}$.

**4** **a.**




**b.** La figure permet de conjecturer que les points $A$, $B$, $C$, $D$ sont sur un même cercle de centre $I(1\,;0)$. Pour le prouver, on calcule :

$IA=|-2\mathrm{i}-1|=\sqrt{5}$ ; $IB=|2\mathrm{i}-1|=\sqrt{5}$ ;

$IC=|2-\mathrm{i}|=\sqrt{5}$ et $ID=|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$.

## 22 Racines *n*-ièmes de l'unité

**1** **a.** 1 est une solution évidente ;

$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z^3-1=0 \Leftrightarrow z^3=1$.

**b.** Pour $z^2+z+1=0$, $\Delta=-3=(\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$ ;

$$\mathcal{S}=\left\{1\,;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$$

$$=\left\{\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}}\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right\}.$$

**c.** $j^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}}$, donc les points $A$, $B$, $C$ ont pour affixes les solutions de l'équation $z^3=1$ ; ces points sont sur le cercle trigonométrique, car 1, $j$ et $j^2$ ont pour module 1.

$$(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB})=\arg(j)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$$

et $(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OA})=-(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC})=-\arg(j^2)=\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$,

donc $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC})=\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ et le triangle $ABC$ est équilatéral direct.

**2** **a.** $z^4=1 \Leftrightarrow r^4\mathrm{e}^{4\alpha\mathrm{i}}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^4=1 \\ 4\alpha=0\ (2\pi) \end{cases}$.

**b.** $r^4=1 \Leftrightarrow r=1$ car $r>0$ ;

$4\alpha=0\ (2\pi) \Leftrightarrow 4\alpha=k\times 2\pi \Leftrightarrow \alpha=k\times\dfrac{\pi}{2}$,

avec $k$ entier.

D'où $\mathcal{S}=\left\{1\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right\}=\{1\,;\mathrm{i}\,;\mathrm{i}^2\,;\mathrm{i}^3\}$.

**3** $z^n=1 \Leftrightarrow r^n\mathrm{e}^{n\alpha\mathrm{i}}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^n=1 \\ n\alpha=0\ (2\pi) \end{cases}$

$r^n=1 \Leftrightarrow r=1$, car $r>0$ ;

$n\alpha=0\ (2\pi) \Leftrightarrow n\alpha=k\times 2\pi \Leftrightarrow \alpha=k\times\dfrac{2\pi}{n}$,

avec $k$ entier.

D'où $\mathcal{S}\ \left\{1\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{n}}\,;\ldots\,;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2n-2)\pi}{n}}\right\}$.

## 23 Programmer la résolution d'une équation du second degré

**1** • Si le discriminant est strictement positif, l'équation a deux solutions réelles distinctes ;

• si le discriminant est nul, l'équation a une seule solution réelle ;

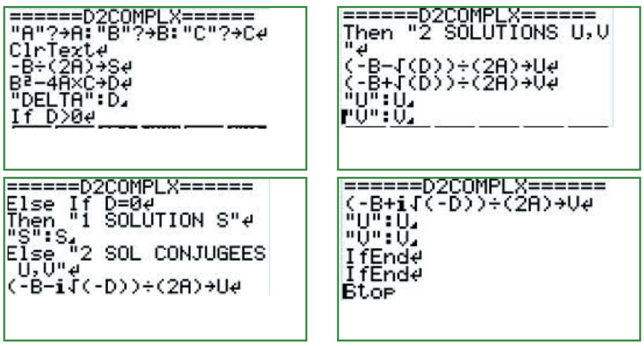
• si le discriminant est strictement négatif, l'équation a deux solutions complexes conjuguées.

**2** L'algorithme présenté ne convient que pour la résolution dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

**ALGO**

Variables : $a$, $b$, $c$, $D$, $u$, $v$ : réels ;
Début
Entrer($a$, $b$, $c$) ;
$D \leftarrow b^2-4*a*c$ ;
    Si $D>0$
    Alors
        $u \leftarrow \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ ; $v \leftarrow \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ ;
        Afficher($u$, $v$, « deux solutions réelles »)
    Sinon
        Si $D=0$
        Alors
            $u \leftarrow -\dfrac{b}{2a}$ ;
            Afficher ($u$, « une seule solution réelle »)
        Sinon
            $u \leftarrow \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$ ; $v \leftarrow \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$ ;
            Afficher ($u$, $v$, « deux solutions complexes conjuguées »)
        FinSi
    FinSi
Fin

**3** **a.** Avec une calculatrice :




Avec *Scilab* :

```
a=input("a=");
b=input("b=");
c=input("c=");
d=b^2-4*a*c
if d>0 then
  z1=(-b+sqrt(d))/(2*a) ; z2=(-b-sqrt(d))/(2*a) ;
  disp(«l'équation a deux solutions réelles»)
  disp(z1,z2)
else
```

```
if d==0 then
 z0=-b/(2*a)
 disp(«l'équation a une seule solution réelle»)
 disp(z0)
else
 z1=(-b+%i*sqrt(-d))/(2*a);z2=(-b-%i*sqrt(-d))/(2*a);
  disp(«l'équation a deux solutions complexes conjuguées»)
 disp(z1,z2)
end
end
```

**b.**

❶

```
a = 1 ; b = -2 ;
c = 26
l'équation a
deux solutions
complexes
conjuguées
1 - 5.i
1 + 5.i
```

❷

```
a = - 2 ; b = 1 ;
c = 1
l'équation a deux
solutions réelles
1.
- 0.5
```

❸

```
a = 13 ; b = 6 ;
c = 1
l'équation a
deux solutions
complexes
conjuguées
-0.2307692 - 0.1538462i
-0.2304692 + 0.1538462i
```

❹

```
a = 4 ; b = 4 ;
c = 1
l'équation a une
seule solution
réelle
- 0.5
```

## Faire le point

**27** **1** b. **2** b. **3** c. **4** a. **5** a. **6** b et c. **7** a et c.

**28** **1** c. ; **2** a., b. et c. ; **3** b. et c. ; **4** c.

**29** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Faux. **5** Faux.

## Exercices d'application

### 1 L'ensemble $\mathbb{C}$

**30** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

**31** **1** c. **2** a., b. et c. **3** a. et b. **4** b. et c.

**32** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Faux

**33**

| Question | $\mathrm{Re}(z)$ | $\mathrm{Im}(z)$ |
|---|---|---|
| 1 | 8 | $-6$ |
| 2 | $-5$ | 5 |
| 3 | $-13$ | 18 |

**34**

| Question | $\mathrm{Re}(z)$ | $\mathrm{Im}(z)$ |
|---|---|---|
| 1 | $-y$ | $x$ |
| 2 | $x+x^2-y^2$ | $y+2xy$ |
| 3 | $3x+2y$ | $2x-3y$ |
| 4 | $4x^2$ | 0 |
| 5 | $x^2+y^2+x+y$ | $x+y+1$ |

**35** **1** $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right\}$. **2** $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}\right\}$.
**3** $\mathcal{S}=\{-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}\}$.

**36** On écrit $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels, puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

**1** On obtient le système $\begin{cases}2x=x+1\\2y+1=-y\end{cases}$ ; après calculs, $\mathcal{S}=\left\{1-\frac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$.

**2** On obtient le système $\begin{cases}x^2-y^2=x\\2xy=-y\end{cases}$ ; la seconde équation équivaut à $y=0$ ou $x=-\frac{1}{2}$ ; en remplaçant successivement dans la première, on obtient :

$$\mathcal{S}=\left\{0\,;1\,;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}.$$

### 2 Calculs avec le conjugué

**37** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux.

**38** **1** b. et c. **2** a. et b. **3** a., b. et c.

**39** **1** $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}\right\}$. **2** $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$.
**3** $\mathcal{S}=\left\{\frac{15}{13}+\frac{3}{13}\mathrm{i}\right\}$.

**40**

| Question | $\mathrm{Re}(z')$ | $\mathrm{Im}(z')$ |
|---|---|---|
| 1 | $y$ | $-x$ |
| 2 | $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ | $\dfrac{-x-y}{x^2+y^2}$ |
| 3 | $\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x^2+y^2-y+1}$ | $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-y+1}$ |
| 4 | $\dfrac{-2xy-2x}{x^2+y^2}$ | $\dfrac{x^2-y^2-2y}{x^2+y^2}$ |

**41** **1** $\frac{1}{10}-\frac{7}{10}\mathrm{i}$. **2** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. **3** $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

**42** **1** **a.** $\overline{\overline{z}}=\overline{x-\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y=z$.

**b.** $\overline{z+z'}=\overline{(x+x')+\mathrm{i}(y+y')}=(x+x')-(y+y')\mathrm{i}$
$=(x-\mathrm{i}y)+(x'-\mathrm{i}y')=\overline{z}+\overline{z'}$.

**c.** $\overline{zz'}=\overline{(xx'-yy')+\mathrm{i}(xy'+yx')}$
$=(xx'-yy')-\mathrm{i}(xy'+yx')$ ;

par ailleurs :
$\overline{z}\,\overline{z'}=(x-\mathrm{i}y)(x'-\mathrm{i}y')=xx'-yy'-\mathrm{i}(xy'+x'y)$,
d'où $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$.

**2** **a.** D'après **1** **c.**, $1=\overline{z'\times\frac{1}{z'}}=\overline{z'}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$,

donc $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$.

**b.** $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{z\times\frac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

**3** **a. Initialisation :** pour $n=0$, $\overline{z^0}=\overline{1}=1$ et $(\overline{z})^0=1$ ; et on convient de poser ici si $z=0$, $z^0=1$.
**Hérédité :** on suppose que, pour un entier $n$, $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.
$\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}=\overline{z}^n\times\overline{z}=\overline{z}^{n+1}$.

**b.** Si $n<0$, $n=-p$ avec $p>0$.
$\overline{(z^n)}=\overline{\left(\frac{1}{z^p}\right)}=\frac{1}{\overline{z^p}}=\frac{1}{\overline{z}^p}=\overline{z}^n$ avec **2** **a.** et **3** **a.**

**43** **1** $0\times z=0\times x+(0\times y)\mathrm{i}=0+0\mathrm{i}=0$.

**2** **a.** $z\times Z=0$, donc $Z=\frac{1}{z}\times z\times Z=\frac{1}{z}\times 0=0$ d'après **a.**

**b.** Le produit de deux nombres complexes est nul si, et seulement si, l'un des deux est nul.

**3** $\mathcal{S}=\{-2\,;2\,;-2\mathrm{i}\,;2\mathrm{i}\}$.

## 3 Équations du second degré à coefficients réels

**44** **1** **a.** **2** **b.** **3** **c.** **4** **b.**

**45** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai.

**46** **1** Faux. **2** Faux. **3** Faux.

**47** **1** $\Delta=-4=(2\mathrm{i})^2$ ; $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\,;-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

**2** $\Delta=-16=(4\mathrm{i})^2$ ; $\mathcal{S}=\{3+2\mathrm{i}\,;3-2\mathrm{i}\}$.

**48** **1** Pour $z\neq-1$, l'équation est équivalente à $z^2+z+1=0$ ;
$\Delta=-3$, donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

**2** $z^2=4$ ou $z^2=-4$ ; $\mathcal{S}=\{-2\,;2\,;-2\mathrm{i}\,;2\mathrm{i}\}$.

**3** Pour $z\neq-2$, on pose $Z=\frac{z-3\mathrm{i}}{z+2}$ et on résout $Z^2+6Z+13=0$ ; $\Delta=-16$, donc $Z=-3\pm2\mathrm{i}$.
On résout alors :
$$\frac{z-3\mathrm{i}}{z+2}=-3-2\mathrm{i},\ \text{puis}\ \frac{z-3\mathrm{i}}{z+2}=-3+2\mathrm{i}\,;$$
après calculs, $\mathcal{S}=\{-1{,}3+0{,}4\mathrm{i}\,;-1{,}9+0{,}8\mathrm{i}\}$.

**49** **1** $\mathcal{S}=\{(1+4\mathrm{i}\,;1-4\mathrm{i})\,;(1-4\mathrm{i}\,;1+4\mathrm{i})\}$.

**2** $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\,;\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right);\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,;\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right\}$.

**50** **1** $\Delta=0$ ; $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

**2** $\Delta=64$ ; $\mathcal{S}=\{-1\,;7\}$.

**51** **1** $P(-1-\mathrm{i})=0$.

**2** $(z+1+\mathrm{i})(z^2+az+b)=z^3+(a+1+\mathrm{i})z^2+(a+b+a\mathrm{i})z+b(1+\mathrm{i})$ ;

en identifiant avec les coefficients de $P(z)$, on obtient le système $\begin{cases}a+1+\mathrm{i}=\mathrm{i}\\a+b+a\mathrm{i}=-\mathrm{i},\\b(1+\mathrm{i})=1+\mathrm{i}\end{cases}$

ce qui équivaut à : $a=-1$ et $b=1$.

**3** $P(z)=0\Leftrightarrow z=-1-\mathrm{i}$ ou $z^2-z+1=0$ ;
$\mathcal{S}=\left\{-1-\mathrm{i}\,;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

**52** **1** $\alpha=13+6\mathrm{i}$.

**2** $a=-6$ ; $b=13$.

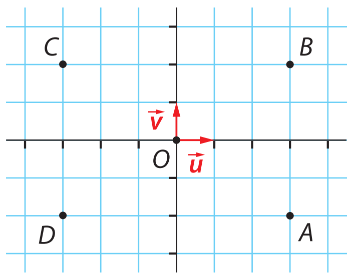
**3** $\mathcal{S}=\{\mathrm{i}\,;3+2\mathrm{i}\,;3-2\mathrm{i}\}$.

## 4 Représentation géométrique

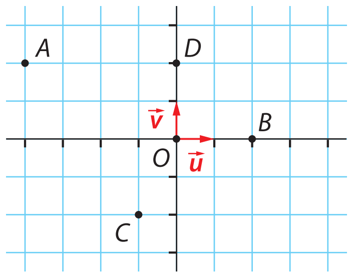
**53** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.

**54** **1** **c.** **2** **a.** **3** **c.**

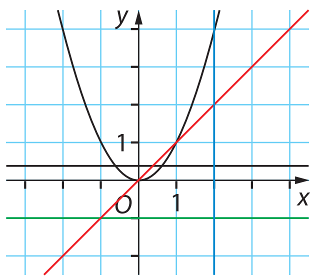
**55**




**56**




**57**




**58** **1** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$,

donc $z_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A+\mathrm{i}(y_B-y_A)$
$=x_B+\mathrm{i}y_B-(x_A+\mathrm{i}y_A)=z_B-z_A$.

**2** $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$,

donc $z_I=\frac{x_A+x_B}{2}+\mathrm{i}\frac{y_A+y_B}{2}$
$=\frac{x_A+\mathrm{i}y_A+x_B+\mathrm{i}y_B}{2}=\frac{z_A+z_B}{2}$.

**3** $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow z_G - z_C = \frac{2}{3}\left(\frac{z_A + z_B}{2} - z_C\right)$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

## 5 Module et arguments d'un nombre complexe

**59** **1** c. **2** b. et c. **3** b. et c. **4** a.

**60** **1** a. et c. **2** a. et b. **3** c.

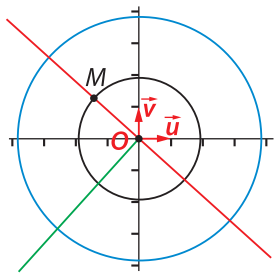
**61** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai . **4** Faux.

**62** **1** Vrai. **2** Vrai.
**3** Faux, car $M$ appartient à $[OM)$, mais pas forcément à $[OM]$.
**4** Vrai .

**63**

| $z$ | Module | Un argument |
|---|---|---|
| $z_A$ | 3 | $\pi$ |
| $z_B$ | 2 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $z_C$ | 1 | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $z_D$ | $2\sqrt{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ |

**64**




L'origine est à exclure de chaque ensemble de solutions.

**65** **1** On écrit $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels.
$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ ;
$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
**2** a. $M'$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des abscisses, donc $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$.
b. $M_1$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'origine, donc $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$.
c. $\arg(-\bar{z}) = \arg(\bar{z}) + \pi = -\arg(z) + \pi\ (2\pi)$.

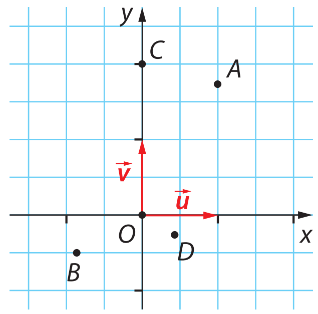
## 6 Forme trigonométrique et notation exponentielle

**66** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.

**67** **1** a. et c. **2** b. et c. **3** a., b. et c.

**68** **1** b. **2** a. **3** a. **4** c.

**69**




**70** **1** $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
**2** $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.
**3** $z_3 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

**71**

| | Algébrique | Exponentielle |
|---|---|---|
| $z_1$ | $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ | $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ |
| $z_2$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ | $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ |
| $z_3$ | $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ | $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ |
| | **Trigonométrique** | |
| $z_1$ | $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ | |
| $z_2$ | $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | |
| $z_3$ | $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ | |

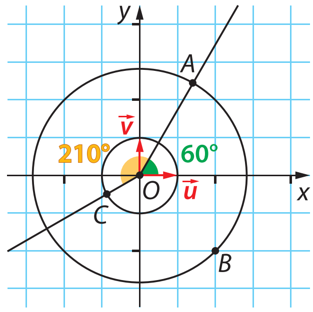
**72**

| | Algébrique | Exponentielle |
|---|---|---|
| $z_1$ | $1 - \mathrm{i}$ | $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ |
| $z_2$ | $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$ | $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ |
| $z_3$ | $3\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ | $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ |
| | **Trigonométrique** | |
| $z_1$ | $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ | |
| $z_2$ | $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ | |
| $z_3$ | $6\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ | |

**73** **1** $Z = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
**2** a. $|z_1| = 2\sqrt{2}$ ; $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ ;
$|z_2| = 2\sqrt{2}$ ; $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.
$z_1 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ; $z_2 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

b. $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$ donc $|Z| = 1$ ;
$\arg(Z) = \frac{7\pi}{12}\ (2\pi)$.
c. $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ;
$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

**3**




**4** $Z^{2012} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**74** $z_1 \approx 5e^{-2,5i}$ ; $z_2 = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ;
$z_3 \approx 4{,}8e^{-1,8i}$ ; $z_4 \approx 3e^{2,3i}$.

# Prépa Bac

## Exercices guidés

**75** **1** La proposition 1 est fausse :
$z^{100} = r^{100}e^{i\frac{100\pi}{3}}$ ; or, $\frac{100\pi}{3} = 32\pi + \frac{4\pi}{3}$,
donc $\arg z = \frac{4\pi}{3}\ (2\pi)$ et comme un argument d'un réel non nul est 0 ou $\pi$, $z$ ne peut être un réel.

**2** La proposition 2 est fausse :
$|z| = |1 - z| \Leftrightarrow OM = AM$, où $A(1)$. $(\mathscr{F})$ est la médiatrice du segment $[OA]$, perpendiculaire à l'axe des réels.

**3** La proposition 3 est vraie :
$M \in (G) \Leftrightarrow z - 1 = -2e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0\,;\pi]$
$\Rightarrow |z-1| = 2 \Rightarrow M$ appartient au cercle de centre $A(1)$ et de rayon 2.

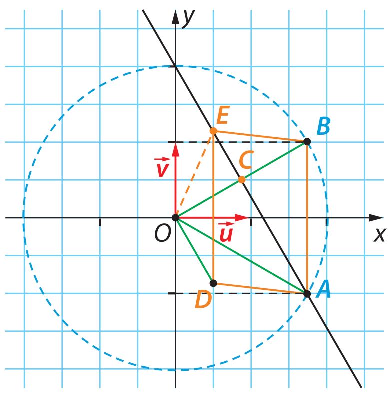
**4** La proposition 4 est fausse :
$$1 + 2i = 1 - 2(-i) = 1 - 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 1 - 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} ;$$
$-i$ n'a pas d'argument dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.

**5** La proposition 5 est vraie :
$$\Delta = 4\cos^2\frac{\pi}{7} - 4 = -4\sin^2\frac{\pi}{7} = \left(2i\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 ;$$
l'équation a deux solutions complexes conjuguées, $e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{7}}$, toutes deux de module 1.

**76** **1** $\Delta = 12 - 16 = (2i)^2$ ; $S = \{\sqrt{3} + i\,;\sqrt{3} - i\}$.

**2** **a.** $a = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $b = \bar{a} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
et $c = \frac{b}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

**b.**




**c.** $OA = |a| = 2 = |b| = OB$ et $AB = |b - a| = |2i| = 2$, donc $OAB$ est équilatéral.

**3** **b.** $d = e^{-i\frac{\pi}{2}}c = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Comme, par définition du parallélogramme, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$, on a :
$\varepsilon - d = b - a = 2i$ et $\varepsilon = d + 2i = \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}i$.

**c.** $OE = |\varepsilon| = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

$BE = |\varepsilon - b| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

**4** On a vu que $OA = BA$, $OE = BE$. Ainsi, la droite $(AE)$ est la médiatrice du segment $[BO]$ et, comme de plus $OC = BC$, puisque $C$ est le milieu du segment $[BO]$, $C$ est un point de la droite $(AE)$.

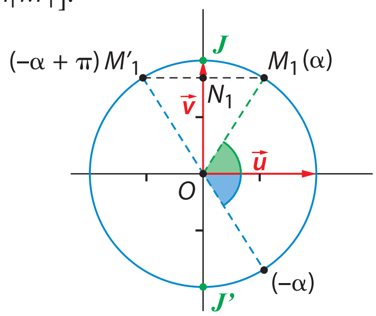
**77** **Partie A**

$Z^2 + a = 0 \Leftrightarrow Z^2 - (-a) = 0$
$\Leftrightarrow Z^2 - (i\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (Z - i\sqrt{a})(Z + i\sqrt{a}) = 0$
$\Leftrightarrow Z - i\sqrt{a} = 0$ ou $Z + i\sqrt{a} = 0$
$\Leftrightarrow Z = i\sqrt{a}$ ou $Z = -i\sqrt{a}$.
L'équation a deux solutions : $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.

**Partie B**

**1** **a.** $z' = -\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{1}{e^{i\alpha}} = -e^{-i\alpha} = e^{i(\pi-\alpha)}$.

**b.** $M'_1$ est le symétrique du point $M_1$ par rapport à l'axe $(O, \vec{v})$, puisque son affixe a même module que $z$ et un argument égal à $\pi - \arg z$. $N_1$ est ensuite le milieu du segment $[M_1 M'_1]$.




**c.** $z_N = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = \frac{1}{2}(2i\sin\alpha) = i\sin\alpha$.
Lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$, $\sin\alpha$ décrit l'intervalle $[-1\,;1]$, donc $N$ décrit le segment $[J'J]$.
On pourra faire remarquer que l'expression « $\sin\alpha$ décrit $[-1\,;1]$ » signifie aussi que toute valeur de l'intervalle $[-1\,;1]$ est l'image d'au moins un réel $\alpha$ résultat obtenu via le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction sinus.

**2** **a.** $M = N \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z = z - \frac{1}{z}$
$\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$.
Les points du plan confondus avec leur image sont $J$ et $J'$.

**b.** $(z - 2i)^2 + 3 = z^2 - 4iz - 1$.
Par suite, $2i = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 4i = z - \frac{1}{z}$
$\underset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} z^2 - 4iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)^2 + 3 = 0$.
$\Leftrightarrow z - 2i = i\sqrt{3}$ ou $z - 2i = -i\sqrt{3}$.

Les points $M$ cherchés sont les points d'affixe : $(2+\sqrt{3})\mathrm{i}$ et $(2-\sqrt{3})\mathrm{i}$.

**3 a.** $z_N = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i}$

$= \dfrac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} + \dfrac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}\mathrm{i}.$

Comme les nombres apparaissant dans les parenthèses sont des réels puisque $x$ et $y$ le sont aussi, et, d'après l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe, on obtient :

$\mathrm{Re}(z_N) = \dfrac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}$ et $\mathrm{Im}(z_N) = \dfrac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}$.

**b.** $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow z_N$ est réel

$\Leftrightarrow \dfrac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et $x^2+y^2 \neq 0$.

$\mathscr{E}$ est l'axe des réels, privé du point $O$.

**c.** $M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow z_N \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0$ ou $x^2+y^2 = 1)$ et $(x^2+y^2 \neq 0)$.

$\mathscr{F}$ est la réunion du cercle $\Gamma$ et de l'axe des imaginaires purs, privé du point $O$.

## Exercices d'entraînement

**78** **1 a.** $P(-1) = -1-3-3+7 = 0$.

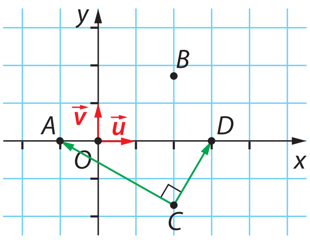
**b.** $P(z) = (z+1)(z^2-4z+7)$.

**c.** $P(z) = 0 \Leftrightarrow z+1 = 0$ et $z^2-4z+7 = 0$.

L'équation $z^2-4z+7=0$ a pour discriminant $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$, donc deux solutions complexes conjuguées $2+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ et $2-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

$S = \{-1 ; 2+\sqrt{3}\,\mathrm{i} ; 2-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\}$.

**2 a.**




**b.** $AB = |2+\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1| = \sqrt{3^2+3} = 2\sqrt{3}$,

$BC = |-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}| = 2\sqrt{3}$ et $AC = |3-\mathrm{i}\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.

$ABC$ est donc équilatéral.

**c.** $\overrightarrow{CA}(-3+\mathrm{i}\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = -3+3 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et, par suite, le triangle $ADC$ est rectangle en $C$.

**79** **1** On pose $z = \mathrm{i}y$ avec $y$ réel. $\mathrm{i}y$ est solution de $(E)$ équivaut à

$-\mathrm{i}y^3 + (-8+\mathrm{i})(-y^2) + (17-8\mathrm{i})(\mathrm{i}y) + 17\mathrm{i} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2+8y = 0 \\ -y^3-y^2+17y+17 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 17 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$

L'unique solution imaginaire pure de (E) est $-\mathrm{i}$.

**2** En factorisant en ligne, on trouve aisément : $(z+\mathrm{i})(z^2-8z+17)$ : $a = -8$ et $b = 17$.

**3** $(E) \Leftrightarrow z = -\mathrm{i}$ ou $z^2-8z+17 = 0$.

L'équation $z^2-8z+17=0$ a pour discriminant $\Delta = 64-68 = (2\mathrm{i})^2$, donc deux solutions complexes conjuguées $4+\mathrm{i}$ et $4-\mathrm{i}$.

$S_{(E)} = \{-\mathrm{i} ; 4+\mathrm{i} ; 4-\mathrm{i}\}$.

**80** On pose $z = \mathrm{i}y$ avec $y$ réel. $\mathrm{i}y$ est solution de $(E)$ équivaut à $y^4 + 8\mathrm{i}y^3 - 26y^2 - 72(\mathrm{i}y) + 153 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4-26y^2+153 = 0 \\ 8\mathrm{i}y(y^2-9) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 153 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -3 \\ 81-234+153 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = -3$ ou $y = 3$.

L'équation a deux solutions imaginaires pures $3\mathrm{i}$ et $-3\mathrm{i}$.

En factorisant, on obtient l'équation équivalente :

$(z^2+9)(z^2-8z+17) = 0$.

L'équation équivaut à $z = -3\mathrm{i}$ ou $z = 3\mathrm{i}$ ou $z^2-8z+17 = 0$.

Or, l'équation $z^2-8z+17 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 64-68 = (2\mathrm{i})^2$, donc deux solutions complexes conjuguées $4+\mathrm{i}$ et $4-\mathrm{i}$.

$S = \{-3\mathrm{i} ; 3\mathrm{i} ; 4+\mathrm{i} ; 4-\mathrm{i}\}$.

Soient $A(-3\mathrm{i})$, $B(3\mathrm{i})$, $C(4-\mathrm{i})$ et $D(4+\mathrm{i})$.

La figure permet de conjecturer que l'affixe du centre $K$ est 1. Comme $K$ appartient à la médiatrice des segments $[AB]$ et $[CD]$, il ne reste plus qu'à calculer $KA$ et $KC$ qui valent tous les deux $\sqrt{10}$.

Les quatre points appartiennent au cercle de centre $K(1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

**81** **1** $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,

d'où $(1+\mathrm{i})^6 = \sqrt{2}^{\,6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{4}} = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -8\mathrm{i}$.

On peut aussi écrire : $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ et $(2\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}^3 = -8\mathrm{i}$.

**2 a.** $[(1+\mathrm{i})^3]^2 = -8\mathrm{i}$, donc $(1+\mathrm{i})^3$ est solution de (E).

**b.** $(1+\mathrm{i})^3$ et son opposé $-(1+\mathrm{i})^3$ ont le même carré et sont donc solution de (E).

Comme $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$, l'ensemble des solutions de (E) est $\{-2+2\mathrm{i} ; 2-2\mathrm{i}\}$.

**3 a.** On a $t = (1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ solution de $(E')$.

**b.** $(jt)^3 = j^3t^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times 3}t^3 = 1\times(-8\mathrm{i}) = -8\mathrm{i}$,

de même $(j^2t)^3 = j^6t^3 = t^3 = -8\mathrm{i}$.

**4 a.** $A\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)$, $B\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{6}\right)}\right)$ et $C\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{11\pi}{6}\right)}\right)$.

**b.** $AB = |jt-t| = 2\sqrt{3}$ ; $AC = |j^2t-t| = 2\sqrt{3}$ ; $BC = |j^2t-jt| = 2\sqrt{3}$, donc $ABC$ est équilatéral.

On peut aussi faire remarquer que l'on passe de $A$ à $B$, de $B$ à $C$, puis de $C$ à $A$ en « tournant d'un angle » de $\dfrac{2\pi}{3}$ et que de ce fait $AB = BC = CA$.

**82** **1 a.**

$z_{A'} = (1-\mathrm{i})^2 - 4(1-\mathrm{i}) = 1-2\mathrm{i}-1-4+4\mathrm{i} = -4+2\mathrm{i}$

et $z_{B'} = (3+\mathrm{i})^2 - 4(3+\mathrm{i}) = -4+2\mathrm{i}$.

**b.** Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points ayant la même image par $f$.

Alors $M'_1 = M'_2 \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2$
$\Leftrightarrow z_1^2 - z_2^2 - 4(z_1 - z_2) = 0$
$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0$
$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0$
$M'_1 = M'_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$
ou $z_1 + z_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$ ou $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 2$
$\Leftrightarrow M_1 = M_2$ ou le segment $[M_1M_2]$ a pour milieu le point $K$ d'affixe 2. Ainsi, $M_1$ et $M_2$ sont :

– soit confondus,

– soit symétriques l'un de l'autre dans la symétrie de centre $K(2)$.

On peut constater que les points $A$ et $B$ qui ont la même image d'affixe $(-4+2\mathrm{i})$ sont bien symétriques par rapport à $K$.

**2 a.** $OMIM'$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'I}$
$\Leftrightarrow z = -3 - z^2 + 4z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$.

**b.** L'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$ a pour discriminant $\delta = -3 = (\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$ et donc deux solutions complexes conjuguées : $\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**3 a.** $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

**b.** $z' + 4 = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$, comme $r^2$ est un réel positif (puisque $r$ est réel), cette écriture est une forme exponentielle de $z' + 4$ et on en déduit que : $\arg(z'+4) = 2\alpha \ (2\pi)$ et $|z'+4| = r^2$.

**4 a.** Soit $E(-4+3\mathrm{i})$. On a $z_E + 4 = 3\mathrm{i} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

D'après le **b.** $E$ est l'image du point $M$ d'affixe $z$ si, et seulement si : $z - 2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r^2 = 3$ et $2\alpha = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$.

Ce qui équivaut à : $z = 2 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r = \sqrt{3}$ (car $r > 0$) et $\alpha = \frac{\pi}{4} \ (\pi)$.

On trouve ainsi les points $F_1\left(2 + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)$ et $F_2\left(2 + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}\right)$.

**b.** Pour obtenir la forme algébrique, on passe par la forme trigonométrique :

$$z_1 = 2 + \sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

ou
$$z_2 = 2 + \sqrt{3}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right],$$

et enfin :

$$z_1 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } z_2 = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

On obtient bien deux points $F_1$ et $F_2$ ayant pour image $E$, symétriques par rapport au point $K(2)$ (voir **1 b.**).

**83** **1** Faux. Un contre exemple : avec $z = \mathrm{i}$ on a $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(-1) = 0$ et $-(\mathrm{Im}(\mathrm{i}))^2 = -1$.

Plus généralement, en posant $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels, on a $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, donc $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$, alors que $-[\mathrm{Im}(z)]^2 = -y^2$.

**2** Vrai. $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z \times \overline{z}} \times z$, donc $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{z \times \overline{z}}\overrightarrow{OM}$ ;

comme $\frac{1}{z \times \overline{z}} \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires, donc $O$, $M$ et $N$ sont alignés.

**3** Vrai. $|2 + \mathrm{i}z| = |2\mathrm{i} - \overline{z}| \Leftrightarrow |\mathrm{i}(-2\mathrm{i} + z)| = |-2\mathrm{i} - z|$ en ayant remplacé le module de $2\mathrm{i} - \overline{z}$ par celui de son conjugué.

Comme $|\mathrm{i}| = 1$ et deux opposés ont même module, $|2 + \mathrm{i}z| = |2\mathrm{i} - \overline{z}| \Leftrightarrow |z - 2\mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}| \Leftrightarrow$ le point $M$ d'affixe $z$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, où $A(2\mathrm{i})$ et $B(-2\mathrm{i})$ ; or, cette médiatrice est l'axe des réels. L'affixe $z$ est réelle, sa partie imaginaire est nulle.

*Remarque* : on peut aussi utiliser la forme algébrique ; en posant $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels, on a :
$|2 + \mathrm{i}z| = |2\mathrm{i} - \overline{z}| \Leftrightarrow |2 - y + x\mathrm{i}| = |-x + \mathrm{i}(2+y)|$
$\Leftrightarrow (2-y)^2 + x^2 = (-x)^2 + (2+y)^2 \Leftrightarrow 8y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

**4** Faux. Contre exemple : avec $z = 2$ on a $|1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ et $|1 - \mathrm{i} \times \overline{2}| = |1 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ les deux complexes ont le même module et pourtant la partie réelle de $z$ n'est pas nulle.

*Remarque* : comme $\overline{1 - \mathrm{i}\overline{z}} = 1 + \mathrm{i}z$ et deux conjugués ont même module, l'égalité $|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}\overline{z}|$ équivaut à $|1 + \mathrm{i}z| = |1 + \mathrm{i}z|$…ce qui est vrai pour tout $z$.

**5** Faux. Le complexe $z$ de module 1 s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et l'égalité sur les arguments s'écrit : $2\theta = -\theta \ (2\pi)$, soit :

$$3\theta = 0 \ (2\pi) \Leftrightarrow \theta = 0 \ \left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

on trouve trois solutions :

$$\mathrm{e}^0 = 1 \ ; \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \ ; \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

**84** **1 a.** $P(2) = 0$.

**b.** $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$, donc $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$.

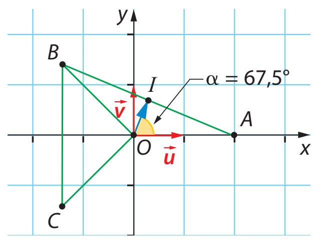
**2** $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} = z_1$ ou $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i} = z_2$.

Donc $S = \{2 \, ; -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} \, ; -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}\}$ et on a bien $z_1 + z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1) = -2\sqrt{2}$.

$|z_1| = 2 = |z_2|$ ;

$\arg z_1 = \frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$ ; $\arg z_2 = -\frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$.

**3 a.**




**b.** $OA = |z_1| = 2 = OB$

et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg z_1 = \frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$,

donc $OAB$ est isocèle direct.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8} \ (\pi)$ et comme $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOI} < \frac{\pi}{2}$, on obtient $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8} \ (2\pi)$.

**c.** $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ ;

$$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

**d.** $z_I = |z_I|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}} = |z_I|\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

Par suite, $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\mathrm{Re}\,z_I}{|z_I|} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

et $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\mathrm{Im}\,z_I}{|z_I|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

## Problèmes

**85** **Partie A**

**1** Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, alors :

$$z\overline{z'} = (x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = (xx' + yy') + \mathrm{i}(x'y - xy').$$

$z\overline{z'} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\overline{z'}) = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

$\Leftrightarrow \vec{t} \cdot \vec{t'} = 0 \Leftrightarrow \vec{t}$ et $\vec{t'}$ sont orthogonaux.

**2** $z \times \overline{\mathrm{i}z} = z \times (-\mathrm{i})\overline{z} = -\mathrm{i}(x^2 + y^2)$ et comme $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, $z \times \overline{\mathrm{i}z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et, d'après le **1**, les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{ON'}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que le triangle $ONN'$ est rectangle en $O$. Comme de plus $ON' = |\mathrm{i}z| = |z| = ON$ le triangle $ONN'$ est isocèle rectangle.

**Partie B**

**1 a.** $\alpha = \dfrac{1 + 3\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = 2 + \mathrm{i}$.

**b.** $\mathrm{i}\alpha^2 = \mathrm{i}(2 + \mathrm{i})^2 = \mathrm{i}(3 + 4\mathrm{i}) = -4 + 3\mathrm{i}$.

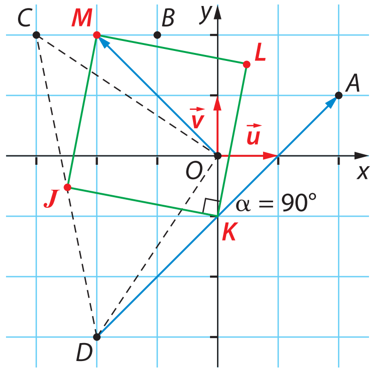
**2 a.** $(z - \alpha)(z - \mathrm{i}\alpha) = z^2 - \alpha z(1 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}\alpha^2$

$$= z^2 - (1 + 3\mathrm{i})z - 4 + 3\mathrm{i} = f(z).$$

**b.** $S_{f(z)=0} = \{\alpha\,;\mathrm{i}\alpha\}$.

**Partie C**

**1**




Comme $b = -1 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}(2 + \mathrm{i}) = \mathrm{i}a$, d'après le **A.**, le triangle $OAB$ est isocèle rectangle direct en $O$.

**2** $d = \mathrm{i}c = \mathrm{i}(-3 + 2\mathrm{i}) = -2 - 3\mathrm{i}$.

**3** $z_M = \dfrac{b + c}{2} = -2 + 2\mathrm{i}$ et par suite l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ est $-2 + 2\mathrm{i}$, celle de $\overrightarrow{DA}$ est $a - d = 4 + 4\mathrm{i}$.

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{DA} = -8 + 8 = 0$ ; $OM = |-2 + 2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$ et $DA = |4 + 4\mathrm{i}| = 4\sqrt{2} = 2OM$.

**4 a.** $J\left(-\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$, $K(-\mathrm{i})$, $L\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)$, $M(-2 + 2\mathrm{i})$, donc $\overrightarrow{JK}\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ et $\overrightarrow{ML}\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ : $JKLM$ est un parallélogramme.

**b.** De plus, $\overrightarrow{JM}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}\right)$, c'est-à-dire $z_{\overrightarrow{JM}} = \mathrm{i}z_{\overrightarrow{JK}}$ ; par suite, d'après le **A.**, $KJM$ est un triangle isocèle rectangle direct en $J$ et donc $JKLM$ est un carré direct.

**86** **1** $\Delta = 36 - 72 = -36 = (6\mathrm{i})^2$

$S = \{-3 + 3\mathrm{i}\,; -3 - 3\mathrm{i}\} = \left\{3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\,; 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right\}$.

**2 a.** Voir la figure au **3 c.**

**b.** $b = -(3 - 3\mathrm{i}) = -3 + 3\mathrm{i} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ ;

$(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + \dfrac{\pi}{2}$ et $OC = OB$ ;

par suite, $c = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -3 - 3\mathrm{i}$.

**c.** $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow d - a = c - b \Leftrightarrow d = a + c - b \Leftrightarrow d = 3 - 9\mathrm{i}$.

**3 a.** $\|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\| = \|2\overrightarrow{DB}\|$, car $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$, donc $\|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\| = 2DB$ et $D \in \mathscr{E}$.

**b.** $Z_{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}} = a + b + c - 3z = -3 - 3\mathrm{i} - 3z$

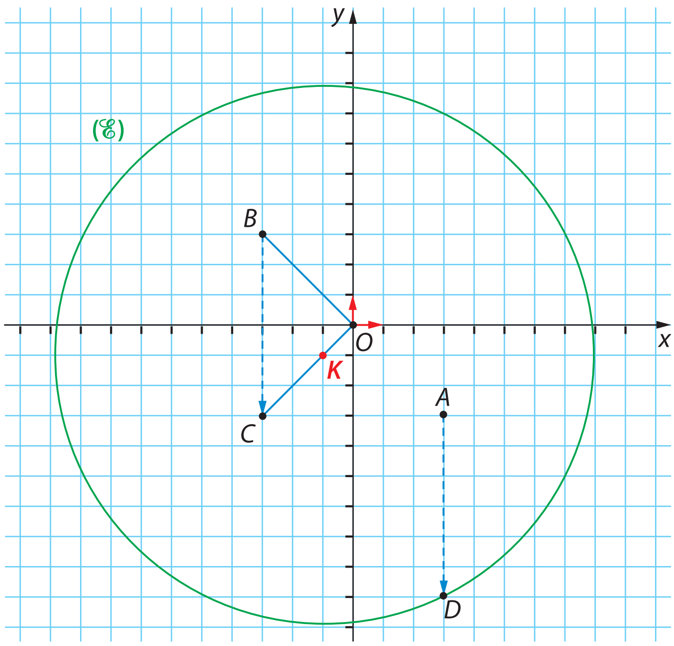
$$= -3(1 + \mathrm{i} + z).$$

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow |-3(1 + \mathrm{i} + z)| = 2|d - b|$

$\Leftrightarrow |z + 1 + \mathrm{i}| = \dfrac{2}{3}|6 - 12\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z + 1 + \mathrm{i}| = 4\sqrt{5}$.

**c.** $(\mathscr{E})$ est le cercle de centre le point $K$ d'affixe $(-1 - \mathrm{i})$ et de rayon $4\sqrt{5}$.

On remarque que $K$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.



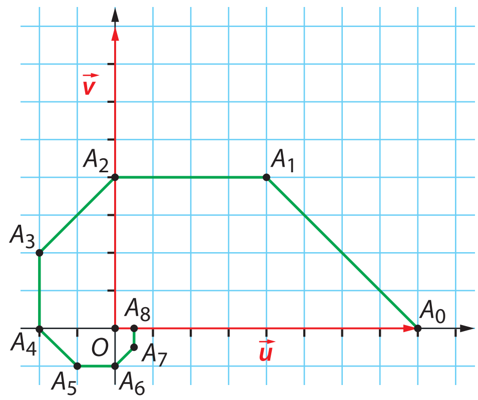

**87** **1 a.** $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

**b.** $z_1 = a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ; $z_2 = a^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ;

$z_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$ ; $z_4 = -\dfrac{1}{4}$ ;

$z_5 = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\mathrm{i}$ ; $z_6 = -\dfrac{1}{8}\mathrm{i}$.

**c.**




**2 a.** $z_1 - z_0 = r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,

donc $r_0 = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$z_{n+1} - z_n = az_n - az_{n-1} = a(z_n - z_{n-1}).$$

**b.** $|z_{n+1} - z_n| = |a| \times |z_n - z_{n-1}|$,

c'est-à-dire $r_n = |a| r_{n-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}$.

La suite $(r_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $r_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc pour tout entier $n$ on a :

$$r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

**c.** $r_n$ est la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$.

**d.** $$L_n = \sum_0^n r_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = (1 + \sqrt{2})\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 1 + \sqrt{2}$,

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

avec $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in ]-1;1[$.

**3 a.** L'algorithme calcule la longueur de la ligne polygonale $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ telle que la longueur du segment terminal $A_{n-1}A_n$ est supérieure au pas $h$ choisi, mais celle du segment suivant $A_nA_{n+1}$, elle, est inférieure ou égale à $h$.

**ALGO**

```
Variables :
    n, p : entiers
    h, r, L, t : réels
Début
    Entrer(p)
    h ← 10^(−p) ;
    r ← √2/2 ;
    L ← 0 ;
    n ← 0 ;
TantQue r^(n+1) > h Faire
        L ← L + r^(n+1) ;
        n ← n + 1 ;
FinTantQue ;
    t ← partie entière(n/8) ;
    Afficher( la longueur parcourue
        jusqu'au point A_n est L)
    Afficher( on a fait t tours autour
        du point O)
Fin
```

Et avec *Scilab* :

```
p=input(«choisir p pour une précision à 1/10^p:»)
h=10^(-p)
r=sqrt(2)/2
L=0;
n=0;
while r^(n+1)>h
L=L+r^(n+1);
n=n+1;
end
t=floor(n/8);
disp(L,«la longueur parcourue est»,n,«jusqu au point A»)
disp(«tours autour de O»,t,«on a fait»)
```

**b.** Lorsque l'algorithme s'arrête, on n'est pas sûr qu'il reste moins de $h$ cm à parcourir sur la ligne polygonale, car la somme des longueurs de plusieurs segments peut encore dépasser $h$.

*Exemple :* avec une précision de $h = 10^{-1} = 0{,}1$ on obtient :

```
choisir p pour une précision à 1/10^p:1
jusqu'au point A
  6.
la longueur parcourue est
  2.1124369
on a fait
  0.
tours autour de O
```

Et on constate que la longueur restant à parcourir sur la ligne polygonale est de $1 + \sqrt{2} - 2{,}1124369 \approx 0{,}30$.

**c.** On modifie l'algorithme pour que, lorsqu'il s'arrête, la longueur parcourue soit proche à moins de $h$ de la longueur totale :

```
p=input(«choisir p pour une précision à 1/10^p:»)
h=10^(-p)
r=sqrt(2)/2;
s=1+2*r;//il s'agit de la valeur de la limite de longueur L_n trouvée à la question 2.d//
L=0;
n=0;
while (s-L)>h
L=(1+L)*r;// on se persuadera de la véracité de cette relation, mais on peut aussi mettre L+r^(n+1)//
n=n+1;
end
t=floor(n/8);
disp(L,«la longueur parcourue est»,n,«jusqu au point A»)
disp(«tours autour de O»,t,«on a fait»)
disp(s-L,«le reste de la ligne polygonale mesure»)
```

**d.** On lance le programme dans la console en rentrant « 6 » pour $p$, on obtient :

```
choisir p pour une précision à 1/10^p:6
jusqu'au point A
  43.
la longueur parcourue est
  2.4142127
on a fait
  5.
tours autour de O
le reste de la ligne polygonale mesure
  0.0000008
```

Il est donc nécessaire de faire 5 tours et d'aller jusqu'au point $A_{43}$ pour avoir une précision $h = 10^{-6}$ sur la longueur de la ligne.

On voit bien que cela change par rapport au 1er algorithme : en lui demandant d'arrêter dès qu'un premier segment a une longueur inférieure à $10^{-6}$, on obtenait :

```
choisir p pour une précision à 1/10 ^ p:6
jusqu'au point A
  39.
la longueur parcourue est
  2.4142103
on a fait
  4.
tours autour de O
```

Soit une longueur de la ligne qui était à $3 \times 10^{-6}$ cm environ de la longueur totale.

**88** **1 c.** $2(\overline{3+\mathrm{i}}) + 3 + \mathrm{i} = 6 - 2\mathrm{i} + 3 + \mathrm{i} = 9 - \mathrm{i}$.

**2 a.** $|\mathrm{i}\bar{z} - 1| = |\mathrm{i}(\bar{z} + \mathrm{i})| = |\mathrm{i}| \times |\bar{z} + \mathrm{i}| = |\overline{z+\mathrm{i}}|$
$= |z - \mathrm{i}|$.

**3 b.** $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{z} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \times \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)}$.

**4 c.** $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^n \in ]0\,;+\infty[$ et $n \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \arg(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^n = 0 \ (2\pi)$ et $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$ et $n\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 6k,\ k \in \mathbb{N}$

**5 c.** $|z - 1| = |\bar{z} + \mathrm{i}| \Leftrightarrow |z - 1| = |z - \mathrm{i}| \Leftrightarrow AM = BM$.

**6 c.** $|z - (1 - \mathrm{i})| = |\sqrt{5} - 2\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z - (1 - \mathrm{i})| = 3$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $\alpha$ tel que :
$z - (1 - \mathrm{i}) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \Leftrightarrow z = 1 - \mathrm{i} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Il s'agit du cercle de centre $K(1 - \mathrm{i})$ et de rayon 3.

**7 b.** $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) - \dfrac{\pi}{2}$

$= -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{6} \ (2\pi)$

et $OB = OA$, d'où $b = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

**8 c.** L'équation équivaut à : $z \neq 3$ et $z^2 - 4z + 8 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -16 = (4\mathrm{i})^2$.
Elle a pour solutions $2 + 2\mathrm{i}$ et $2 - 2\mathrm{i}$.

**89** **1 a.** et **c.** **2 a.** **3 a.** et **c.**

**90** **1** $D(-\mathrm{i})$, car $OD = OA$
et $\arg z_D (\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$, donc $C(1 - \mathrm{i})$.

**2 a.** $OF = OB$
et $\arg z_F = (\vec{u}, \overrightarrow{OF}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + \dfrac{\pi}{2} = \beta + \dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$,

donc $f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}$.

**b.** $f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \times \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = b\mathrm{i}$.

**c.** $\varepsilon = f + b = (1 + \mathrm{i})b$.

**3** $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$, donc $g = \mathrm{i}b - \mathrm{i} = \mathrm{i}(b - 1)$.

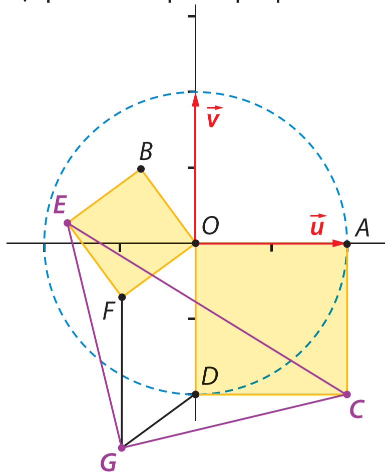
**4 a.** $b = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$.

**b.** $Z_{\overrightarrow{GE}} = \varepsilon - g = b + \mathrm{i}$ ;
$Z_{\overrightarrow{GC}} = c - g = 1 - \mathrm{i}b = 1 + \sin\beta - \mathrm{i}\cos\beta$.

$\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}\cos\beta \\ 1 + \sin\beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}1 + \sin\beta \\ -\cos\beta\end{pmatrix}$.

**c.** $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$ et $GE^2 = \cos^2\beta + (1 + \sin\beta)^2 = GC^2$ :
le triangle $GCE$ est isocèle rectangle en $G$.

**5** Oui, sous Geogebra il suffit de faire varier le curseur $r$ et le curseur $\beta$ pour voir que la propriété demeure.




Les calculs à conduire, semblables à ceux des questions précédentes, montrent que :

$$\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}r\cos\beta \\ 1 + r\sin\beta\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}1 + r\sin\beta \\ -r\cos\beta\end{pmatrix}, \text{ où } r = |b|.$$

**91** **Partie A**

**1** $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$,

$b = -\bar{a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $c = 3\mathrm{i} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

**2** Voir la figure complète au **B. 3**.

**3** $AB = |b - a| = |-\bar{a} - a| = |\bar{a} + a| = \sqrt{3}$,

$AC = |c - a| = \left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{3}$

et $BC = |c - b| = |c + \bar{a}| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{3}$.

Par suite, $AB = AC = BC = \sqrt{3}$ : le triangle $ABC$ est équilatéral.

**Partie B**

**1 a.** $a' = \dfrac{1}{3}a^2 = \dfrac{1}{3} \times 3 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

$b' = \dfrac{1}{3} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ et $c' = \dfrac{1}{3} \times 9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

**b.** $(\vec{u}\,; \overrightarrow{OA}) = \arg a = \dfrac{\pi}{3} \ (2\pi)$

et $(\vec{u}\,; \overrightarrow{OB'}) = \arg b' = \dfrac{4\pi}{3} \ (2\pi)$, donc par différence,

$(\overrightarrow{OA}\,; \overrightarrow{OB'}) = \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \pi \ (2\pi)$ : les trois points $O$, $A$ et $B'$ sont donc alignés.

$(\vec{u}\,; \overrightarrow{OB'}) = \arg b = \dfrac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

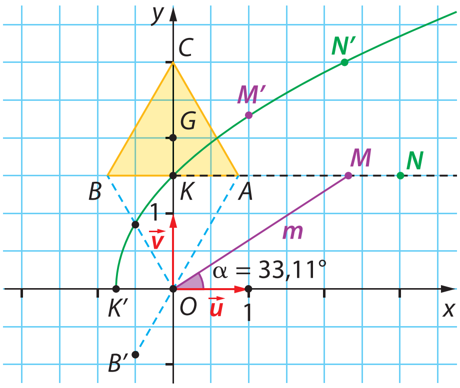
et $(\vec{u}\,; \overrightarrow{OA'}) = \arg a' = \dfrac{2\pi}{3} \ (2\pi)$, donc par différence,

$(\overrightarrow{OB}\,; \overrightarrow{OA'}) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = 0 \ (2\pi)$ : les trois points $O$, $A'$ et $B$ sont donc alignés.

**2 a.** $K$ a pour affixe $\dfrac{a + b}{2} = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ et $K'$ a pour affixe $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)^2 = -\dfrac{3}{4}$.

**b.** Les points de l'axe $(O, \vec{v})$ ont pour affixe $\mathrm{i}y$, où $y$ est un réel quelconque. Leurs images ont donc pour affixe $-\dfrac{1}{3}y^2$ : l'ensemble des images est la demi-droite représentant les réels négatifs, soit $[OK')$.

**3 a.** Les deux méthodes suggérées sont réalisées, l'une avec $M$, l'autre avec $N$ $\left(N' = 1/3 * N^2\right)$ :




**b.** L'ensemble $(\mathscr{L})$ semble être une demi-parabole d'axe $(O, \vec{u})$ et de sommet $K'$.

**c.** L'affixe $z'$ du point $M'$ vérifie :

$$z' = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) + x\mathrm{i} = x' + \mathrm{i}y' ;$$

par suite, les coordonnées de $M'$ vérifient :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}\left(x^2 - \dfrac{9}{4}\right) \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}y'^2 - \dfrac{3}{2} \\ x = y \end{cases} ;$$

le point $M'$ est donc bien un point de la courbe d'équation : $\qquad x' = \dfrac{1}{3}y'^2 - \dfrac{3}{2}$.

Comme $M$ décrit la demi droite $[KA)$, on a $x \geqslant 0$ ; par suite, $y' \geqslant 0$ ; $(\mathscr{L})$ est donc la demi-parabole d'équation :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}y'^2 - \dfrac{3}{2} \\ y' \geqslant 0 \end{cases}.$$

**92** **1 a.** $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

**b.** $S = \left\{-2 ; 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} ; 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

**c.** $S = \left\{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} ; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} ; 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right\}$.

**2** $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right) = \arg z_B - \arg z_A = -\dfrac{\pi}{3} - \pi = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$\left(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{OC}\right) - \left(\vec{u} ; \overrightarrow{OB}\right)$

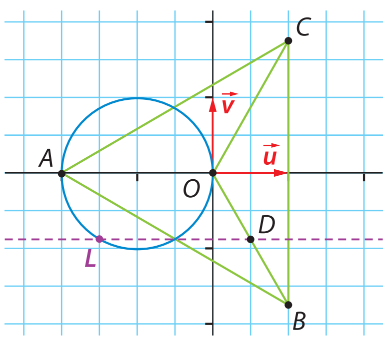
$\qquad = \arg z_C - \arg z_B = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$.

On peut calculer $AB$, $BC$ et $CA$ au moyen des modules, mais on peut aussi faire remarquer que l'on passe de $A$ à $B$, de $B$ à $C$, puis de $C$ à $A$ en « tournant d'un angle » de $\dfrac{2\pi}{3}$ et que de ce fait $AB = BC = CA$, et $ABC$ est équilatéral.

**3 a.** $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$, donc $\ell = d + a = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

**b.** Comme $\overrightarrow{OL}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{OL} = 0$.

**c.**




Le triangle $OLA$, rectangle en $L$, d'hypoténuse $[AO]$ a pour cercle circonscrit le cercle de diamètre $[AO]$ :

$L$ appartient donc à ce cercle.

$L$ est le point d'intersection du cercle et de la parallèle à l'axe réel, passant par $D$, autre que celui situé sur $[AB]$.

**93** **1** $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = t\mathrm{i}$ avec $t$ réel

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = t\vec{v} \Leftrightarrow M = 0$ ou $\left(\vec{v} ; \overrightarrow{OM}\right) = 0 \quad (\pi)$

comme $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow M = 0$ ou $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**2 a.** $\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\right)^3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, donc $A$ appartient à $\mathscr{E}$.

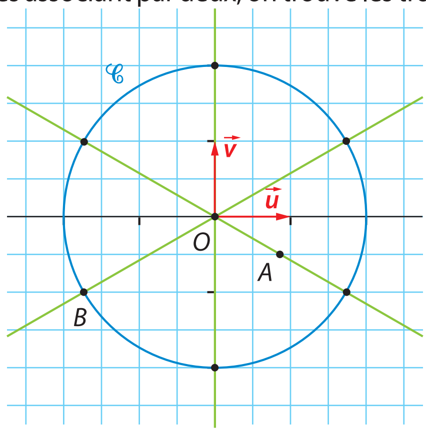
**b.** $\arg b = \arg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\dfrac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$,

donc $\arg\left(b^3\right) = -\dfrac{5\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$, donc $B \in \mathscr{E}$.

**c.** $z^3 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \overset{\text{puisque } z \neq 0}{\Leftrightarrow} 3\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

**d.** Cela donne six valeurs pour $\alpha$ : $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{11\pi}{6}$, soit six demi-droites faisant un angle $\alpha$ avec $\vec{u}$, et en les associant par deux, on trouve les trois droites.




**3 a.** On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r > 0$,

alors $(\mathscr{F}) \Leftrightarrow z^6 = -64 \Rightarrow r^6 = 64 \Rightarrow r = 2$.

**b.** $z^6 = -64 \Leftrightarrow r^6\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\alpha} = 64\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 64 \\ 6\alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Les solutions sont représentées par les points communs au cercle de centre $O$ et de rayon 2 et à l'ensemble $\mathscr{E}$ de la question **2**. On trouve six points d'affixes :

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} ; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} ; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} ; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} ; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} ; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}.$$

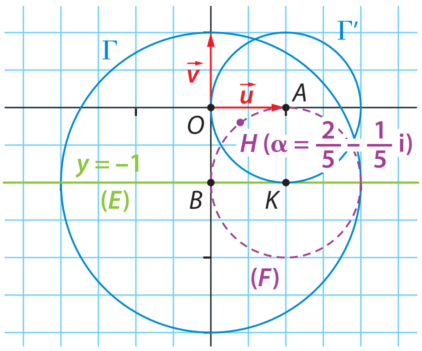
**94** **1** $z' = \dfrac{(x-2) + (y+1)\mathrm{i}}{x + (y+1)\mathrm{i}}$

$$= \frac{x(x-2) + (y+1)^{23} + \mathrm{i}\left[x(y+1) - (x-2)(y+1)\right]}{x^2 + (y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1}{x^2 + (y+1)^2} + \frac{2(y+1)\mathrm{i}}{x^2 + (y+1)}.$$

$$\mathrm{Re}\, z' = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1}{x^2 + (y+1)^2} ; \mathrm{Im}\, z' = \frac{2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}.$$

**2** **a.** $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z' = 0$
$\Leftrightarrow y + 1 = 0$ et $x^2 + (y+1)^2 \neq 0$
$\Leftrightarrow y = -1$ et $(x\,;y) \neq (0\,;-1)$.
L'ensemble $\mathscr{E}$ est la droite d'équation $y = -1$, privée du point $B(0\,;-1)$.
**b.** $M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z' = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ et $x^2 + (y+1)^2 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ et $(x\,;y) \neq (0\,;-1)$.
L'ensemble $\mathscr{F}$ est le cercle de centre $K(1-\mathrm{i})$, de rayon 1, privé du point $B(0\,;-1)$.
**c.**




**3** L'équation équivaut à :
$z - 2 + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}(z+\mathrm{i}) \Leftrightarrow z(1-2\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow z = -\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.
Le point d'affixe $\alpha = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ est tel que $\alpha' = 2\mathrm{i}$, qui est imaginaire pur, donc ce point appartient à $\mathscr{F}$.
**4** **a.** $z = -\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0\,;2\pi] \Leftrightarrow z + \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,
$\theta \in [0\,;2\pi] \Leftrightarrow |z + \mathrm{i}| = 2 \Leftrightarrow |z - b| = 2$.
$\Leftrightarrow$ $M$ est un point du cercle $\Gamma$ de centre $B(-\mathrm{i})$ de rayon 2.
**b.** $z' - 1 = -\dfrac{2}{z+\mathrm{i}} = -\dfrac{2}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.
**c.** $|z' - 1| = 1$.
**d.** $M \in \Gamma \Leftrightarrow z = -1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Rightarrow |z' - 1| = 1$
$\Rightarrow |z' - a| = 1 \Rightarrow M' \in \Gamma'$ où $\Gamma'$ est le cercle de centre $A$ et de rayon 1.

**95** **Partie A**

**1** **a.** En posant $x = u + v$ l'équation (1) devient :
$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 3) = 14.$$
**b.** Il suffit de prendre $uv = 1$ pour que l'équation s'écrive $u^3 + v^3 = 14$, et par suite, $u^3v^3 = 1$.
**2** **a.** $U$ et $V$ sont les solutions de l'équation $(X-U)(X-V) = 0$, soit $X^2 - (U+V)X + UV = 0$, soit encore $X^2 - 14X + 1 = 0$.
**b.** On obtient $\Delta = 192$ et $S = \{7 + 4\sqrt{3}\,;7 - 4\sqrt{3}\}$.
**3** **a.** En prenant $U = 7 + 4\sqrt{3}$ et $V = 7 - 4\sqrt{3}$, on obtient $u = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$ et $v = \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}}$.
Et on a bien $uv = 1$, par suite :
$$u + v = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}}$$
est solution de l'équation (1).
**b.** La dérivée, $x \longmapsto 3x^2 - 3$ s'annule en $-1$ et 1, en changeant de signe, ce qui donne deux extremums relatifs : $-12$ et $-16$. Par suite, pour tout réel $x \in ]-\infty\,;1]$, $x^3 - 3x - 14 \leqslant -12 < 0$ et sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ la fonction est strictement croissante et ne peut donc s'annuler qu'une fois.

**Partie B**

**1** « Des choses » renvoie au nombre « 3 », coefficient de $x$ pour dire « 3 fois un nombre inconnu ». La chose principale désigne « le nombre inconnu », celui que nous notons « $x$ ». Le tiers cubé des choses est le nombre que nous avons noté $(uv)^3$ et qui vaut ici $\left(\dfrac{3}{3}\right)^3 = 1$.
**2** On a alors trouvé (voir **2**) deux nombres $U$ et $V$ dont la somme était le nombre donné : 14 et dont le produit valait le tiers cubé des choses, c'est-à-dire 1.
La solution est ensuite obtenue comme la sonne des racines cubiques des deux nombres $U$ et $V$.
**3** En posant $x = u + v$ l'équation devient :
$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + 3) = 36.$$
Il suffit de prendre $uv = -1$, pour que l'équation s'écrive $u^3 + v^3 = 36$ et par suite, $u^3v^3 = -1$.
$U$ et $V$ sont les solutions de l'équation $(X-U)(X-V) = 0$, soit $X^2 - (U+V)X + UV = 0$, soit encore $X^2 - 36X - 1 = 0$.
On obtient $\Delta = 1300$ et $S = \{18 + 5\sqrt{13}\,;18 - 5\sqrt{13}\}$.
En prenant $U = 18 + 5\sqrt{13}$ et $V = 18 - 5\sqrt{13}$, on obtient : $u = \sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}}$ et $v = \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}}$.
Et on a bien $uv = -1$, par suite :
$$u + v = \sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} + \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}}$$
est solution de l'équation.
Ce nombre est en fait égal à 3 : on vérifie en effet que $3^3 + 3 \times 3 = 27 + 9 = 36$.

**96** **1** $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 15) = 4$.
Il suffit de prendre $uv = 5$ pour obtenir $u^3 + v^3 = 4$.
Alors $u^3v^3 = 125$.
**2** **a.** $U$ et $V$ s'ils existent sont solutions de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$ qui s'écrit encore :
$$(X-2)^2 + 121 = 0.$$
**b.** Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
**c.** $4^3 - 64$ et $15 \times 4 + 4 = 64$, donc 4 est solution de **(3)** qui peut se factoriser en :
$$(x-4)(x^2 + 4x + 1) = 0.$$
Les solutions de **(3)** sont 4, $-2 + \sqrt{3}$, $-2 - \sqrt{3}$.
**3** **a.** $(X-2)^2 + 121 = 0 \Leftrightarrow (X-2)^2 - (11\mathrm{i})^2 = 0$
$\Leftrightarrow (X - 2 - 11\mathrm{i})(X - 2 + 11\mathrm{i}) = 0$
d'où $U = 2 + 11\mathrm{i}$ et $V = 2 - 11\mathrm{i}$ par exemple.
**b.** $(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) = 4 - \mathrm{i}^2 = 4 + 1 = 5$ ;
$(2+\mathrm{i})^3 = 2 + 11\mathrm{i}$ et $(2-\mathrm{i})^3 = 2 - 11\mathrm{i}$.
On peut donc prendre $u = 2 + \mathrm{i}$ et $v = 2 - \mathrm{i}$, on a bien $uv = 5$ et par suite $u + v$ est solution de **(3)**, et $u + v = 2 + \mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} = 4$.

## Pistes pour l'accompagnement personnalisé

### Revoir les outils de base

**97** **1** $P(x) = (x + 1 - 4)(x + 1 + 4)$
$= (x-3)(x+5)$.

**2** $P(x) = (x-7)(x+2)\,;\,\Delta = 81$.
**3** $P(x) = 2x^2 + x + 1\,;\,\Delta = -7$.
**4** $P(x) = -x(2x^2 - 9x + 9) = -x(2x-3)(x-3)$.

**98** **1** $OA = \sqrt{3+1} = 2$. $A$ est le point d'ordonnée 1 et d'abscisse positive sur le cercle de centre $O$ et de rayon 2.
**2** $OB = 1$, de plus $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et de mêmes sens, donc $\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OA}$, avec $k > 0$ et $k = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
**3** $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$.

## Les savoir-faire du chapitre

**99** **a.** $z_1 = 8 + 6\mathrm{i}$ ;
**b.** $z_2 = (2-3\mathrm{i})(8-6\mathrm{i}) = -2 - 36\mathrm{i}$ ;
**c.** $z_3 = \mathrm{i}(-2-36\mathrm{i}) - (8+6\mathrm{i}) = 28 - 8\mathrm{i}$ ;
**d.** $z_4 = \dfrac{63}{26} + \dfrac{23}{26}\mathrm{i}$.

**100** **a.** $S = \{-11\mathrm{i}\,;11\mathrm{i}\}$.
**b.** $\Delta = -196 = (14\mathrm{i})^2$, $S = \{2 - 7\mathrm{i}\,;2 + 7\mathrm{i}\}$.
**c.** $S = \left\{\dfrac{5}{6} - \dfrac{\sqrt{23}}{6}\mathrm{i}\,;\,\dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{23}}{6}\mathrm{i}\right\}$.
**d.** $z^2 = -9$ ou $z^2 = 4$, $S = \{-2\,;2\,;-3\mathrm{i}\,;3\mathrm{i}\}$.

**101** **a.** C'est le cercle de centre le point $K(\mathrm{i})$ et de rayon 3.
**b.** $|z - (1+2\mathrm{i})| = |z - (-2+\mathrm{i})| \Leftrightarrow AM = BM$
avec $A(1+2\mathrm{i})$ et $B(-2+\mathrm{i})$ ;
l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.
**c.** $\arg z = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi) \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$ ; l'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine $O$ qui fait un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ avec le vecteur $\vec{u}$.
**d.** $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}\ (\pi) \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{4}\ (\pi)$ ;
l'ensemble cherché est la droite d'équation $y = -x$, privée du point $O$.

**102** **1** $z_I = \dfrac{a+b}{2}$, $Z_J = \dfrac{b+c}{2}$, $z_K = \dfrac{c+d}{2}$,
$z_L = \dfrac{d+a}{2}$.
**2** **a.** $Z_{\overrightarrow{IJ}} = z_J - z_I = \dfrac{c-a}{2}$ et $Z_{\overrightarrow{LK}} = z_K - z_L = \dfrac{c-a}{2}$ ;
par suite : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.
**b.** L'affixe du milieu de $[IK]$ est $\dfrac{z_I + z_K}{2} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$
et celle du milieu de $[JL]$ est $\dfrac{z_J + z_L}{2} = \dfrac{b+c+d+a}{4}$ ;
les deux milieux ayant même affixe, ils sont donc confondus et $IJKL$ est un parallélogramme.

**103** **1** $\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.
**2** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + \mathrm{i}b}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}} = (a + \mathrm{i}b)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$$= \frac{a + b\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{b - a\sqrt{3}}{2}.$$

**3** Du fait de l'unicité de la forme algébrique d'un complexe, on obtient, en identifiant les parties réelle et imaginaire : $\dfrac{a + b\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{b - a\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
soit $\begin{cases} a + b\sqrt{3} = \sqrt{2} \\ b - a\sqrt{3} = -\sqrt{2} \end{cases}$.
En multipliant la 1re équation par $\sqrt{3}$ et en l'ajoutant à la 2e, on obtient : $4b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, d'où $b = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
En multipliant la 2e équation par $-\sqrt{3}$ et en l'ajoutant à la 1re, on obtient : $4a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, d'où $a = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

## Approfondissement

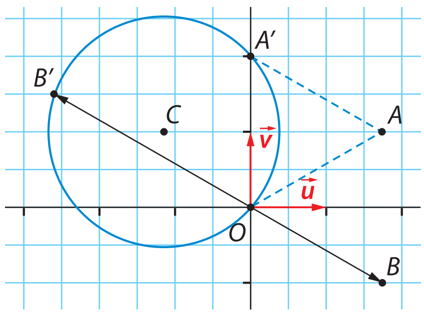
**104** **1** $X = x^2 - y^2$ et $x^2 + y^2 = 1$ puisque le complexe est de module 1. Par substitution, on obtient :

$$x^2 = \frac{1+X}{2} \text{ et } y^2 = \frac{1-X}{2}.$$

**2** $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ ;
d'après le **1** on a donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$
et $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$.
Comme $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$ sont positifs et on a : $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

**105** **1** On pose $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}$, $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}$ et $z_3 = r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3}$, avec $r_1$, $r_2$, $r_3$ réels strictement positifs, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ réels ; alors $z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$.
Et comme le produit des modules est strictement positif, on obtient : $\arg(z_1z_2z_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\ (2\pi)$.
**2** **b.** $z_A = 8 + \mathrm{i}$, $z_B = 5 + \mathrm{i}$, $z_C = 2 + \mathrm{i}$.
**c.** $z_Az_Bz_C = (8+\mathrm{i})(5+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = (39 + 13\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$
$= 65(1+\mathrm{i})$.
**d.** D'après le **1**, on a :
$\arg(z_Az_Bz_C) = \arg z_A + \arg z_B + \arg z_C$
$= \alpha + \beta + \gamma\ (2\pi)$
et par ailleurs $\arg 65(1+\mathrm{i}) = \arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.
Doù l'égalité : $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

**106** **1** **a.** $S = \{\sqrt{3} - \mathrm{i}\,;\sqrt{3} + \mathrm{i}\}$.
**b.** $a = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $b = \overline{a} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.



**2 a.** $OA' = OA$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA'}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'})$

$= \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $a' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i}$.

**b.** $b' = -\dfrac{3}{2}b = -3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

**3 a.** $c\overline{c} = |c|^2 = OC^2 = R^2$ ;

$(c - 2\mathrm{i})(\overline{c} + 2\mathrm{i}) = (c - 2\mathrm{i})(\overline{c - 2\mathrm{i}}) = |c - 2\mathrm{i}|^2$
$= CA'^2 = R^2$

$\left(c + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\overline{c} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) = |c - b'|^2$
$= CB'^2 = R^2$.

**b.** $(c - 2\mathrm{i})(\overline{c} + 2\mathrm{i}) = R^2 \Rightarrow c\overline{c} + 2\mathrm{i}(c - \overline{c}) + 4 = c\overline{c}$

$\Rightarrow c - \overline{c} = -\dfrac{4}{2\mathrm{i}} \Rightarrow c - \overline{c} = 2\mathrm{i}$.

$\left(c + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\overline{c} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) = R^2$

$\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(c + \overline{c}) + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}(c - \overline{c}) + |b'|^2 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(c + \overline{c}) - 3 + 9 = 0$

$\Rightarrow c + \overline{c} = -\dfrac{12}{3\sqrt{3}} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

**c.** En additionnant les deux relations on obtient :

$c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \mathrm{i}$ et $R = |c| = \sqrt{\dfrac{4}{3} + 1} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

**107** **1** $z_A = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,

$z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

**2 a.** On pose $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $b = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, avec $r > 0$ et $s > 0$, $\alpha$ et $\beta$ réels, alors $ab = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$ et comme $s > 0$, on a :

$|ab| = rs = |a| \times |b|$.

**b.** $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}))$
$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2\mathrm{i}\sin\alpha)$.

**c.** $f(M) = MA \times MB = |z_A - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| \times |z_B - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|$
$= |(z_A - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(z_B - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})|$
$= |z_A z_B - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z_A + z_B) + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}|$
$= \left|-1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right|$.

$f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2\mathrm{i}\sin\alpha) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\right|$

$= |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| \times \left|-\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)\mathrm{i}\right|$

$f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

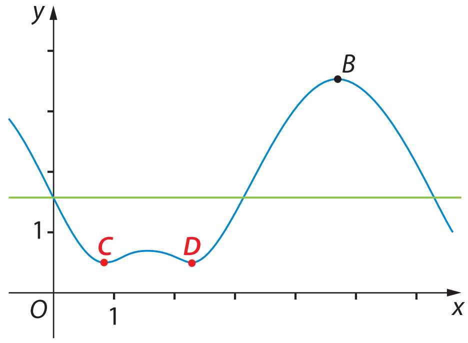
**3 a.** $f(M)$ est minimal lorsque $-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha = 0$, c'est-à-dire $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$. Or, il existe deux réels $\alpha$ de $[0\,;2\pi]$, tels que $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ :

$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 0{,}85$ et $\alpha_2 = \pi - \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 2{,}29$.

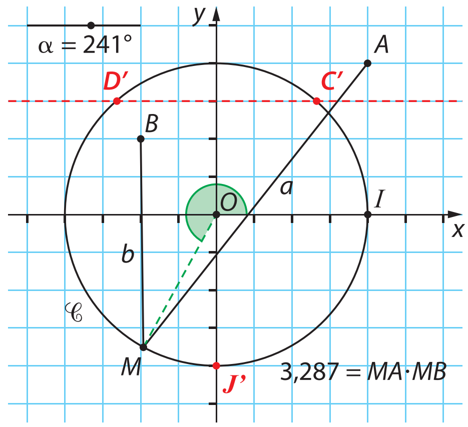
Les deux points cherchés sont $M_1$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}$ et $M_2$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}$.

**b.** Il existe un seul point pour lequel $f(M)$ est maximal, obtenu pour $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, c'est le point d'affixe $-\mathrm{i}$.

On peut visualiser la courbe de la fonction $f$ sous Geogebra, avec ses deux minima et son maximum :




On peut aussi utiliser une figure dynamique pour faire conjecturer les résultats :




## Vers le Supérieur

**108** **1** On pose $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}$, $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}$ avec $r_1, r_2$ réels strictement positifs, $\alpha_1, \alpha_2$ réels ; alors $z_1 z_2 = r_1 r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1+\alpha_2)}$ et comme $r_1 r_2 > 0$, $r_1 r_2$ est le module du produit $z_1 z_2$.
Ainsi, $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

**2 a.** Soit $z = n + \mathrm{i}m$ et $z' = n' + m'\mathrm{i}$ deux entiers de Gauss, avec $n, m, n', m'$ entiers relatifs.
$z + z' = (n + n') + \mathrm{i}(m + m')$ ; or, $n + n'$ et $m + m'$ sont des entiers, donc $z + z'$ est aussi un entier de Gauss.

**b.** $zz' = (nm - mm') + \mathrm{i}(nm' + mn')$ ; or, $nm - mm'$ et $nm' + mn'$ sont des entiers relatifs, donc $zz'$ est un entier de Gauss.

**c.** Prenons $z = 1$ et $z' = 1 + \mathrm{i}$ tous deux éléments de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ qui n'est pas un entier de Gauss (unicité de l'écriture algébrique d'un complexe).

**3 a.** Si $z$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, alors il existe $z' = a' + b'\mathrm{i}$ tel que $zz' = 1$ ; donc $|z| \times |z'| = 1$ et en élevant au carré : $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 1$, d'où $\dfrac{1}{a^2 + b^2} = a'^2 + b'^2$ ; or, $a'^2 + b'^2 \in \mathbb{Z}$.

**b.** Mais comme $a^2 + b^2$ est aussi un entier positif et que son inverse est entier, il ne peut être égal qu'à 1.

**c.** L'équation $a^2 + b^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}$ donne $a^2 = 0$ et $b^2 = 1$ ou $a^2 = 1$ et $b^2 = 0$, d'où quatre éléments possibles, dont on vérifie qu'ils ont bien un inverse dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ : $\mathrm{i}\,; -\mathrm{i}\,; 1\,; -1$.
$\mathrm{i}$ a pour inverse $-\mathrm{i}$ et réciproquement ; 1 et $-1$, eux sont leurs propres inverses.

CHAPITRE 8

# Droites et plans de l'espace – Vecteurs

## Introduction

### 1. Programme

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Droites et plans** | | |
| Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme. | • Étudier les positions relatives de droites et de plans. | Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans. |
| **Géométrie vectorielle**<br><br>Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires. | | On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées.<br>On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.<br>■ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ». |
| Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires. | • Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité. | On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance. |
| Repérage. | • Utiliser les coordonnées pour :<br>– traduire la colinéarité ;<br>– caractériser l'alignement ;<br>– déterminer une décomposition de vecteurs. | On ne se limite pas à des repères orthogonaux. |
| Représentation paramétrique d'une droite. | | La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan.<br>⇄ [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique. |

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

### 2. Intentions des auteurs

Dans ce chapitre, on commence par une synthèse sur les positions relatives des droites et des plans de l'espace : ces notions ont été vues en Seconde et entretenues sur des exercices en Première. L'objectif essentiel de ces rappels est de permettre aux élèves de construire des sections d'objets de l'espace par des plans, en s'aidant éventuellement d'un logiciel adapté.
On ne parle pas de la notion d'orthogonalité qui sera étudiée au chapitre 9 avec le produit scalaire.
On étend ensuite la notion de vecteur, connue par les élèves dans le plan, à l'espace : il faut rapidement arriver aux outils fondamentaux de ce chapitre qui sont les caractérisations vectorielles des droites et des plans de l'espace et la notion de coplanarité pour des vecteurs.

Enfin, l'usage d'un repère de l'espace permet d'accéder à un formulaire pratique et à la représentation paramétrique d'une droite.
Celle d'un plan n'est suggérée, conformément au programme, qu'en exercices.
Les problèmes proposés sont essentiellement des questions d'alignement, de coplanarité, d'intersection ou la recherche de lieux dans l'espace.
On entraîne les élèves, dans les problèmes de recherche d'intersection, à interpréter géométriquement la résolution d'un système d'équations linéaires, obtenue au moyen d'un logiciel de calcul formel.

# Partir d'un bon pied

**Objectif**

*Les activités de cette page ont été conçues pour réactiver les connaissances concernant la vision de droites et de plans dans le cube, les sommes vectorielles dans le plan, les formules élémentaires dans les repères, ainsi que la signification géométrique et l'expression analytique de la colinéarité dans le plan.*

**A** **1** **a.** et **c.** **2** **c.** **3** **a.** **4** **c.** **5** **b.**

**B** Vrai : **1**, **4** et **6**.
Faux : **2**, **3**, **5**, **7** $(GZ)$, **8** $(FT)$, **9** $(SB)$.

**C** **1** *ABCD* est un parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};$$

$m(A, C) = m(B, D)$ de coordonnées $(-1\,;-2)$.

**2** $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires puisque :

$$4\times(-3) = -6\times 2.$$

Les droites $(BD)$ et $(EC)$ sont parallèles.

**3** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AF}$ et les points $A$, $D$ et $F$ sont alignés.

**4** *AEBF* est un trapèze, car $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{FB}$.

# Découvrir

## Activité 1 Positions relatives de droites

**Objectif**

*Le but de cette activité est d'éviter les pièges de la représentation plane d'une figure de l'espace, lorsque l'on se pose des problèmes d'intersection de droites. L'élève doit identifier les plans dans lesquels se trouvent les droites considérées. L'activité conduit à la construction d'une section d'un tétraèdre par un plan.*

**1** $(MN)$ n'est pas sécante à $(AD)$ (droites non coplanaires), ni à $(BD)$.
$(MN)$ est sécante à $(AB)$ : ce sont deux droites non parallèles du plan $(ABC)$.

**2** $(JL)$ et $(AD)$ sont deux droites non parallèles du plan $(ABD)$.

**3** Les droites $(MP)$, $(NL)$ et $(CD)$ sont concourantes.
En effet :
$(NL)$ et $(CD)$ sont sécantes dans le plan $(BCD)$ en $V$ ;
$(MP)$ et $(CD)$ sont sécantes dans le plan $(ACD)$ en $W$.
$V$ et $W$ sont donc deux points du plan $(MNP)$ et de la droite $(CD)$, qui est sécante à $(MNP)$. Par suite, $V = W$.

**4** *MNLP* est la trace du plan $(MNP)$ sur les faces du tétraèdre.

**5** Si $BL = \dfrac{1}{3}BD$, on a $(NL)$ strictement parallèle à $(CD)$.
Si $(MP)$ et $(CD)$ sont sécantes en $V$, alors $V$ est un point de la trace du plan $(MNP)$ sur le plan $(BCD)$, c'est-à-dire un point de la droite $(NL)$ : c'est absurde puisque $(NL)$ et $(CD)$ sont disjointes. Par suite, les droites $(MP)$ et $(CD)$, situées dans le plan $(ACD)$, sont disjointes, donc parallèles…. à $(NL)$.

## Activité 2 Construire des sommes vectorielles

**Objectif**

*Il s'agit de représenter la somme vectorielle de vecteurs de l'espace en se ramenant à celle dans un plan.*

**1** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$, car *BCGF* est un carré.
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{EG}$, et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$, car *ACGE* est un parallélogramme $(\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG})$.

**2** $\vec{u} + \vec{w} = \overrightarrow{EB}$, $\vec{u} - \vec{w} = \overrightarrow{AH}$ ;
$\vec{v} + \vec{w} - \vec{u} = \overrightarrow{EA}$.

**3** $\overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{OB}$ avec $M = B$ ;

$\overrightarrow{OM} = -\dfrac{1}{2}\vec{v}$ avec $M = I$ ;

$\overrightarrow{JM} = \dfrac{1}{2}\vec{w} - \dfrac{1}{2}\vec{v}$ avec $M = B$.

## Activité 3 Décomposer un vecteur

**Objectif**

*Il s'agit de pratiquer la recherche de décompositions d'un vecteur dans l'espace. On se pose la question de l'unicité de cette décomposition dans un cas particulier.*

**1** **a.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, donc *ABGH* est un parallélogramme.
**b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$.
**c.** $\overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.

**2** **a.** $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
**b.** $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur du plan $(ABGH)$ égal à $\overrightarrow{OB}$.

**3** **a.** Non, car $E \notin (ABG)$.
**b.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE}$.
**c.** Supposons l'existence d'une autre décomposition, donc de trois réels $x'$, $y'$ et $z'$ tels que :

$$x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AH} + z'\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE}.$$

Alors :
$(z'+1)\overrightarrow{AE} = (1-x')\overrightarrow{AB} + (1-y')\overrightarrow{AH}$.

Si $z' \neq -1$, alors $\overrightarrow{AE} = \dfrac{(1-x)}{z'+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{(1-y')}{z'+1}\overrightarrow{AH}$, ce qui, d'après le **3** **a.**, est imposible.
Donc $z' = -1$ et $(1-x')\overrightarrow{AB} + (1-y')\overrightarrow{AH} = \vec{0}$, ce qui implique $x = 1 = y$ et l'unicité de la décomposition trouvée au **b.**

## Activité 4 Lire des coordonnées

**Objectif**

*On affine la pratique de la décomposition d'un vecteur dans l'espace selon trois vecteurs non coplanaires, en faisant ressortir les ambiguïtés d'une représentation plane et donc la nécessité pour l'élève de se fabriquer une image spatiale mentale.*

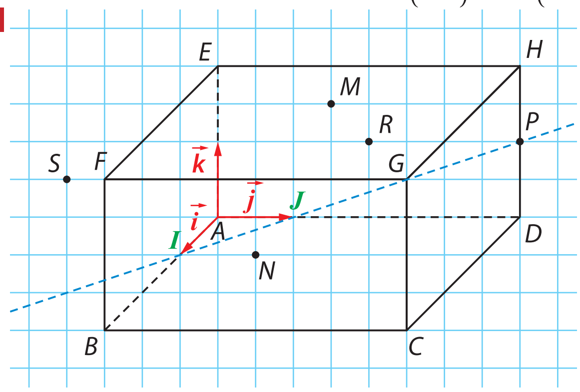
**1** $A(0\,;0\,;0)$ ; $B(3\,;0\,;0)$ ; $C(3\,;4\,;0)$ ; $D(0\,;4\,;0)$ ; $E(0\,;0\,;2)$ ; $F(3\,;0\,;2)$ ; $G(3\,;4\,;2)$ ; $H(0\,;4\,;2)$.

**2** $M$ : **a.** $(1;2;2)$ ; **b.** $\left(0\,;\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

**3** $N$ : **a.** $(3\,;2\,;1)$ ; **b.** $(1\,;1\,;0)$.

**4** **a.** $(0\,;4\,;1)$ ; **b.** $(-2\,;3\,;0)$ on a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$.

**5**




## Activité 5 Un problème de section

**Objectif**

*On étudie un classique problème de section du cube et on entraîne les élèves à la manipulation d'un logiciel de géométrie dans l'espace.*

**1** Figure.

**2** Non, on peut obtenir :

– un pentagone avec, par exemple, $M = B$, et $N$ et $P$ milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[GH]$ ;

– un quadrilatère (parallélogramme) avec $M = A$, $N = H$ et $P = G$.

Un triangle : non.

**3** Les côtés de l'hexagone ont des supports parallèles. En effet, ces droites sont coplanaires et ne peuvent être sécantes puisqu'elles sont incluses dans des plans parallèles (ceux des faces opposées) : elles sont donc parallèles et disjointes.

# Exercices d'application

## Savoir faire Construire une section plane d'une figure de l'espace

**1** **1** $EG = GB = BE = \sqrt{2}\,AB$.

**2** Soit $\Pi$ le plan passant par $M$ et parallèle au plan $(EBG)$ ; il coupe les plans $(FBCG)$, $(FBEA)$ et $(FGHE)$ suivant des droites $(B'G')$, $(B'E')$ et $(E'G')$ respectivement parallèles aux droites $(BG)$, $(BE)$ et $(EG)$. Le théorème de Thalès donne alors :

$$\frac{FB'}{FB} = \frac{FG'}{FG} = \frac{FE'}{FE} = \frac{B'G'}{BG} = \frac{G'E'}{GE} = \frac{E'B'}{EB}$$

et par suite : $B'G' = G'E' = E'B'$.

**3** En appelant $I$ et $J$ les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$, on a dans le triangle $SIJ$ :

$$\overrightarrow{TU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

En appelant $K$ le milieu de $[CD]$, on a dans le triangle $SJK$ :

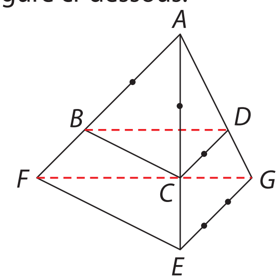
$$\overrightarrow{UV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Par suite, les droites $(TU)$ et $(UV)$ sont parallèles à deux droites sécantes $(AC)$ et $(BD)$ du plan $(ABCD)$ : les plans $(TUV)$ et $(ABC)$ sont donc parallèles.

On obtient la section du tétraèdre par le plan $(TUV)$ en traçant sur chaque face les parallèles à :

$(AB)$ passant par $T$, $(BC)$ passant par $U$, $(CD)$ passant par $V$, et $(AD)$ passant par le centre de gravité $W$ du triangle $SAD$.

**4** **1** Voir la figure ci-dessous.




**2** $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ étant colinéaires, les droites $(EF)$ et $(CB)$ sont parallèles.

**3** **a.** Les plans $(BCD)$ et $(EFG)$ sont parallèles, car deux vecteurs directeurs de $(BCD)$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires à deux vecteurs directeurs de $(EFG)$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$.

**b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$,

donc les points $A$, $D$ et $G$ sont alignés.

**c.** Le plan $(ABD)$ qui est aussi le plan $(AFG)$ coupe les deux plans parallèles $(BCD)$ et $(EFG)$ suivant deux droites qui sont parallèles ; or il s'agit des droites $(BD)$ et $(FG)$ : elles sont donc parallèles.

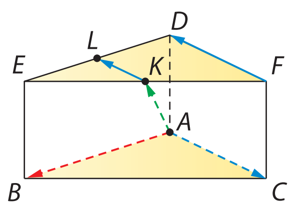
**5** **1** $I = F$ ; $J = C$ ; $K = T$ ; $L = O$ ; $M = R$ ; $N = S$.

## Savoir faire Démontrer que des vecteurs sont coplanaires et choisir une décomposition adaptée

**6** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$

Et $\vec{w} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$, donc $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$ et, par suite, les trois vecteurs sont coplanaires.

**7** Voir la figure ci-contre.




**1** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont non coplanaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont non coplanaires $\Leftrightarrow K \notin (ABC)$ ; or, cela est vrai, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont non coplanaires.

**2** $\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

ainsi $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et les trois vecteurs $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

**8** **1** Le point $E$ n'appartient pas au plan $(ABCD)$ ; on ne peut donc pas exprimer ce vecteur en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

**2** $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HI}.$$

Les droites $(IH)$ et $(JO)$ sont donc parallèles.

## Savoir faire Utiliser un repère pour prouver des alignements

**9** $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, d'où :

$$M \in (GE) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -\dfrac{1}{3}t \end{cases}$$

En prenant $t = -3$ on obtient le point de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$, c'est-à-dire $K$ ; donc $K \in (GE)$.
Pour $F$, on cherche un réel $t$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}t \\ 0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}t, \quad \text{ce qui implique : } \dfrac{2}{3} = 0. \\ 0 = -\dfrac{1}{3}t \end{cases}$$

C'est absurde, donc $F \notin (GE)$.

**10** **1** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

**2 a.** Une représentation paramétrique de l'axe $(O ; \vec{k})$ est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 ; \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées d'un point commun aux deux droites vérifient le système :

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 2 + 2t \\ s = -1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = 2. \end{cases}$$

Les deux droites sont donc sécantes au point $K(0 ; 0 ; 2)$, repéré par le paramètre $t = -1$ sur $(AB)$ et $s = 2$ sur l'axe $(O ; k)$.

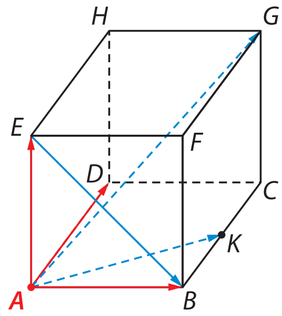
**b.** $M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0 ; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \quad , t \in [0 ; 1]. \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

$M \in [BK) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BK}$, $t \in [0 ; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2s \\ y = 4 - 4s \quad , t \in [0 ; +\infty[. \\ z = -4 + 6s \end{cases}$$

**11** $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ;




$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; l'égalité :

$$\alpha\overrightarrow{EB} + \beta\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \dfrac{1}{2}\beta = 1 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}.$$

Par suite $-\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AG}$ : les trois vecteurs sont coplanaires.

**12** On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Alors $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.
Soit $M$ le milieu de $[IJ]$, on a $M\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ et on constate que $\frac{3}{4}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM}$, ce qui prouve l'alignement des points $A$, $M$ et $K$.
Par suite $[AK]$ et $[IJ]$ se coupent en $M$.

## Travaux pratiques

**13** **Déterminer un lieu géométrique**

**Objectifs :** *Utiliser un logiciel de géométrie pour conjecturer un lieu. Caractériser un ensemble de points par une représentation paramétrique et le reconnaître.*

**1** **1** Voir la figure du manuel élève.
**2** $G$ semble décrire la droite passant par le centre de gravité $G_0$ du triangle $ABC$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
**2** **1** $\mathcal{D}$ est la droite passant par $C(1 ; 1 ; 1)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{CM} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que : } \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 + 2k. \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

**2 a.** L'abscisse, l'ordonnée et la cote de $G$ sont les moyennes respectives des abscisses, ordonnées et cotes de $A$, $B$ et $M$, donc :

$$x_G = 1 - \frac{1}{3}k, \ y_G = 1 + \frac{2}{3}k, \ z_G = \frac{1}{3} + k.$$

**b.** On reconnaît la représentation paramétrique d'une droite passant par le point de coordonnées $\left(1 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or, $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$ et le centre de gravité du triangle $ABC$, $G_0$, a pour coordonnées $\left(1\,;1\,;\frac{1}{3}\right)$. $G$ décrit donc la parallèle à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $G_0$.

## 14 Utiliser une décomposition

**Objectif :** *Utiliser une décomposition, un repère adapté pour identifier des ensembles de points grâce à leurs équations.*

**1** $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JP}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CP})$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{HE} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{HE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

On a donc $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{JK}$ et $I, J, K$ sont alignés.

**2** On peut considérer le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

**3 a.** $N$ décrit le segment $[HE]$ et $Q$ le segment $[AC]$.

**b.** $N(0\,;1-t\,;1)$, $Q(1-t\,;1-t\,;0)$, leur milieu $L$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\,;1-t\,;\frac{1}{2}\right)$. L'ensemble $(\mathcal{L})$ est donc un segment passant par $J\left(\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1/2\\-1\\0\end{pmatrix}$. Pour $t=1$, on obtient $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ :

$(\mathcal{L})$ est donc le segment $[IJ]$.

**4 a.** $G(1\,;1\,;1)$, d'où $S\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}t\,;1-\frac{2}{3}t\,;\frac{2}{3}\right)$.

**b.** $S \in (\mathcal{L}') \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \\ y = 1 - \frac{2}{3}t \quad , t \in [0\,;1]. \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$

**c.** $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{L}')$ sont dirigés par des vecteurs colinéaires à $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ : ils ont des supports parallèles.

## 15 Étude de positions relatives

**Objectifs**

*Donner un exemple de représentation paramétrique d'un plan. Utiliser ce résultat pour étudier des positions relatives d'une droite et d'un plan, de deux plans. Faire le lien entre ces relations d'incidence et la résolution algébrique de systèmes obtenue au moyen d'un logiciel de calcul formel.*

**1** $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow$ il existe deux réels $t$ et $s$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$$

ce qui donne encore :

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow$ il existe deux réels $t$ et $s$ tels que :

$\begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = 2t + s \\ z + 2 = s \end{cases}$ ; d'où le résultat.

**2** $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \quad , k \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2k \end{cases}$

**3** $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t = 1 + k \\ 1 + 2t + s = -k \\ -2 + s = 2 + 2k \end{cases}$.

**b.** Le système a une solution unique qui est le point repéré par $k=-1$ sur $\mathcal{D}$ et par le couple $(-1\,;2)$ dans $\mathcal{P}$ : il s'agit du point $C$ de coordonnées $(0\,;1\,;0)$.

**4 a.** $\Delta$ passe par $B(1\,;0\,;2)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\vec{w}$ et $\vec{d}$ n'étant pas colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $\Delta$ ne sont pas parallèles, mais sont sécantes au point $B$.

**b.** On a : $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

**c.** $\Delta$ est parallèle à $\mathcal{P}$, donc le plan $\mathcal{P}'$ qui contient $\Delta$ coupe $\mathcal{P}$ suivant une droite $\Delta'$ parallèle à $\Delta$. Par ailleurs, comme le point $C$ appartient à $\mathcal{P}'$ et à $\mathcal{P}$, la droite $\Delta'$ est la parallèle à $\Delta$ passant par $C$.

$$M \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = 1 + m, \; m \in \mathbb{R}. \\ z = -m \end{cases}$$

La résolution du système permettant de déterminer les points communs à $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$, nous dit que ce sont les points correspondant aux paramètres $t$ et $s = -t + 1$ dans le plan $\mathcal{P}$, ce qui donne la représentation paramétrique d'une droite :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Il suffit de poser $m = 1 + t$ pour retrouver la représentation donnée plus haut pour $\Delta'$.

# Faire le point

**19** **A.** **1** **a.** et **c.** **2** **c.** **3** **b.** **4** **b.** **5** **c.** **6** **a.** et **c.** ($KJGH$ est un parallélogramme.)

**B.** **1** **a.**, **b.** et **c.** **2** **a.** et **b.** **3** **b.** et **c.** **4** **b.** et **c.**

**20** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux.

# Exercices d'application

## 1 Positions relatives de droites et plans

**21** **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Faux. **5** Vrai.

**22** **1** **c.** **2** **b.** **3** **c.**

## Positions relatives dans l'espace

**23** **a.** Les droites $(DG)$ et $(EA)$ ne sont pas coplanaires.
**b.** Les droites $(JK)$ et $(FC)$ sont coplanaires et parallèles.
**c.** Le plan $(EFC)$ et la droite $(JK)$ sont parallèles.
**d.** Les plans $(EKG)$ et $(AIC)$ sont parallèles.
**e.** Le plan $(BCK)$ et la droite $(EI)$ sont parallèles.
**f.** Les plans $(GHK)$ et $(AIC)$ sont sécants selon une droite passant par le point $C$.
**g.** Le plan $(AIC)$ et la droite $(FG)$ sont sécants en un point.
**h.** Les droites $(FK)$ et $(BD)$ sont coplanaires et sécantes.

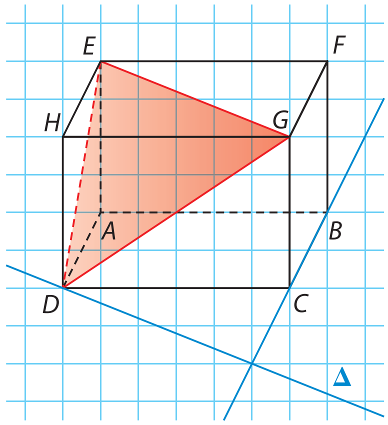
**24** **a.** Les droites $(IJ)$ et $(AB)$ ne sont pas coplanaires.
**b.** Les droites $(IK)$ et $(AB)$ ne sont pas coplanaires.
**c.** Le plan $(BIJ)$ et la droite $(AK)$ sont sécants en un point.
**d.** Les plans $(BIJ)$ et $(AKD)$ sont sécants selon une droite passant par le point $J$.
**e.** Le plan $(BIK)$ et la droite $(CD)$ sont sécants au point $D$.
**f.** Les plans $(BIJ)$ et $(AKC)$ sont sécants selon une droite passant par le point $I$.

**25** **1** Dans le triangle $EFG$, la droite des milieux $(IJ)$ est parallèle à la droite $(EG)$, donc à la droite $(AC)$.
**2** Les plans $(BIJ)$ et $(ABC)$ sont sécants selon une droite passant par le point $B$, commun aux deux plans.
Les plans $(EFG)$ et $(ABC)$ sont parallèles et sont coupés par le plan $(BIJ)$ selon deux droites qui sont parallèles entre elles. Or, $(EFG)$ et $(BIJ)$ sont sécants selon la droite $(IJ)$.
On en déduit que les plans $(ABC)$ et $(BIJ)$ sont sécants selon la parallèle à la droite $(IJ)$ passant le point $B$.

**26** **1** Le point $K$ est le centre de gravité du triangle $ABC$ et le point $I$ est le milieu du segment $[AB]$. Donc $K$ appartient à la médiane $(IC)$.
De la même façon, en raisonnant dans le triangle $ABD$, le point $J$ appartient à la droite $(ID)$.
Donc les points $K$ et $J$ appartiennent au plan $(ICD)$.
Donc les points $C$, $D$, $I$, $J$ et $K$ sont coplanaires.
**2** Dans le triangle $ICD$, le point $K$ se trouve à 1/3 sur le segment $[IC]$ en partant du sommet $I$, et le point $J$ se trouve à 1/3 sur le segment $[ID]$ en partant du sommet $I$.
Par le théorème de Thalès, les droites $(KJ)$ et $(CD)$ sont parallèles.
Donc le quadrilatère $CKJD$ est un trapèze.
**3** Les droites $(CJ)$ et $(DK)$ sont coplanaires d'après la question **1**.
Et d'après la question **2**, les droites $(CJ)$ et $(DK)$ sont sécantes.

**27** **1** Dans le triangle $ABC$, les médianes $(CI)$ et $(BJ)$ sont sécantes au point $G$, qui est donc le centre de gravité du triangle $ABC$. Donc la droite $(AG)$ coupe le segment $[BC]$ en son milieu.
On en déduit que le plan $(AGD)$ et la droite $(BC)$ sont sécants au milieu $L$ du segment $[BC]$.
**2** Les points $L$ et $D$ sont communs aux plans $(AGD)$ et $(BCD)$. Donc les plans $(AGD)$ et $(BCD)$ sont sécants selon la droite $(DL)$.
**3** Dans le triangle $ALD$, le point $G$ se trouve aux 2/3 sur le segment $[AL]$ en partant du sommet $A$, et le point $K$ se trouve aux 2/3 sur le segment $[AD]$ en partant du sommet $A$.
D'après le théorème de Thalès, les droites $(GK)$ et $(DL)$ sont parallèles.
Or, la droite $(DL)$ est incluse dans le plan $(BCD)$.
On en déduit que la droite $(GK)$ et le plan $(BCD)$ sont parallèles.

**28** **1** Les plans $(EDG)$ et $(ABC)$ sont sécants selon une droite passant par le point $D$, commun aux deux plans.
Les plans $(EFG)$ et $(ABC)$ sont parallèles et sont coupés par le plan $(EDG)$ selon deux droites qui sont parallèles entre elles. Or, $(EFG)$ et $(EDG)$ sont sécants selon la droite $(EG)$.
On en déduit que les plans $(ABC)$ et $(EDG)$ sont sécants selon la parallèle $\Delta$ à la droite $(EG)$ passant le point $D$.
**2** On a le graphique suivant :

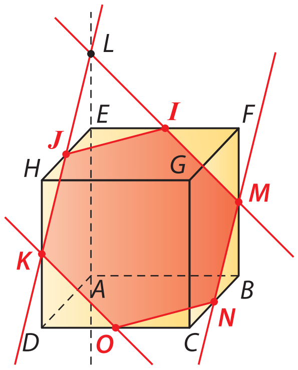



Les droites $\Delta$ et $(BC)$ sont incluses dans le plan $(ABC)$ et ne sont pas parallèles (car $\Delta$ // $(EG)$ et donc $\Delta$ // $(AC)$).
Elles sont donc sécantes au point d'intersection de la droite $(BC)$ et du plan $(EDG)$.

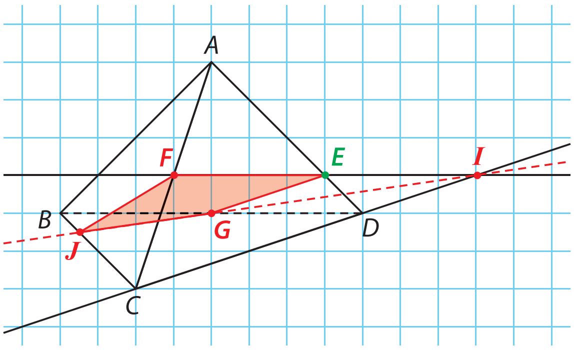
## Constructions de sections

**29** **1** ▸ Les points $I$ et $J$ sont communs aux plans $(EFG)$ et $(IJK)$. Donc les plans $(EFG)$ et $(IJK)$ sont sécants selon la droite $(IJ)$.
▸ Les points $J$ et $K$ sont communs aux plans $(AED)$ et $(IJK)$. Donc les plans $(AED)$ et $(IJK)$ sont sécants selon la droite $(JK)$.
**2** Le point $L$ appartient à la droite $(AE)$ et donc au plan $(AEB)$.
De même, le point $L$ appartient à la droite $(JK)$ et donc au plan $(IJK)$.
Le point $L$ est donc commun aux plans $(AEB)$ et $(IJK)$.
Or, le point $I$ est aussi commun aux plans $(AEB)$ et $(IJK)$.
Donc, les plans $(AEB)$ et $(IJK)$ sont sécants selon la droite $(IL)$.

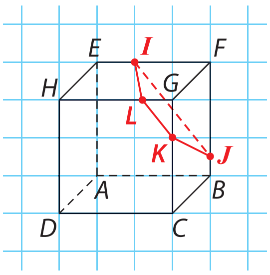
**3** Les plans $(IJK)$ et $(CDG)$ sont sécants selon une droite passant par le point $K$, commun aux deux plans.
Les plans $(ABE)$ et $(CDG)$ sont parallèles, et sont coupés par le plan $(IJK)$ selon deux droites qui sont parallèles entre elles. Or, $(IJK)$ et $(ABE)$ sont sécants selon la droite $(IL)$.
On en déduit que les plans $(IJK)$ et $(CDG)$ sont sécants selon la parallèle à la droite $(IL)$ passant le point $K$.
**4** On en déduit la section $IJKONM$ suivante :



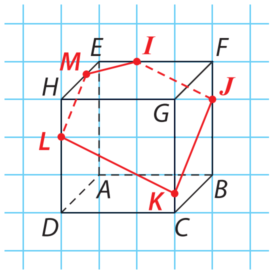

**30** **2 a.** Les droites $(EF)$ et $(CD)$ sont coplanaires, car appartenant au plan $(ACD)$.
De plus, d'après le quadrillage, $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{1}{2}$.
Donc les droites $(EF)$ et $(CD)$ ne sont pas parallèles.
Ces droites sont donc sécantes en un point $I$.
**b.** Les points $I$ et $G$ sont communs aux plans $(EFG)$ et $(BCD)$. Donc ces plans se coupent selon la droite $(IG)$.
**3** Le point $J$ et $F$ sont communs aux plans $(EFG)$ et $(ABC)$. Donc ces plans se coupent selon la droite $(JF)$.
**4** On en déduit que la section du tétraèdre par le plan $(EFG)$ est le quadrilatère $EFJG$.



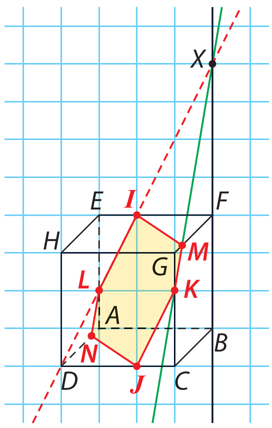

**31** **a.** Les traces sur les faces $ABFE$ et $BCGF$ sont les segments $[IJ]$ et $[KJ]$.
Comme les plans $(ABE)$ et $(CDH)$ sont parallèles, le plan $(IJK)$ les coupe selon deux droites qui sont parallèles, donc parallèles à la droite $(IJ)$.
On en déduit la construction du segment $[KL]$ et pour finir le segment $[IL]$.



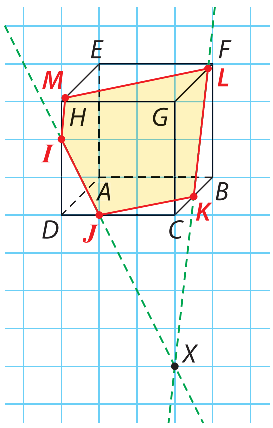

**b.** De la même façon, on construit les segments $[IJ]$ et $[JK]$.
Puis le segment $[KL]$, parallèle au segment $[IJ]$.
Puis le segment $[LM]$, parallèle au segment $[JK]$.
Et le segment $[MI]$ pour finir.




**32** **a.** La trace sur la face $CDHG$ est le segment $[JK]$.
Comme les plans $(ABE)$ et $(CDH)$ sont parallèles, le plan $(IJK)$ les coupe selon deux droites qui sont parallèles, donc parallèles à la droite $(JK)$. On en déduit la construction du segment $[IL]$.
Les droites $(IL)$ et $(FB)$ sont sécantes en un point $X$. En utilisant la droite $(XK)$, on obtient les segments $[MK]$ et $[MI]$.
On finit la construction en traçant les segments parallèles $[LN]$ et $[NJ]$ respectivement aux segments $[MK]$ et $[MI]$.




**b.** La trace sur la face $CDHG$ est le segment $[IJ]$, celle sur la face $ABCD$ est le segment $[JK]$.
Les droites $(IJ)$ et $(CG)$ sont sécantes en un point $X$. En utilisant la droite $(XK)$, on trace le segment $[KL]$.
On termine la construction en utilisant des propriétés de parallélisme.



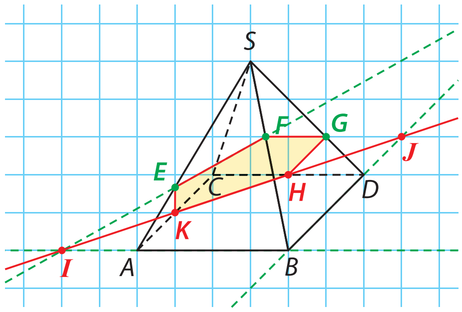

**33** **2** Les droites $(AB)$ et $(EF)$ sont coplanaires et sécantes en un point $I$. De même, les droites $(BD)$ et

$(FG)$ sont coplanaires et sécantes en un point $J$.

Les points $I$ et $J$ sont communs aux plans $(ABC)$ et $(EFG)$, donc les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ sont sécants selon la droite $(IJ)$.

**3** La droite $(IJ)$, coplanaire avec les droites $(CD)$ et $(AC)$, coupe les segments $[CD]$ et $[AC]$ respectivement aux points $H$ et $K$.

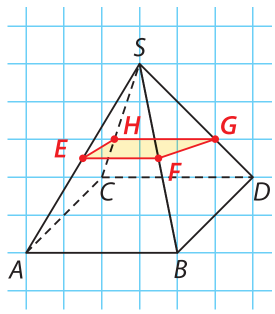
On en déduit que la section de la pyramide $SABDC$ par le plan $(EFG)$ est le polygone $EFGHK$.




**34** La droite des milieux $(EF)$ est parallèle à la droite $(AB)$ et donc à la droite $(CD)$.

Les plans $(EFG)$ et $(SCD)$ contiennent donc respectivement les droites $(EF)$ et $(CD)$, parallèles entre elles. D'après le théorème du toit, ces plans sont sécants selon une droite parallèle aux droites $(EF)$ et $(CD)$.

On en déduit la construction du segment $[GH]$, puis la section $EFGH$ de la pyramide par le plan $(EFG)$.




## 2 Vecteurs de l'espace et caractérisations vectorielles

**35** **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

**36** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai.

### Vecteurs de l'espace

**37** **1** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{AF}$ ;

$\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{G'F}=\overrightarrow{AF}$ ;

$\overrightarrow{BH'}+\overrightarrow{F'E}=\overrightarrow{BH'}+\overrightarrow{H'G}=\overrightarrow{BG}$ ;

$2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AH}$ ;

$-3\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DF'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF'}=\overrightarrow{AF'}$ ;

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{C'B}$.

**2** Dans le triangle $ADE$, les droites $(BI)$ et $(DE)$ sont parallèles. Comme $\frac{AB}{AD}=\frac{1}{3}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $\frac{AI}{AE}=\frac{1}{3}$. Donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

**3** Les points $I$ et $J$ sont communs aux plans $(AEE')$ et $(BGB')$, donc les plans $(AEE')$ et $(BGB')$ sont sécants selon la droite $(IJ)$.

De même, les plans $(AEE')$ et $(DED')$ sont sécants selon la droite $(EE')$.

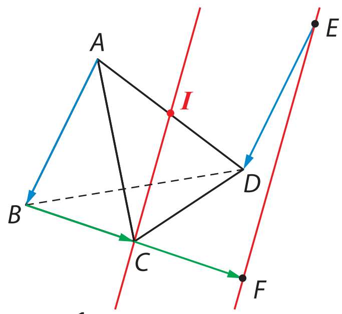
Or, les plans $(BGB')$ et $(DED')$ sont parallèles. Ils sont coupés par le plan $(AEE')$ par deux droites parallèles entre elles.

Donc les droites $(IJ)$ et $(EE')$ sont parallèles.

Or, dans le triangle $AEE'$, $\frac{AI}{AE}=\frac{1}{3}$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $\frac{AJ}{AE'}=\frac{1}{3}$.

Donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE'}$.

**38** **1** On a :




**2** **a.** $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ par la règle du parallélogramme, car le point $I$ est le milieu du segment $[AD]$.

**b.** $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$ par la relation de Chasles.

Donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ en utilisant les définitions de $\overrightarrow{ED}$ et de $\overrightarrow{CF}$.

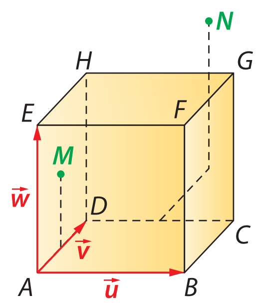
Et comme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, on a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$.

**3** D'après les questions **2** **a.** et **2** **b.**, $\overrightarrow{EF}=-2\overrightarrow{CI}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

Donc les droites $(EF)$ et $(CI)$ sont parallèles.

**39** **1** Le point $I$ est le point $H$ ; le point $J$ est le point $B$ ; le point $K$ est le point $C$.

**2** On a :




**3** $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CN}+x\vec{u}=\left(-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)+x\vec{u}$

$$=\left(-\frac{1}{2}+x\right)\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}.$$

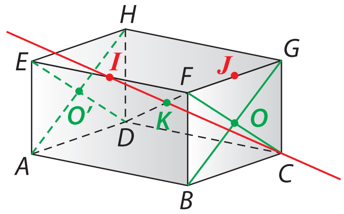
De plus, $\overrightarrow{BM}=-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$.

Or, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

Alors, les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires si, et seulement si, les coordonnées $\left(-\frac{1}{2}+x\,;1\,;1\right)$ et $\left(-1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ sont proportionnelles, soit $\frac{1}{2}+x=(-1)\times 2$, ou encore $x=-\frac{3}{2}$.

**40** **1** Le point $M$ est le point $O$ ; le point $N$ est le point $O'$ ; le point $P$ est le point $B$.

**2** On a :




**3** ▶ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires. On exprime les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CI}$ en fonction de ces vecteurs.

▶ $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}$ par la relation de Chasles. Or,

$\overrightarrow{FK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$.

$=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Et $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Donc $\overrightarrow{CK}=(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})+\left(\frac{-1}{3}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

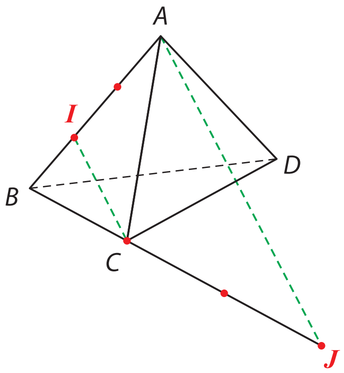
$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

▶ $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FI}$ par la relation de Chasles.

Donc $\overrightarrow{CI}=(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

▶ On en déduit que $\overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CK}$. Donc les points $C$, $K$ et $I$ sont alignés.

**41** **1**




**2** Par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$$

$$\text{et } \overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

Donc $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{IC}$. Donc les droites $(AJ)$ et $(IC)$ sont parallèles.

**42** **1** Le point $D'$ étant le centre de gravité du triangle $ABC$, on a : $\overrightarrow{D'I}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

De même, on a : $\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.

Or, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{B'K}+\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{ID'}$.

Donc $\overrightarrow{B'D'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KI}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK})+\overrightarrow{KI}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KI}$.

Donc $\overrightarrow{B'D'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KI}$.

On en déduit que les droites $(B'D')$ et $(KI)$ sont parallèles.
Or, la droite des milieux $(KI)$ est parallèle à la droite $(BD)$.
Donc les droites $(BD)$ et $(B'D')$ sont parallèles.

**2** En utilisant les centres de gravité $B'$ et $C'$, on a :

$$\overrightarrow{C'J}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} \text{ et } \overrightarrow{B'K}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}.$$

Or, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'K}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JC'}$.

Donc $\overrightarrow{B'C'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{JA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KJ}$.

Donc les droites $(B'C')$ et $(KJ)$ sont parallèles.
Or, la droite des milieux $(KJ)$ est parallèle à la droite $(BC)$.
Donc les droites $(BC)$ et $(B'C')$ sont parallèles.

**3** Les plans $(BCD)$ et $(B'C'D')$ contiennent deux couples de droites parallèles entre elles.
On en déduit que les plans $(BCD)$ et $(B'C'D')$ sont parallèles.

**43** **1** Les points $A$, $G$ et $F$ sont alignés. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.
Il existe donc un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AG}$.
Or, le point $G$ est le centre de gravité du triangle $ECD$.

Donc $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

Alors, par définition du point $E$ et la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AF}=\frac{k}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

$=\frac{k}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\right)$.

Donc $\overrightarrow{AF}=\frac{k}{3}\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

On en déduit que :

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\left(\frac{5k}{6}-1\right)\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{k}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas coplanaires et le point $F$ appartient au plan $(BCD)$.

Donc $\frac{5k}{6}-1=0$, soit $k=\frac{6}{5}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$.

Donc le point $F$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}\,;\frac{2}{5}\right)$ dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD})$ du plan $(BCD)$.

**2** Le point $J$ étant le milieu du segment $[CD]$, on a :

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Donc $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BJ}$. Donc les points $B$, $F$ et $J$ sont alignés.

**44** **1** Les points $A$, $K$ et $L$ sont alignés. Donc il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{AK}$.
Or, $K$ est le milieu du segment $[IJ]$. Donc :

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}.$$

Comme $J$ est le milieu du segment $[CD]$ :

$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

Donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

En utilisant que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, on obtient : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BL} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AK}\\ &= \overrightarrow{BA} + k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}\right)\\ &= \left(1 - \frac{2k}{3}\right)\overrightarrow{BA} + \frac{k}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{4}\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont non coplanaires et que $\overrightarrow{BL}$ est un vecteur du plan $(BCD)$, on a :

$$1 - \frac{2k}{3} = 0, \text{ c'est-à-dire } k = \frac{3}{2}.$$

Alors, $\overrightarrow{BL} = \dfrac{\frac{3}{2}}{4}\overrightarrow{BC} + \dfrac{\frac{3}{2}}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BD}$.

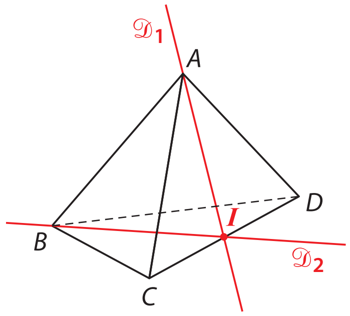
Le point $L$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{8}\,;\,\frac{3}{8}\right)$ dans le repère du plan $(BCD)$.

**2** Comme $J$ est le milieu du segment $[CD]$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Donc $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BJ}$. Les points $B$, $L$ et $J$ sont alignés.

**45** **a.** La droite passant par $A$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est la droite $(AC)$.
**b.** La droite passant par $H$ et dirigée par $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GC}$ est la droite $(HC)$.
**c.** Le plan passant $B$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est le plan $(ABC)$.
**d.** Le plan passant $D$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CF}$ est le plan $(CDE)$.
**e.** Le plan passant $E$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}$ est le plan $(ACE)$.

**46** **1** On a :



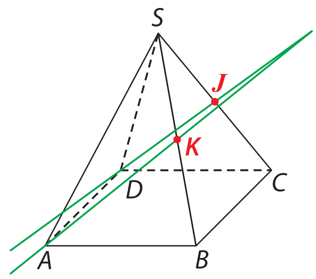

**2** Soit $I$ le milieu du segment $[CD]$.
Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$. Donc la droite $\mathcal{D}_1$ est la droite $(AI)$.
De même, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BI}$. Donc la droite $\mathcal{D}_2$ est la droite $(BI)$.
Le point $I$ est donc commun aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, qui sont donc sécantes en $I$.

## Caractérisations vectorielles

**47** **a.** Le plan $(ABC)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, mais aussi par les vecteurs $\overrightarrow{LC}$ et $\overrightarrow{BK}$.
**b.** Le plan $(IFB)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IB}$, mais aussi par les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BF}$.
**c.** Le plan $(IJK)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, mais aussi par les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{KJ}$.
**d.** Le plan $(EIA)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EA}$, mais aussi par les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AI}$.
**e.** Le plan $(AGH)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$, mais aussi par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$.
**f.** Le plan $(DLI)$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IL}$, mais aussi par les vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{FK}$.

**48** **a.** La droite d'intersection des plans $(EFH)$ et $(ABG)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{GH}$.
**b.** La droite d'intersection des plans $(BLK)$ et $(CFG)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
**c.** La droite d'intersection des plans $(EHL)$ et $(FGK)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{KL}$.
**d.** La droite d'intersection des plans $(EFH)$ et $(ABG)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AE}$.

**49** On a le dessin suivant :




où $J$ et $K$ sont les milieux respectifs des segments $[SC]$ et $[SB]$.
Par la règle du parallélogramme, la droite passant par $D$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DS}$ est la droite $(DJ)$, et la droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$ est la droite $(AK)$.
Or, la droite des milieux $(KJ)$ est parallèle à la droite $(BC)$ et donc à la droite $(AD)$.
Donc les points $A$, $K$, $J$ et $D$ sont coplanaires, et les droites $(AK)$ et $(DJ)$ sont coplanaires et sécantes.

**50** **a.** $\mathscr{E}_1$ est la droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$. Donc $\mathscr{E}_1$ est la droite $(AB)$.
**b.** $\mathscr{E}_2$ est la droite passant par le point $J$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{SD}$. Donc $\mathscr{E}_2$ est la droite $(JK)$.
**c.** $\mathscr{E}_3$ est la droite passant par le point $B$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{SA}$. Donc $\mathscr{E}_3$ est la parallèle à $(SA)$ passant par le point $B$.
**d.** $\mathscr{E}_4$ est le plan passant par le point $O$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$. Donc $\mathscr{E}_4$ est le plan $(SBC)$.

## Vecteurs coplanaires

**51** **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont coplanaires, car :

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

**b.** Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non coplanaires, car les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dirigent le plan $(ABC)$, qui ne contient pas le vecteur $\overrightarrow{AK}$.

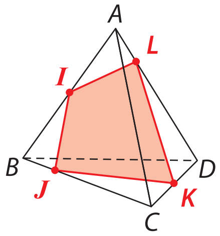
**c.** Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont coplanaires, car :

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{IJ}.$$

**d.** Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires, car :

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{JI} = 2(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI}) = -2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{CI}.$$

**52** **1** On a le dessin suivant :




Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

De même, $\overrightarrow{IL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

De plus, comme $K$ est le milieu de $[CD]$, on a :

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.$$

Or, $I$ est le milieu de $[AB]$.

Donc $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Donc $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi :

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{IK} = 2(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL})$.

Donc les points $I$, $J$, $K$ et $L$ sont coplanaires.

**2** Le point $K$ appartient donc au plan $(IJK)$. On en déduit que la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $(IJK)$ est le quadrilatère $IJKL$.

**53** **a.** $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{HA} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

**b.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan $(ABC)$ qui ne contient pas le vecteur $\overrightarrow{IL}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne sont pas coplanaires.

**54** **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{D}$ dirigent le plan $(ABC)$ qui ne contient pas le vecteur $\overrightarrow{AH}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas coplanaires.

**b.** $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DF}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$.

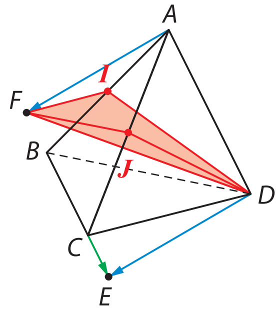
Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

**55** **a.** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FL}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{FL}$ sont coplanaires.

**b.** Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HF}$ dirigent le plan $(ABC)$ qui ne contient pas le vecteur $\overrightarrow{BG}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas coplanaires.

**56** On a le dessin suivant :




On a :

$$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

De plus, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

et $\overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}.$$

On en déduit que : $\overrightarrow{FJ} = -\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont coplanaires.

Donc les points $D$, $I$, $J$ et $F$ sont coplanaires.

## 3 Repérage

**57** **1** Faux. **2** Faux.
**3** Vrai, car $\overrightarrow{I} = 2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{IK}$.

**58** **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux.
**4** Faux. **5** Faux.

### Repères de l'espace

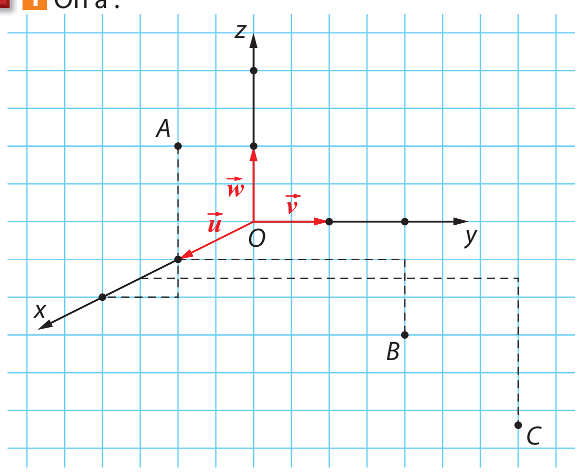
**59** **1** Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires, donc $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

**2** Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ n'est pas un repère de l'espace.

**3** Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas coplanaires, donc $(B, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH})$ est un repère de l'espace.

**4** Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EC}$ ne sont pas coplanaires, donc $(E, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC})$ est un repère de l'espace.

**60** **1** On a :

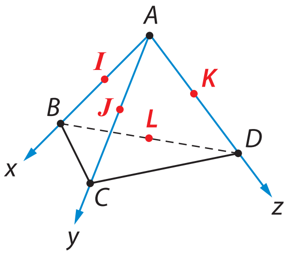


**2** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0{,}5\\2\\-1\end{pmatrix}$.

**3** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

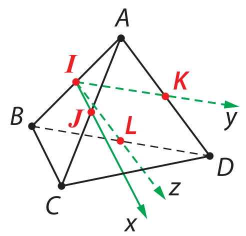
**61** **a.** Dans le repère : $A(0\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $D(1\,;0\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(0\,;1\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$, $H(1\,;0\,;1)$ et $O(0{,}5\,;0{,}5\,;0{,}5)$.
**b.** Dans le repère : $A(0\,;0\,;0)$, $B(-1\,;1\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $D(1\,;0\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(-1\,;1\,;1)$, $G(0\,;1\,;1)$, $H(1\,;0\,;1)$ et $O(0\,;0{,}5\,;0{,}5)$.
**c.** Dans le repère : $A(-0{,}5\,;-0{,}5\,;-0{,}5)$, $B(-1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $D(0{,}5\,;0{,}5\,;-0{,}5)$, $E(0\,;-1\,;0)$, $F(-0{,}5\,;-0{,}5\,;0{,}5)$, $G(0{,}5\,;0{,}5\,;0{,}5)$, $H(1\,;0\,;0)$ et $O(0\,;0\,;0)$.

**62** **1** On a le dessin suivant :




$I(0{,}5\,;0\,;0)$, $J(0\,;0{,}5\,;0)$ et $K(0\,;0\,;0{,}5)$.

**2** On a le dessin suivant :




$A(0\,;1\,;-1)$, $B(0\,;-1\,;1)$, $C(2\,;-1\,;1)$ et $D(0\,;1\,;1)$.

## Calculs sur les coordonnées

**63** **1** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-2\\10\end{pmatrix}$.

**2** $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$. Donc $ABCD$ est un trapèze.

**64** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-2\\7\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-7\\11\\-7\end{pmatrix}$

et $-3\overrightarrow{MP}+4\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}10\\-17\\8\end{pmatrix}$.

**65** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

**66** **1** Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées $(1\,;3\,;1)$.

**2** ▶ $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-x_D\\4-y_D\\3-z_D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=5\\z_D=1\end{cases}.$$

▶ $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1+x_D}{2}=1\\\dfrac{1+y_D}{2}=3\\\dfrac{1+z_D}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=5\\z_D=1\end{cases}.$

Donc le point $D$ a pour coordonnées $(1\,;5\,;1)$.

**3** $ABDE$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x_E\\5-y_E\\1-z_E\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=3\\y_E=6\\z_D=-1\end{cases}.$$

**67** **1** Le point $I$ a pour coordonnées $(-1{,}5\,;2{,}5\,;3)$.
Le point $J$ a pour coordonnées $(2{,}5\,;-0{,}5\,;0)$.
Le point $G$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{2-1+3}{3}\,;\frac{-5+2+4}{3}\,;\frac{1+4-1}{3}\right),$$

soit $\left(\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right)$.

Les coordonnées du point $K$ vérifient :

$$\begin{pmatrix}x_K+2\\y_D-3\\z_D-2\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\-\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Donc le point $K$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

**2** $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\-3\\-3\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

Donc le point $K$ appartient au segment $[IJ]$.
Plus précisément, $K$ est le milieu du segment $[IJ]$.

## Montrer la colinéarité de deux vecteurs

**68** **a.** Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
**b.** $\vec{u}=(1+\sqrt{2})\times\vec{v}$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**69** **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\12\\3\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$. Donc les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**b.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}114\\39\\-75\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-38\\-13\\25\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$. Donc les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**70** On a : $I(-1;-1;0)$, $G\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ et $K(5;-4;3)$.

Donc $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{BK}=6\overrightarrow{BG}$.

Donc les points $B$, $G$ et $K$ sont alignés.

**71** **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$.

Donc les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

**b.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites $(AB)$ et $(CD)$ ne sont pas parallèles.

**72** On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ de l'espace.

On a : $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$, $P\left(0;\frac{1}{3};1\right)$, $Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$ et $K\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{IK}$.

Donc les points $I$, $J$ et $K$ sont alignés.

## Montrer la coplanarité de vecteurs ou de points

**73** **1** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-11\\1\\5\end{pmatrix}$.

**2** Les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe des réels $a$ et $b$ tels que $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ ou encore il existe des réels $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{cases}-3a-4b=-11\\a-4b=1\\2a-2b=5\end{cases}.$$

**3** On soustraie les deux premières lignes du système précédent :

$$\begin{cases}-3a-4b=-11\\a-4b=1\\2a-2b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a=-12\\a-4b=1\\2a-2b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

**74** **1** Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, si, et seulement si, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$, c'est-à-dire il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{cases}4a+b=5\\2a-3b=13\\-3a+4b=-18\end{cases}.$$

**2** Le logiciel a résolu le système et a obtenu comme solution $a=2$ et $b=-3$. Donc $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

**75** **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$.

Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+3b=-4\\2a-2b=5\\-6a-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-2\end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$. Donc les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

**b.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\\frac{1}{2}\\-5\end{pmatrix}$.

Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}-7a-5b=4\\a=\frac{1}{2}\\-a+3b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

**76** **1** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan.

**2** $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\overrightarrow{OA}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b=-1\\4a-4b=0\\-2a-4b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{6}\\b=-\frac{1}{6}\end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Donc les points $O$, $A$, $B$ et $C$ sont coplanaires, soit le point $O$ appartient au plan $(ABC)$.

**77** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\\17\end{pmatrix}$. Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-b=3\\2b=6\\4a+3b=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+3\vec{v}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Donc le point $B$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

**78** Dans le repère $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$, on a : $A(0;0;1)$, $B(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, $K\left(\frac{3}{4};0;0\right)$ et $L\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5};0\right)$.

Donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}b = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{2}{3}a = \dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{1}{6}a - \dfrac{1}{2}b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ b = \dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} + \frac{4}{5}\overrightarrow{IK}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.
Donc les points $I$, $J$, $K$ et $L$ sont coplanaires.

## Représentations paramétriques

**79** **a.** $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + 3t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

**80** **a.** La droite $\mathcal{D}_1$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passe par les points de coordonnées $(1;2;0)$ et $(2;2;3)$.
**b.** La droite $\mathcal{D}_2$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passe par les points de coordonnées $(-1;1;4)$ et $(1;0;7)$.

**81** **1** Le point $A$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ (correspond au paramètre $t = 1$). Le point $B$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ (correspond au paramètre $t = -0{,}5$). Le point $C$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.
**2** La parallèle à $\mathcal{D}$ passant par le point $D$ admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \quad , \ t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

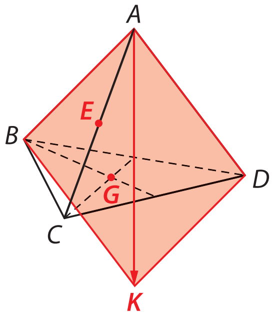
**82** **1** **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan.
**b.** Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient au plan $(ABC)$
$\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires
$\Leftrightarrow$ il existe deux réels $t$ et $u$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow$ il existe deux réels $t$ et $u$ tels que :

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels $t$ et $u$ tels que $\begin{cases} x = 2 + t + 3u \\ y = 1 - u \\ z = 3t \end{cases}$.

**2** $D \in (ABC)$ avec $t = 2$ et $u = -1$ ;
$E \in (ABC)$ avec $t = 2$ et $u = 1$ ;
$F \in (ABC)$ ;
$G \in (ABC)$ avec $t = 1$ et $u = 1$.

**83** On a le dessin suivant :




**1** Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, le point $G$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ et le point $E$ a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{GE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Donc la droite $(GE)$ admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{t}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{6}, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{t}{3} \end{cases}$$

Le point $K$ a pour coordonnées $(1;0;1)$.

Or, $\begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{t}{3} = 1 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{6} = 0 \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{t}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$

Donc $K \in (GE)$ (correspond au paramètre $t = -2$).

**2** Le système $\begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{t}{3} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{6} = 0 \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{t}{3} = 0 \end{cases}$ n'admet pas de solution.

Donc $F \notin (GE)$.

## Positions relatives

**84** **1** La droite $\mathcal{D}_1$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la droite $\mathcal{D}_2$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles.
**2** **a.** En utilisant le résultat du logiciel, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes, au point de paramètre $t = 1$ sur $\mathcal{D}_1$, et $u = 2$ sur $\mathcal{D}_2$, c'est-à-dire au point de coordonnées $(1;0;7)$.

**b.** $\begin{cases} -1+2t=3-u & L_1 \\ 1-t=-4+2u & L_2 \\ 3+4t=9-u & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2t=3-u \\ 2-2t=-8+4u \\ 4+2t=6 \end{cases}$

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2t=3-u \\ 1=-5+3u \\ t=1 \end{cases}$

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2t=3-u \\ u=2 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ u=2. \end{cases}$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc coplanaires et sécantes au point de coordonnées $(1;0;7)$.

**85** La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $(AB)$ par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix}$. Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ces droites ne sont donc pas parallèles.
De plus, $(AB)$ admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2-3t \\ y=2t \\ z=3-3t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}.$$

On résout :

$$\begin{cases} 2-3t=4+2u \\ 2t=1-u \\ 3-2t=-2+u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ u=-7 \end{cases}.$$

On obtient : $\begin{cases} x=2-3\times4=-10 \\ y=2\times4=8 \\ z=3-3\times4=-9 \end{cases}$.

Les droites $(AB)$ et $\mathcal{D}$ sont donc sécantes au point de coordonnées $(-10;8;-9)$.

**86** **1** Les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont dirigées respectivement par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$. Elles sont donc non parallèles.
On résout :

$$\begin{cases} 5+t=3+2u \\ 1-t=2+u \\ -3+t=-6+5u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{4}{3} \\ u=\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont donc sécantes au point de paramètre $t=-\dfrac{4}{3}$ sur $\mathcal{D}$ et $u=\dfrac{1}{3}$ sur $(d)$, c'est-à-dire au point de coordonnées $\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{7}{3};-\dfrac{13}{3}\right)$.

**2** Les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont dirigées respectivement par les vecteurs $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$. Ces vecteurs étant colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont donc parallèles et coplanaires.
De plus, le point de coordonnées $(0;5;1)$, appartenant à $(d)$, appartient aussi à $\mathcal{D}$ (correspondant à $t=1$).
On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont confondues.

**3** Les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont dirigées respectivement par les vecteurs $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$. Elles sont donc non parallèles.

De plus, le système $\begin{cases} -1+2t=3-u \\ 4-t=1+2u \\ 3+t=5+2u \end{cases}$ n'admet pas de solution. Donc les droites $\mathcal{D}$ et $(d)$ ne sont pas sécantes.
On en déduit que les droite $\mathcal{D}$ et $(d)$ sont non coplanaires.

**87** **1** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc, les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

**2** $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$.

La droite $(DE)$ est parallèle au plan $(ABC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
On résout donc :

$$\overrightarrow{DE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=5 \\ 3a+2b=3 \\ -4a-4b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Donc $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc la droite $(DE)$ est parallèle au plan $(ABC)$.

## Prépa Bac

## Exercices guidés

**88** **1** Faux.

On résout $\begin{cases} 1+t=5 \\ -2-t=3 \\ 4+2t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-5 \\ t=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Le système n'admet pas de solution.
**2** Faux. La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{v}$.

**3** Vrai. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites $(AB)$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.
La droite $(AB)$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1-u \\ y=-1+u, \ u\in\mathbb{R}. \\ z=2-3u \end{cases}$$

Or, le système $\begin{cases} 1+t=1-u \\ -2-t=-1+u \\ 4+2t=2-3u \end{cases}$ n'admet pas de solution. Donc les droites $(AB)$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.
On en déduit que les droites $(AB)$ et $\mathcal{D}$ sont non coplanaires.

**4** Vrai. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\vec{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

Or, $\vec{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+4b=1\\a+4b=-1\\-3a-3b=2\end{cases}$.

Ce système n'admet pas de solution.

Donc la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan $(ABC)$, donc elle est sécante au plan $(ABC)$ en un point.

**89** **A. a.** Par définition, $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DF}$.

Donc en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}.$$

En utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}.$$

Donc $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PA}$.

Alors, par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PA}\right) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}.$$

Donc $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}$.

**b.** Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$, on a :

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}.$$

Donc, par la relation de Chasles, $\frac{1}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\frac{1}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

**c.** En utilisant les questions **a.** et **b.**, et la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PE}.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PE}$ sont colinéaires et les points $P$, $Q$ et $E$ sont alignés.

**d.** Le point $Q$ appartient donc à la droite $(PE)$ et donc au plan $(APE)$.

Donc les points $A$, $E$, $P$ et $Q$ sont coplanaires.

**B. a.** $D(0\,;1\,;0)$ et $F(1\,;0\,;1)$.

Comme $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DF}$, on a : $\begin{cases}x_Q = \frac{1}{4}\\y_Q - 1 = -\frac{1}{4}\\z_q = \frac{1}{4}\end{cases}$.

Donc $Q\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

**b.** On résout :

$$\overrightarrow{AQ} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{4}\\\alpha = \frac{3}{4}\\\beta = \frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{3}{4}\\\beta = \frac{1}{4}\end{cases}.$$

**c.** D'après la question **b.**, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

Donc les points $A$, $E$, $P$ et $Q$ sont coplanaires.

**90** **1** Par définition, $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Donc $I\left(0\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$ et $I'\left(0\,;0\,;\frac{1}{3}\right)$.

De même, $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CJ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, avec $A(0\,;0\,;1)$ et $C(1\,;0\,;0)$. Donc $J\left(\frac{1}{3}\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$ et $J'\left(\frac{2}{3}\,;0\,;\frac{1}{3}\right)$.

De même, $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DK'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, avec $A(0\,;0\,;1)$ et $D(0\,;1\,;0)$.

Donc $K\left(0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ et $K'\left(0\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**2 a.** La droite $(CI)$ passe par le point $C(1\,;0\,;0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Elle admet donc comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x = 1-t\\y = 0\\z = \frac{2t}{3}\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

La droite $(BJ')$ passe par le point $B(0\,;0\,;0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BJ'}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Elle admet donc comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x = \frac{2u}{3}\\y = 0\\z = \frac{u}{3}\end{cases},\ u \in \mathbb{R}.$$

**b.** On résout : $\begin{cases}1-t = \frac{2u}{3}\\0=0\\\frac{2t}{3} = \frac{u}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \frac{3}{7}\\u = \frac{6}{7}\end{cases}$.

Donc le point $E$ a pour coordonnées :

$$\left(1-\frac{3}{7}\,;0\,;\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}\right),\ \text{soit}\ \left(\frac{4}{7}\,;0\,;\frac{2}{7}\right).$$

**3** La droite $(BK)$ admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases}x = 0\\y = \frac{t}{3}\\z = \frac{2t}{3}\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

La droite $(DI')$ admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - u \\ z = \dfrac{u}{3} \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$.

On résout : $\begin{cases} 0 = 0 \\ \dfrac{t}{3} = 1 - u \\ \dfrac{2t}{3} = \dfrac{u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{7} \\ u = \dfrac{6}{7} \end{cases}$.

Donc le point $G$ a pour coordonnées :

$$\left(0\,;\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\,;\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}\right),\ \text{soit}\ \left(0\,;\frac{1}{7}\,;\frac{2}{7}\right).$$

**4** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\-\frac{1}{7}\\0\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{GE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$. La droite $(EG)$ est donc parallèle au plan $(BCD)$.

De même, $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$. La droite $(GF)$ est donc parallèle au plan $(BCD)$. On en déduit que le plan $(EFG)$ est parallèle au plan $(BCD)$.

## Exercices d'entraînement

**91** **1** Faux. Contre-exemple : prendre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ strictement parallèles.

**2** Vrai. Voir la Propriété d'incidence, page 260 du manuel.

**3** Vrai. On raisonne par l'absurde en faisant l'hypothèse que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas sécants, c'est-à-dire en supposant que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

Alors, tout vecteur dirigeant $\mathcal{D}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}_2$ (voir Conséquence 3, page 262 du manuel) et donc du plan $\mathcal{P}_1$, puisque les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

Alors la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}_1$. Impossible !

On en déduit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

**92** **1** **a.** ▸ $I$ est le milieu du segment $[AB]$. Donc $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

▸ $J$ est le milieu du segment $[CD]$. Donc $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

▸ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AI}$. Donc $\begin{cases} x_E - 1 = 0 \\ y_E = 0 \\ z_E = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Donc $E\left(1\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$.

▸ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BI}$. Donc $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F - 1 = 0 \\ z_F = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Donc $F\left(0\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

**b.** Le milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+0}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\,;\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right)$, soit $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$. C'est donc le point $J$.

Ainsi, $J$ est le milieu du segment $[EF]$.

**2** **a.** En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Et $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{JF}$.

**b.** On en déduit que le point $J$ est le milieu du segment $[EF]$.

**93** **1** La droite $(MN)$ et le plan $(CEF)$ sont :

– soit parallèles, dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires ;

– soit sécants en un point, dans le cas contraire.

La position relative de la droite $(MN)$ et le plan $(CEF)$ revient donc à étudier la coplanarité éventuelle des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$.

**2** Comme $\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{HE}$, on a : $M(1-t\,;0\,;1)$.

Comme $\overrightarrow{GN} = t\overrightarrow{GC}$, on a : $N(1\,;1\,;1-t)$.

Ainsi, $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}t\\1\\-t\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

**3** On résout : $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{CF} + b\overrightarrow{EF}$

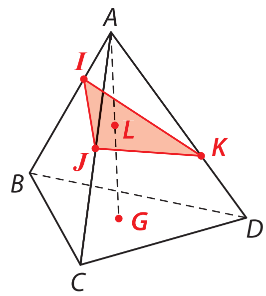
$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = t \\ b = 1 \\ a = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -t \\ b = 1 \end{cases}$.

Donc $\overrightarrow{MN} = -t\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EF}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.

**4** D'après la question **3**, le droite $(MN)$ est parallèle au plan $(CEF)$.

**94** On a le dessin suivant :




**1** $ABCD$ étant un tétraèdre, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires. Donc $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace.

**2** On obtient : $I\left(\frac{1}{4}\,;0\,;0\right)$, $J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$, $K\left(0\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$ et $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

Donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AG}$, on a :

$$L\left(\frac{k}{3}\,;\frac{k}{3}\,;\frac{k}{3}\right)\ \text{et}\ \overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}\frac{k}{3}-\frac{1}{4}\\\frac{k}{3}\\\frac{k}{3}\end{pmatrix}.$$

**3** Comme le point $L$ appartient au plan $(IJK)$, les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que : $\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$.

Alors, $\begin{cases} -\dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{4} = \dfrac{k}{3} - \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{a}{2} = \dfrac{k}{3} \\ \dfrac{2b}{3} = \dfrac{k}{3} \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} a = \dfrac{2k}{3} \\ b = \dfrac{k}{2} \\ -\dfrac{k}{6} - \dfrac{k}{8} = \dfrac{k}{3} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

On en déduit que $k = \dfrac{2}{5}$, $a = \dfrac{4}{15}$ et $b = \dfrac{1}{5}$.

**4** En utilisant la question **3**, $\overrightarrow{AL} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AG}$.

Le point $L$ se trouve aux 2/5e du segment $[AG]$ en partant du point $A$.

**95** **1** Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, puisque par définition d'un tétraèdre, les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires. Ainsi $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.

**2** $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $D(0\,;0\,;1)$.

La formule des milieux donne :

$$I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right),\ J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right).$$

$\overrightarrow{AD'} = 2\overrightarrow{AI}$, donc $D'(1;1;0)$ et de même $B'(0\,;1;1)$ et $C'(1\,;0\,;1)$.

**3 a.** Un vecteur directeur de la droite $(BB')$ est $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et cette droite passe par $B(1;0\,;0)$, d'où une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

**b.** $(CC') : \begin{cases} x = u \\ y = 1 - u \\ z = u \end{cases},\ u \in \mathbb{R}$

et $(DD') : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 - s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}$.

**4 a.** Le résultat présenté montre que les droites $(BB')$ et $(CC')$ ont en commun le point de paramètre $\dfrac{1}{2}$ pour chacune des deux représentations, c'est-à-dire le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

**b.** Appelons $G$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

On vient de voir qu'il est commun aux droites $(BB')$ et $(CC')$. Or, il est obtenu pour la valeur $s = \dfrac{1}{2}$ dans la représentation de $(DD')$.

$G$ est donc le point de concours des trois droites.

**96** **1** Soient deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dans l'espace.

- On suppose que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles.

Il existe donc un plan qui les contient et, dans ce plan, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles.

Or, dans un plan, deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont même vecteur directeur.

Ce vecteur du plan est aussi un vecteur de l'espace.

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont donc même vecteur directeur.

- On suppose que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont même vecteur directeur $\vec{u}$.

Soient un point $A$ de $\mathscr{D}_1$ et un point $B$ de $\mathscr{D}_2$. Soit le point $C$ de $\mathscr{D}_1$ tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les points $A$, $B$ et $C$.

Comme $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$, le vecteur est un vecteur du plan $\mathscr{P}$.

Or, la droite $\mathscr{D}_1$ est la droite passant par le point $A$ (appartenant à $\mathscr{P}$) et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, et la droite $\mathscr{D}_2$ est la droite passant par le point $B$ (appartenant à $\mathscr{P}$) et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

On en déduit que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont contenues dans le plan $\mathscr{P}$ et ont même vecteur directeur dans ce plan.

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc parallèles.

**2** La droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles

$\Leftrightarrow$ il existe une droite $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{P}$ telle que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles

$\Leftrightarrow$ il existe une droite $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{P}$ telle que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont même vecteur directeur (d'après la question **1**).

Donc :

- si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles, alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ dirige une droite de $\mathscr{P}$, donc un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ ;
- si un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathscr{D}$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$, alors pour tout point $A$ de $\mathscr{P}$, la droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est incluse dans $\mathscr{P}$ et a même vecteur directeur que $\mathscr{D}$, elle est donc parallèle à $\mathscr{D}$. La droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont donc parallèles.

**3 a.** Soient une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ n'ayant aucun point commun.

Soit un point $A$ du plan $\mathscr{P}$. Alors le point $A$ n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

On considère le plan $\Pi$ défini par la droite $\mathscr{D}$ et le point $A$.

Les plans $\mathscr{P}$ et $\Pi$ ont en commun le point $A$ et ne sont pas confondus (car $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n'ont pas de point en commun).

Les plans $\mathscr{P}$ et $\Pi$ sont donc sécants selon une droite $\Delta$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont coplanaires, car incluses dans $\Pi$. Elles sont donc soit parallèles, soit sécantes. Elles ne peuvent être sécantes, car sinon $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ auraient un point commun.

On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont parallèles.

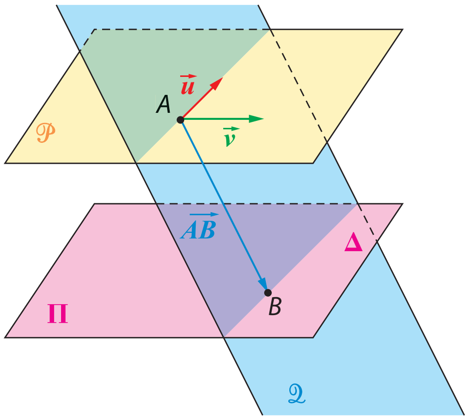
Il existe donc une droite de $\mathscr{P}$ qui soit parallèle à $\mathscr{D}$.

La droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont donc parallèles.

**b.** Soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\Pi$. On suppose que $\mathscr{P}$ et $\Pi$ sont parallèles.

- Si $\mathscr{P}$ et $\Pi$ sont confondus, la propriété est évidente.
- Sinon, $\mathscr{P}$ et $\Pi$ sont strictement parallèles et n'ont pas de point en commun.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires dirigeant le plan $\mathcal{P}$.
Soit un point $A$ du plan $\mathcal{P}$ et un point $B$ du plan $\Pi$. Alors $A \in \Pi$ et $B \in \mathcal{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est donc pas un vecteur du plan $\mathcal{P}$ et n'est donc colinéaire ni avec $\vec{u}$, ni avec $\vec{v}$.
Le plan $\mathcal{Q}$ passant par $B$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ est donc bien défini.




Les plans $\Pi$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas confondus (car $\overrightarrow{AB}$ ne dirige pas $\Pi$ ) et contiennent le point $B$. Ils sont donc sécants selon une droite $\Delta$.
La droite $\Delta$, incluse dans $\Pi$ , n'a pas de point commun avec le plan $\mathcal{P}$. Elle n'a donc pas de point commun avec la droite passant par $A$ et dirigée par $\vec{u}$. Comme ces deux droites sont coplanaires, elles sont parallèles et ont même vecteur directeur.
Donc la droite $\Delta$ est dirigée par $\vec{u}$. On en déduit que $\vec{u}$ est un vecteur du plan $\Pi$.
De la même façon, on montre que $\vec{v}$ est un vecteur du plan $\Pi$.
Or, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. Le plan $\Pi$ est donc dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**97** **1** $A(1\,;0\,;1)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $D(1\,;1\,;1)$, $E(0;0;1)$, $F(0;0;0)$, $G(0;1;0)$, $H(0;1;1)$ et $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

**2** Le milieu du segment $[AG]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, c'est le point $G$.
De la même façon, le point $G$ est le milieu des segments $[BH]$, $[CE]$ et $[DF]$.

**3** Soit $I$ le centre de la face $ABFE$. Comme $ABFE$ est un parallélogramme, $I$ est le milieu de la diagonale $[AF]$ et a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.
Soit $J$ le centre de la face $CDHG$. De la même façon, $J$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;1;\frac{1}{2}\right)$.
Le milieu du segment $[IJ]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, c'est le point $G$.

**98** **1** **a.** Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
**b.** Par définition, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

**2** **a.** D'après les résultats du logiciel, le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est coplanaire avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si, et seulement si, $c = \dfrac{5a+3b}{7}$, c'est-à-dire $5a + 3b - 7c = 0$.
**b.** D'après les résultats du logiciel, $x = \dfrac{a+2b}{7}$ et $y = \dfrac{-3a+b}{7}$.
Donc, dans le cas où les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, on a :
$$\vec{w} = \frac{a+2b}{7}\vec{u} + \frac{-3a+b}{7}\vec{v}.$$

**3** ▸ Pour le vecteur $\vec{w_1}$,
$5a + 3b - 7c = 5\times 8 + 3\times 3 - 7\times 7 = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w_1}$ sont coplanaires, et $\vec{w_1} = \dfrac{8+2\times 3}{7}\vec{u} + \dfrac{-3\times 8+3}{7}\vec{v} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.
▸ Pour le vecteur $\vec{w_2}$,
$5a + 3b - 7c = 5\times(-5) + 3\times 13 - 7\times 2 = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w_2}$ sont coplanaires, et $\vec{w_2} = \dfrac{-5+2\times 13}{7}\vec{u} + \dfrac{-3\times(-5)+13}{7}\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$.
▸ Pour le vecteur $\vec{w_3}$,
$5a + 3b - 7c = 5\times 4 + 3\times 5 - 7\times(-2) = 49 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w_3}$ ne sont pas coplanaires .

**99** **1** $B(0\,;0\,;0)$, $E(0\,;1;1)$ et $C(1;0\,;0)$. Donc par la formule du centre de gravité, $M_0\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**2** **a.** Comme $I$ appartient à la droite $(AB)$, les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires. Donc il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{BI} = t\overrightarrow{BA}$.
De même, il existe un réel $u$ tel que $\overrightarrow{CJ} = u\overrightarrow{CG}$.
**b.** $I(0\,;0\,;t)$ et $J(1;u\,;0)$.
En utilisant la formule des coordonnées du centre de gravité, le point $M$ a pour coordonnées :
$$\left(\frac{0+0+1}{3}\,;\frac{1+0+u}{3}\,;\frac{1+t+0}{3}\right),$$
soit $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1+u}{3}\,;\frac{1+t}{3}\right)$.
**c.** $\overrightarrow{M_0M}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\\ \frac{1+u}{3}-\frac{1}{3}\\ \frac{1+t}{3}-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{M_0M}\begin{pmatrix}0\\ \frac{u}{3}\\ \frac{t}{3}\end{pmatrix}$. On en déduit que $\overrightarrow{M_0M} = \dfrac{u}{3}\overrightarrow{BF} + \dfrac{t}{3}\overrightarrow{BA}$.
**d.** Les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont coplanaires d'après la question **2** **c.**
Le point $M$ appartient donc au plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BA}$.

**3** Soit un point $N$ du plan $\mathcal{P}$. Les vecteurs $\overrightarrow{M_0N}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont alors coplanaires.
Il existe donc des réels $a$ et $b$ tels que :
$$\overrightarrow{M_0N} = a\overrightarrow{BF} + b\overrightarrow{BA}.$$
En posant $I(0\,;0\,;3b)$ et $J(1;3a\,;0)$, on vérifie que $N$ est le centre de gravité du triangle $EIJ$.

Le point $I$ appartenant à la droite $(AB)$ et le point $J$ appartenant à la droite $(CG)$, le point $N$ appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

**100** **1** $A(0\,;0\,;1)$ et $C(1\,;1\,;1)$. Donc $O_1\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.

$E(0\,;0\,;0)$ et $G(1\,;1\,;0)$. Donc $O_2\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

$B(0\,;1\,;1)$, $D(1\,;0\,;1)$ et $E(0\,;0\,;0)$. Donc $G_1\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

$C(1\,;1\,;1)$, $H(1\,;0\,;0)$ et $F(0\,;1\,;0)$. Donc $G_2\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

**2** Les vecteurs $\overrightarrow{AG_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG_2}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc les points $A$, $G_1$, $G_2$ et $G$ sont alignés.

**3** Comme $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$, les points $G_1$ et $G_2$ sont respectivement placés à 1/3 et 2/3 du segment $[AG]$ en partant du point $A$.

## Problèmes

**101** **1** Le point $I$ appartient au segment $[HF]$ et donc au plan $(CFH)$. Le point $I$ appartient au segment $[EG]$ et donc au plan $(AEG)$. Ainsi, le point $I$ est commun aux plans $(CFH)$ et $(AEG)$.
De même, le point $C$ est commun aux plans $(CFH)$ et $(AEG)$.
Donc les plans $(CFH)$ et $(AEG)$ sont sécants selon la droite $(CI)$.

**2** La droite $(AE)$ est contenue dans le plan $(AEG)$, donc le point $J$ aussi.
Le point $J$ appartient donc aux plans $(AEG)$ et $(CFH)$. Il appartient donc à leur intersection $(CI)$.
On en déduit que les points $C$, $I$ et $J$ sont alignés.

**3** Dans le triangle $AJC$, les droites $(EI)$ et $(AC)$ sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, $\frac{JE}{JA}=\frac{EI}{AC}=\frac{1}{2}$.
Donc $JE=\frac{1}{2}JA$.
On en déduit que le point $E$ est le milieu du segment $[AJ]$.

**102** On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS})$ de l'espace.
$S(0\,;0\,;1)$, $B(1\,;0\,;0)$ et $D(0\,;1\,;0)$. Donc $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.
Comme $S(0\,;0\,;1)$ et $C(1\,;1\,;0)$, on a : $E\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
Donc $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. Ainsi, les points $A$, $G$ et $E$ sont alignés.

**103** **1** **a.** $E_1$ admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Donc $E_1$ est la droite passant par le point $(0\,;1\,;0)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

**b.** $E_2$ admet comme représentation paramétrique :
$$\begin{cases}x=t\\ y=u\\ z=1+2t-u\end{cases},\ t\in\mathbb{R} \text{ et } u\in\mathbb{R}.$$
Donc $E_2$ est le plan passant par le point $(0\,;0\,;1)$ et dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

**c.** Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ seul suffit pour exprimer tous les vecteurs « joignant » deux points de $E_1$.
Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ sont nécessaires pour exprimer tous les vecteurs « joignant » deux points de $E_2$.

**d.** L'espace est un ensemble présentant trois degrés de liberté.

**2** ▸ $M(x\,;y\,;z)\in E_3 \Leftrightarrow$ il existe deux réels $t$ et $u$ tels que $\begin{cases}x=1-t\\ y=2+t-2u\\ z=u+3\end{cases}$.
$E_3$ a deux degrés de liberté, $E_3$ est le plan passant par le point $(1;2;3)$ et dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

▸ $M(x\,;y\,;z)\in E_4 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+3z=0\\ 2y+z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+7y\\ y=y\\ z=1-2y\end{cases}$

$E_4$ a un degré de liberté, $E_4$ est la droite passant par le point $(-3\,;0\,;1)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

▸ $M(x\,;y\,;z)\in E_5 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+3z=0\\ 2y+z-1=0\\ x+y+4z-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+7y\\ y=y\\ z=1-2y\end{cases}$.

$E_5$ a un degré de liberté, $E_5$ est la droite passant par le point $(-3\,;0\,;1)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

▸ $M(x\,;y\,;z)\in E_6 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+3z=0\\ x=1-t\\ y=2+t\\ z=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=-3\\ z=-3\\ t=-5\end{cases}$.

$E_6$ a 0 degré de liberté, $E_6$ est le point de coordonnées $(6\,;-3\,;-3)$.

**3** Il semble que le nombre de degré de liberté soit toujours inférieur au nombre d'équations.

**104** ◗ Soit un point $M$ de la droite $\mathcal{D}$ et un point $M'$ de la droite $\mathcal{D}'$.
On pose :
$M(2+t\,;3-2t\,;5-t)$ et $M'(4-3t'\,;5-8t'\,;7-t')$.
Le milieu $I$ du segment $[MM']$ a pour coordonnées :
$$\left(3+\frac{t}{2}-\frac{3t'}{2}\,;4-t-4t'\,;6-\frac{t}{2}-\frac{t'}{2}\right).$$
Il appartient donc au plan $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+\frac{t}{2}-\frac{3t'}{2} \\ y=4-t-4t' \\ z=6-\frac{t}{2}-\frac{t'}{2} \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$.
◗ Réciproquement, soit un point $I$ du plan $\mathcal{P}$, associés aux paramètres $t$ et $t'$.
En posant :
$M(3+t\,;3-2t\,;5-t)$ et $M'(4-3t'\,;5-8t'\,;7-t')$,
le point $I$ est alors le milieu du segment $[MM']$.
Et par construction, $M\in\mathcal{D}$ et $M'\in\mathcal{D}'$.
◗ *Conclusion* : le lieu du milieu des segments $[MM']$ lorsque $M$ décrit $\mathcal{D}$ et $M'$ décrit $\mathcal{D}'$ est le plan $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=3+\frac{t}{2}-\frac{3t'}{2} \\ y=4-t-4t' \\ z=6-\frac{t}{2}-\frac{t'}{2} \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}.$$
C'est le plan qui passe par le point $(3\,;4\,;6)$ et qui est dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

**105** Les points $A$, $B$ et $C$ n'étant pas alignés, ils définissent bien le plan $(ABC)$.
Ce plan n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$, car le point $A'$ est commun aux deux plans. Et $(ABC)$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas confondus, car le point $A$ appartient à $(ABC)$ et n'appartient pas à $\mathcal{P}$.
Donc les plans $(ABC)$ et $\mathcal{P}$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$.
Par définition, $A'$, $B'$ et $C'$ sont communs aux deux plans $(ABC)$ et $\mathcal{P}$. Ils appartiennent donc à la droite $\mathcal{D}$.
Donc les points $A'$, $B'$ et $C'$ sont alignés.

**106** **1** $B(1\,;0\,;0)$, $G(1\,;1\,;1)$, $I\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $J\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right)$.
**2** $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$. Soient deux réels $a$ et $b$.
$$\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BI}+b\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=-\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2}+b=\frac{1}{2}\\ a+b=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}.$$
Donc $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires.
Donc le point $M$ appartient au plan $(BGI)$.
**3** La droite $(HJ)$ n'est pas contenue dans le plan $(BGI)$, car $J$ n'appartient pas au plan $(BGI)$.
De plus, le point $M$ appartient au segment $(HJ)$ et donc à la droite $(HJ)$. Il appartient aussi au plan $(BGI)$.
Donc la droite $(HJ)$ et le plan $(BGI)$ sont sécants au point $M$.

**107** **1** Le plan $(HIM)$ coupe les plans parallèles $(EFG)$ et $(ABC)$ selon les droites $(HN)$ et $(DM)$. Donc les droites $(HN)$ et $(DM)$ sont parallèles. Et, par le théorème de Thalès, comme par définition le point $H$ est le milieu de $[DI]$, le point $N$ est le milieu du segment $[IM]$.
De plus, $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$.
Donc le point $O$ est le milieu du segment $[BI]$.
La droite des milieux $(NO)$ est donc parallèle à la droite $(MB)$ et donc $(BC)$ (sous réserve d'existence).
**2** Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à la droite $(BC)$ passant par le point $O$.
◗ D'après la question **1**, pour tout point $M$ de la droite $(BC)$, le point $N$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
◗ Réciproquement : soit un point $N$ de la droite $\mathcal{D}$. Le point $N$ appartient alors au plan $(EFG)$.
On définit le point $M$ comme intersection de la droite $(IN)$ avec le plan $(ABC)$. De la même façon qu'à la question **1**, on montre que la droite $(BM)$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et donc à la droite $(BC)$ (sous réserve d'existence).
Le point $M$ appartient donc à la droite $(BC)$.
◗ *Conclusion* : l'ensemble des points $N$ lorsque $M$ décrit la droite $(BC)$ est la droite $\mathcal{D}$, parallèle à la droite $(BC)$ passant par le point $O$.

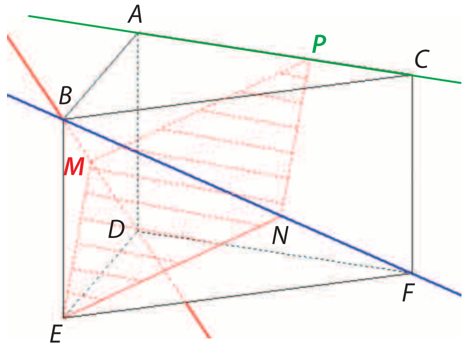
**108** **1** **a.** En utilisant la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'},$$
et $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$.
Or,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{BB'}&=(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'B'})\\&=(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{C'B'})+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{CC'}.\end{aligned}$$
Donc $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{CC'}$, car $\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{C'B'}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.
Et comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, on obtient que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.
On en déduit que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.
**b.** Les droites $(IJ)$ et $(LK)$ sont donc parallèles. On en déduit que les points $I$, $J$, $K$ et $L$ sont coplanaires.
**2** Les points $O$, $O'$ et $O''$ sont les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[A'C']$ et $[IK]$.
En utilisant la relation de Chasles :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO''}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IO''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IK}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IK}\text{, et}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{O''O'} = \overrightarrow{O''K} + \overrightarrow{KC'} + \overrightarrow{C'O'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{IK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Donc $\overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{O''O}$. On en déduit que le point $O''$ est le milieu du segment $[OO']$.

**109** **1** **a.** et **b.** On obtient :




On conjecture que le lieu du point $P$ lorsque $M$ décrit la droite $(BD)$ est la droite $(AC)$.

**2** **a.** $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BD}$, on a :

$$M(3-3a\,;0\,;3-3a).$$

$\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{FN} = a\overrightarrow{FB}$, on a : $N(3a\,;4-4a\,;3a)$.

**b.** Comme $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{EM}$, on a :

$$\begin{pmatrix}x_P - 3a\\ y_P - 4 + 4a\\ z_P - 3a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-3a-3\\0\\3-3a\end{pmatrix}.$$

Donc $P(0\,;4-4a\,;3)$.

**3** D'après la question **2** **b.**, $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}0\\4-4a\\0\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AP} = (1-a)\overrightarrow{AC}$.

L'ensemble des points $P$ lorsque $a$ décrit $\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AP}(1-a)\overrightarrow{AC}$ est la droite $(AP)$.

Donc le lieu du point $P$ lorsque $M$ décrit la droite $(BC)$ est la droite $(AC)$.

**4** Par définition, le quadrilatère $ENPM$ est un parallélogramme. Donc le milieu $I$ du segment $[MN]$ est le milieu du segment $[EP]$.

On note $I_0$ le milieu du segment $[AE]$.

Par le théorème de la droite des milieux, lorsque $P$ décrit la droite $(AC)$, le point $I$ décrit la droite passant par $I_0$ et parallèle à la droite $(AC)$.

Cette droite est contenue dans le plan $(AEC)$.

Donc lorsque $M$ décrit la droite $(BD)$, $P$ décrit la droite $(AC)$ et le milieu du segment $[MN]$ décrit une droite du plan $(AEC)$.

## Prendre des initiatives

**110** On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ de l'espace.

Alors, $I(1\,;1\,;8)$, $J(4\,;4\,;8)$, $I'(8\,;3\,;1)$ et $J'(4\,;0\,;1)$.

Donc la droite $(II')$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+7t \\ y = 1+2t,\ t\in\mathbb{R}. \\ z = 8-7t \end{cases}$

Et la droite $(JJ')$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4-4u,\ u\in\mathbb{R}. \\ z = 8-7u \end{cases}$

Le système : $\begin{cases} 1+7t = 4 \\ 1+2t = 4-4u \\ 8-7t = 8-7u \end{cases}$ n'admet pas de solution.

Donc les droites $(II')$ et $(JJ')$ ne sont pas sécantes.

Donc les aiguilles ne se touchent pas.

## Pistes pour l'accompagnement personnalisé

### Revoir les outils de base

**111** **Partie A**

**1** **a.** dans le triangle $BEG$, $I$ et $J$ sont les milieux des segments $[BE]$ et $[BG]$, d'où $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{IJ}$ ;

**b.** dans $BGD$ et $BED$ : $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{LI}$ ;

**c.** dans $AHF$ : $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{ML} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ ;

**d.** on considère le parallélogramme $ABGH$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{LJ}$ ;

**e.** dans le triangle $AHF$, avec $L$, $M$ et $I$, les milieux des cotés, on dispose du parallélogramme $ALMI$ (situation classique) et donc $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA}$.

**2** avec $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{LI}$ on a déjà $IJKL$ parallélogramme.

Comme $KJ = \frac{1}{2}DB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ et $IJ = \frac{1}{2}EG = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, on obtient $IJKL$ losange.

Enfin, avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{LJ}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BC}$, on a $LJ = IK$ et $IJKL$ est donc aussi un rectangle : c'est un carré.

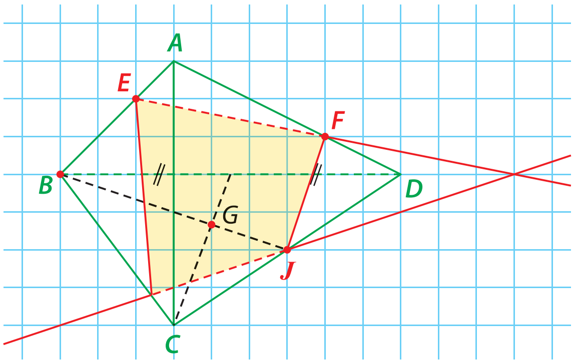
**Partie B**

**a.** strictement parallèles ;
**b.** sécantes au centre du cube ;
**c.** non coplanaires ;
**d.** parallèles disjoints ;
**e.** sécants selon $(EG)$ ;
**f.** parallèles disjoints ;
**g.** sécants en $A$ ;
**h.** parallèles, $(MN)$ est incluse dans $(DHF)$.

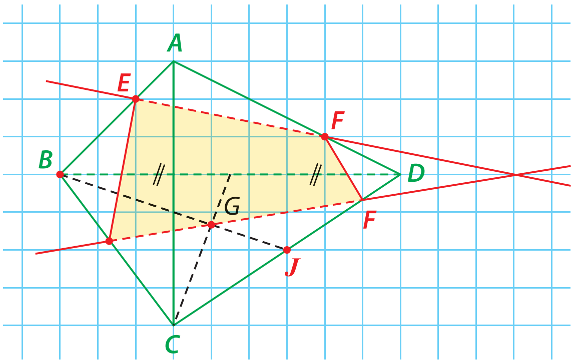
**112** **1** **a.** Droite $(BC)$ ; **b.** $\{K\}$ ;
**c.** la parallèle à la droite $(BC)$ passant par $A$ ;
**d.** la parallèle à la droite $(BK)$ passant par $A$, car $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK}$.
**2** **a.** $(BC) \subset (BCD)$ ;
**b.** inclus dans $(BCD)$ ;
**c.** strictement parallèle à $(BCD)$ ;
**d.** strictement parallèle à $(BCD)$.

## Les savoir-faire du chapitre

**113** **1**




**2**




**3** Comme $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$, on a : $\overrightarrow{GE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ et les droites $(GE)$ et $(AJ)$ sont parallèles.
La droite $(FH)$ est l'intersection du plan $(EFG)$ avec le plan $(ACD)$ ; or les plans $(EFG)$ et $(ACD)$ contiennent respectivement les droites $(EG)$ et $(AJ)$ qui sont parallèles : le théorème du toit permet de conclure que leur intersection $(FH)$ est parallèle à ces deux droites.

**114** **1** On se place dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BG}\,;\overrightarrow{BA})$.
$I$ est le centre de gravité de $DEH$ et $J$ celui de $BAG$, d'où $I\left(1\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ et $J\left(0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ ; enfin $O$ est le centre du cube, donc $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

On obtient : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, donc

$\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{OI}$ ce qui prouve l'alignement des points $O$, $I$ et $J$.

**2** **a.** On cherche à exprimer $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, en fonction de $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Cela conduit au système d'inconnues $t$ et $s$ :

$$\begin{cases}\frac{1}{2} = 0t + s\\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}s\\ -\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s = \frac{1}{2}\\ t = 0\\ s = -\frac{3}{2}\end{cases}$$

ce qui est impossible : $A$, $J$, $O$ et $C$ ne sont pas coplanaires.

**b.** On fait de même avec $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases}\frac{3}{4} = n\\ \frac{3}{4} = \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\\ -\frac{3}{4} = -\frac{2}{3}m + \frac{1}{3}n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n = \frac{3}{4}\\ m = \frac{3}{2}\\ \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n = \frac{3}{4}\\ m = \frac{3}{2}\end{cases}$$

Les quatre points $A$, $J$, $I$ et $K$ sont coplanaires.
*Remarque* : on pouvait aussi considérer le milieu $A'$ de $[BG]$ et le milieu $H'$ de $[DE]$ ; il est facile de voir que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{H'H}$, et par suite le plan $(AJI)$, est aussi le plan $(AA'H'H)$ qui contient $O$, $H$ et leur milieu $K$.

**115** **1** **b.** **2** **b. c.** et **d.** **3** **b.** et **c.**
**4** **c.** (Sécantes en $K(5\,;12\,;-5)$.)

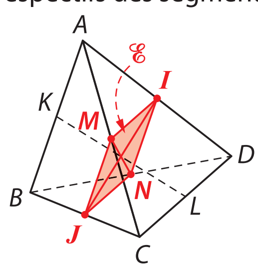
## Approfondissement

**116** **1** $I$ est obtenu pour $R = A$ et $S = D$, $J$ est obtenu pour $R = B$ et $S = C$.
$G$ est aussi le milieu du segment joignant les milieux $K$ et $L$ de $[AB]$ et $[CD]$, car $IKJL$ est un parallélogramme, donc $G$ appartient à $\mathscr{E}$.
**2** $R(a\,;0\,;0)$, pour $S$ on peut écrire :
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} = b\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{AC}$ ; d'où :
$\overrightarrow{AS} = b\overrightarrow{AC} + (1-b)\overrightarrow{AD}$ et $S(0\,;b\,;1-b)$.

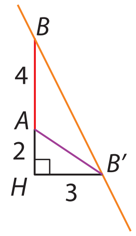
$M\left(\frac{a}{2}\,;\frac{b}{2}\,;\frac{1}{2}-\frac{b}{2}\right)$, $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ avec $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\ \frac{b}{2}\\ -\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ ;

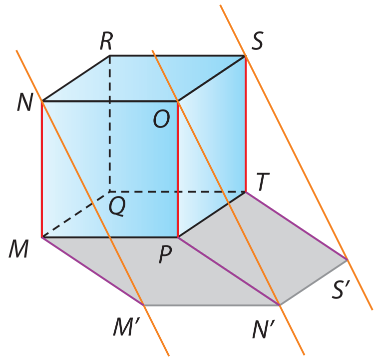
$\overrightarrow{IM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1/2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}$.

$a$ et $b$ varient dans l'intervalle $[0\,;1]$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc porté par le plan passant par $I$, dirigé par les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Il s'agit de l'intérieur, bords compris, du parallélogramme $IMJN$, où $M$ et $N$ sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

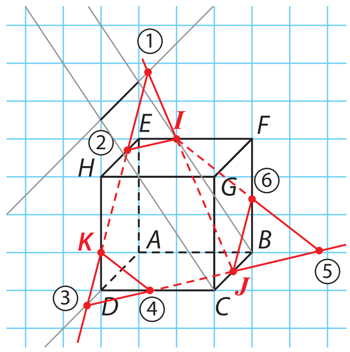



**117** Les rayons du Soleil sont parallèles, les arêtes verticales du cube sont parallèles au bâton qui indique l'ombre : les plans $(ABB')$ et $(STS')$ sont donc parallèles, coupés par le plan du sol en deux droites parallèles : $(AB')$ et $(TS')$ sont donc parallèles (ombres des arêtes verticales).




**118**




**119** **1** $\begin{cases} 2 = -2t + s \\ 0 = t - s \\ 3 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = s \\ 2 = -2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 2 = -1.$

Les trois vecteurs forment une famille libre (ils sont non coplanaires).

**2** On remarque que $2\vec{v} - \vec{u} = \vec{w}$ les trois vecteurs forment une famille liée.

**3** **a.** Ce sont trois vecteurs coplanaires.

**b.** Soit on a pu trouver parmi les quatre vecteurs, trois vecteurs non coplanaires, qui forment alors un repère de l'espace et le quatrième vecteur se décompose sur les trois non coplanaires, soit on ne réussit pas à en trouver trois non coplanaires, ce qui signifie que trois d'entre eux forment une famille liée. On peut alors écrire :

$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ et donc aussi $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} + 0\vec{d}$.

Ce qui montre que la famille $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ est aussi liée.