

Produit scalaire de l'espace



Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire		On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan.
Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés.		
Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	• Déterminer si un vecteur est normal à un plan. ■ démo BAC Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. ■ démo BAC Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. • Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : – déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; – étudier la position relative de deux plans.	On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires. (AP) <i>Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.</i> <i>Intersection de trois plans.</i>

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

2. Intentions des auteurs

Dans ce « Produit scalaire de l'espace » :

- on étend à l'espace la notion de produit scalaire de deux vecteurs du plan ;
- on précise la notion d'orthogonalité de deux vecteurs de l'espace ;
- on applique l'orthogonalité de deux vecteurs pour caractériser les équations cartésiennes de plan.

À ce stade, l'élève possède tous les outils pour étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

De nombreux QCM et Vrai-faux permettent de faire le point rapidement sur la compréhension du cours et aussi la mise en place de raisonnements par contre-exemple.

Tout au long de ce chapitre se précise l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique ou de programmation. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel doit permettre, en fonction des élèves, de surpasser les difficultés du calcul algébrique.

Partir d'un bon pied

Objectif

Réactiver chez l'élève la notion de droite de l'espace à travers une représentation paramétrée, l'utilisation du produit scalaire dans le plan.

A 1 b. 2 c. 3 b. 4 b. et c.

B a. -6 . b. $AB^2 = 16$. c. 0 .

d. $4 \times 2 \times \cos 60^\circ = 4$.

e. $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 + 2 = -2$. f. $-\overrightarrow{AB}^2 = -9$.

C $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$
 $= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{6}a^2$

et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \cdot AJ \times \cos \widehat{IAJ}$,
 donc :

$$\cos \widehat{IAJ} = \frac{\frac{5}{6}a^2}{\sqrt{\frac{5}{4}a} \times \sqrt{\frac{10}{9}a}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

donc $\widehat{IAJ} = \frac{\pi}{4}$ rad.

Découvrir

Activité 1 Produit scalaire dans le plan...dans l'espace

Objectif : Repérer un plan de l'espace pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs de ce plan.

a. Dans le plan (ABC) , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 16$.

b. Dans le plan (BCF) , $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = 8$.

c. Dans le plan (HDA) , $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.

d. Dans le plan (HDA) , $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{KH} = 0$, car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

e. Dans le plan (EFG) ,

$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF} = 16.$$

f. Dans le plan (EBG) ,

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GI} = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 16.$$

Activité 2 Droite perpendiculaire à un plan

Objectif : Dans cette activité, on démontre le théorème fondamental qui définit la droite perpendiculaire à un plan en un point donné.

1 Le point A est un point de d différent de O. Dans le triangle ABC, en appliquant le théorème de la médiane, on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ (1).

2 En appliquant le même théorème dans le triangle OBC, on obtient : $OB^2 + OC^2 = 2OI^2 + \frac{BC^2}{2}$ (2).

3 Dans OAB, rectangle en O, on a $AB^2 = OB^2 + OA^2$ (3).

► Dans OAC rectangle en O, on a $AC^2 = OC^2 + OA^2$ (4).

► En reportant (3) et (4) dans (1), puis en soustrayant (2), puis en divisant par 2 on obtient : $OA^2 = AI^2 - OI^2$, soit $AI^2 = OA^2 + OI^2$. Le triangle AOI est rectangle en O, donc la droite d est perpendiculaire à la droite (OI).

4 Soit une droite d , perpendiculaire à deux droites du plan $\mathcal{P}$ sécantes en O, alors toute droite admet une parallèle passant par O et on se retrouve dans le cas précédent. Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan, elle est perpendiculaire à toute droite de $\mathcal{P}$ passant par O : on dit que $\mathcal{P}$ est **perpendiculaire à d** .

Activité 3 Plan médiateur

Objectif

Cette activité explore une situation classique que l'on rencontre très fréquemment avec la notion de médiatrice dans le plan.

1 Soit M un point de $\mathcal{P}$. On a donc $AM = BM$, donc le triangle AMB est isocèle, donc (IM) est perpendiculaire à la droite (AB), donc M est un point de $\mathcal{P}'$.

On a ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

2 Soit N un point de $\mathcal{P}'$. La droite (IN) est la médiatrice de [AB], donc $MA = MB$ et N est un point de $\mathcal{P}$. On a donc $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

On a $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ (démonstration par double inclusion).

E Application : appelons a la longueur du côté du cube.

a. Les segments [BG], [GD] et [DB] sont les diagonales de carrés de côtés de même longueur, donc $BG = GD = DB = a\sqrt{2}$, donc le triangle BDG est équilatéral.

b. ► $ED = EB = a\sqrt{2}$ et $CD = CB = a$

et $KD = KB = \frac{2}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2}$, car BDG est équilatéral, donc E, C et K sont des points du plan médiateur de [BD].

► $ED = EG = a\sqrt{2}$ et $CD = CG = a$

et $KD = KG = \frac{2}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2}$, car BDG est équilatéral, donc E, C et K sont des points du plan médiateur de [DG].

c. Les points E, C et K sont des points des plans médiateurs de [BG] et [DG], donc ils sont alignés sur leur droite d'intersection.

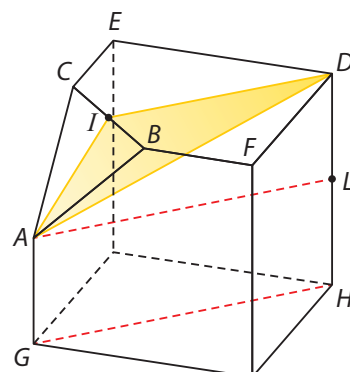
La droite (EC) est donc orthogonale à [BG] et [DG], donc elle est perpendiculaire au plan (BDG).

Activité 4 Art et géométrie de l'espace

Objectif

Calculer, en utilisant la géométrie plane, l'angle de deux plans d'un solide représenté dans un tableau célèbre.

1 Appelons a la longueur de l'arête du cube.



► $AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, donc la droite (AI) est la médiatrice de $[CB]$; en conséquence les points A et I sont des points du plan médiateur de $[CB]$.

► Dans le triangle rectangle DEC ,

$$DC^2 = DE^2 + EC^2 = \frac{5a^2}{4},$$

$$\text{donc } DC^2 = DB^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Le plan médiateur du segment $[CB]$ est le plan (AID) .

2 L'angle formé par les faces ABC et CBD est l'angle $\widehat{AID}$.

3 $a = 1$.

$$\text{► } AB = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

► Le triangle ABC est équilatéral, donc :

$$AI = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

► Le triangle CID est rectangle en I , donc $DC^2 = CI^2 + ID^2$,
donc $ID^2 = DC^2 - CI^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.

► L est le milieu de l'arête $[DH]$, donc :

$$AL = GH = \sqrt{2}.$$

Dans le triangle rectangle ALB on a :

$$AD^2 = AL^2 + LD^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}, \text{ donc } AD = \frac{3}{2}.$$

4 On applique le théorème de d'Al Kashi au triangle AID :

$$AD^2 = IA^2 + ID^2 - 2IA \times ID \times \cos \widehat{AID},$$

$$\text{donc } \cos \widehat{AID} = \frac{IA^2 + ID^2 - AD^2}{2IA \times ID}, \text{ soit, en remplaçant,}$$

$$\cos \widehat{AID} = -\frac{1}{3}, \text{ donc } \widehat{AID} \approx 109,5^\circ.$$

L'intersection des deux faces est la droite (BC) et le plan (AID) est perpendiculaire à (BC) , donc l'angle des deux faces est $\widehat{AID} \approx 109,5^\circ$.

Activité 5 Ensemble de points de l'espace caractérisé par un produit scalaire nul

Objectif

Mettre en place une méthode pour déterminer une équation cartésienne d'un plan.

1 Le plan Π est l'ensemble des points M tel que $MA = MB$, donc $MA^2 - MB^2 = 0$;

$$MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Le point M appartient à Π si, et seulement si, $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

2 a. On a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 ;$$

comme le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow M = H.$$

b. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à (AB) .

3 Application

► Π est le plan passant par I milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) . On a $I(0; 1; 2)$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix}$,

$$\text{donc : } M(x; y; z) \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \Leftrightarrow -x + y + 2z + 3 = 0.$$

► $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et perpendiculaire à (AB) .

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+4 \end{pmatrix}, \text{ donc :}$$

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -x + y + 2z + 9 = 0.$$

Exercices d'application

⇒ Savoir faire Calculer des produits scalaires dans l'espace

$$\text{1 } \text{► } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot (\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB}) \\ = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FB} = -a^2$$

en tenant compte des orthogonalités.

► $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

$$\text{► } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

$$\text{► } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{JB} = (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EJ}) \cdot (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{JA} = -\frac{a^2}{4}.$$

2 Dans le triangle HEJ rectangle en E , d'après le théorème de Pythagore, $HJ^2 = EH^2 + EJ^2 = \frac{5a^2}{4}$;

comme $HJ = JB$ on a $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JB} = JH \cdot JB \cdot \cos \widehat{HJB}$, soit $\frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \times \cos \widehat{HJB}$; donc $\cos \widehat{HJB} = \frac{1}{5}$.

On obtient $\widehat{HJB} \approx 78,5^\circ$.

2 1 La sphère de centre A et de rayon 3 est l'ensemble des points M de l'espace tel que $AM = 3$.

2 Si $M(x; y; z)$, alors :

$$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow AM^2 = 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9.$$

Une équation de $\mathcal{S}$ est : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

3 ► La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; \frac{1}{2}; 1)$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

► Le point M appartient à l'intersection de $\mathcal{S}$ et de d si, et seulement si, ses coordonnées vérifient les équations de $\mathcal{S}$ et de d . En reportant les valeurs de x, y, z en fonction de t , dans l'équation de $\mathcal{S}$, on obtient $t^2 = 4$, soit $t = 2$ ou $t = -2$, d'où les points d'intersection : $B(-3; 3; 2)$ et $C(1; 1; -2)$.

3 On pose $AB = a$. Les hauteurs des triangles équilatéraux mesurent $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1 a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$; b. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AJ} = -\frac{3}{4}a^2$;

c. $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}(JA^2 + JD^2 - AD^2) = \frac{1}{4}a^2$;

d. $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

2 a. Dans le triangle rectangle AJK ,

$$JK^2 = JA^2 - KA^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2.$$

b. $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK} \cdot 2\overrightarrow{JL} = 2\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = JK^2 + JL^2 - KL^2$
 $= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2.$

➔ Savoir faire Utiliser les propriétés du produit scalaire

4 1 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

► $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$;

► $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$;

► $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 10$.

2 ► $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5}, \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{11}, \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{14}.$

► $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{55}},$ donc $\widehat{BAC} \approx 82,3^\circ.$

► $\cos \widehat{CBA} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{BA}\|} = \frac{4}{\sqrt{70}},$ donc $\widehat{CBA} \approx 61,4^\circ;$

donc $\widehat{ACB} \approx 36,3^\circ.$

5 1 $ABCD$ est un tétraèdre régulier et $AB = a$. On a alors G milieu de $[IJ]$ et $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA'}$.

De plus, $DA' = \frac{2a}{\sqrt{6}}.$

► $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A}) \cdot (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C}),$ comme (DA') est perpendiculaire au plan (ABC) on a :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} \cdot \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'C};$$

par ailleurs, $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2};$

donc $A'A = A'C = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}};$

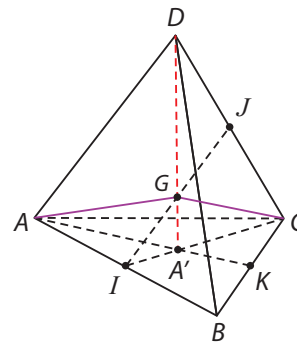
donc $\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'C} = A'A \times A'C \times \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{a^2}{6},$

donc $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} = \left(\frac{1}{4} \frac{2a}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{a^2}{6} = -\frac{a^2}{8}.$

2 ► On a $GA = \frac{3}{4}DA' = \frac{3a}{2\sqrt{6}}.$

► $\cos \widehat{AGC} = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC}}{\|\overrightarrow{GA}\| \|\overrightarrow{GC}\|} = \frac{-\frac{a^2}{8}}{\frac{3a^2}{8}} = -\frac{1}{3};$

donc $\widehat{AGC} \approx 109,5^\circ.$



6 ► En utilisant les résultats de la page 295 du manuel on a $JI = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $JH = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

► On a par ailleurs $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0), J(0; 0; \frac{1}{2})$ et $H(0; 1; 1),$ donc :

$$\overrightarrow{JI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \text{ donc } \overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JH} = \frac{1}{4}.$$

► $\cos \widehat{IJH} = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JH}}{\|\overrightarrow{JI}\| \|\overrightarrow{JH}\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$ On retrouve bien le résultat de la page 295 et donc $\widehat{IJH} \approx 75^\circ.$

➔ Savoir faire Déterminer des équations de plans, déterminer une intersection de plans

7 a. $B(1; 0; 0), E(0; 0; 1), G(1; 1; 1), D(0; 1; 0)$ et $F(1; 0; 1),$ donc $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$ donc

$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ et $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{DF} = 0.$ Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(BEG),$ donc la droite (DF) est perpendiculaire au plan $(BEG).$

b. Le plan (BGE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ et passe par $B,$ donc $M(x; y; z)$ est un point de (BGE) si, et seulement si, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DF} = 0,$ donc $(x-1) \times 1 + y(-1) + z \times 1 = 0.$ Le plan (BEG) a pour équation : $x - y + z - 1 = 0.$

c. ► Le plan $\mathcal{P}$ passant par F et parallèle à (BEG) a pour équation $x - y + z + d = 0$ comme il contient $F,$ $1 - 0 + 1 + d = 0,$ donc $d = -2.$

$\mathcal{P}$ a pour équation $x - y + z - 2 = 0.$

► Le plan (ABC) a pour équation $z = 0,$ donc l'intersection avec $\mathcal{P}$ est la droite définie par $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases},$
 soit $\begin{cases} x = x \\ y = -2 + x \\ z = 0 \end{cases}$ avec $x \in \mathbb{R}.$

8 a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puisque $\frac{-4}{-2} \neq \frac{0}{-1}.$

Les points A , B et C n'étant pas alignés définissent un plan.

b. $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -4 + 0 + 4 = 0,$

$\vec{AC} \cdot \vec{n} = -2 - 2 + 4 = 0.$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Une équation de (ABC) :

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) + 2(y-1) - 2(z-3) = 0.$

$M \in (ABC) \Leftrightarrow x + 2y - 2z + 3 = 0.$

➔ Travaux pratiques

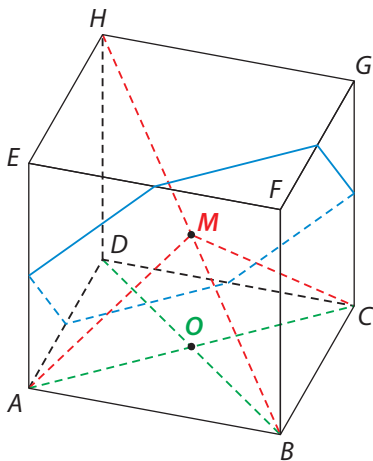
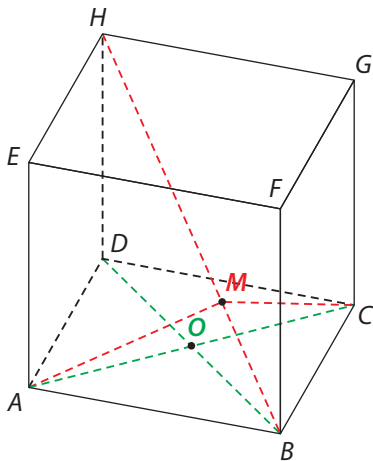
9 Angle maximum

1 Choisir un cadre et conjecturer

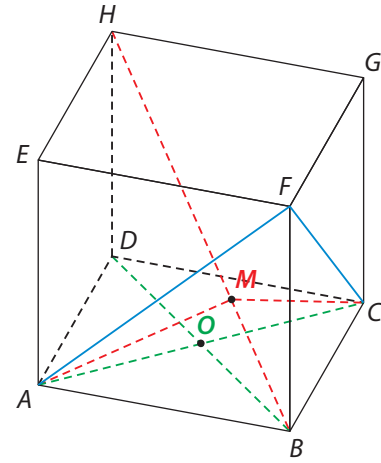
1 Cadre analytique

a. b. Voir ci-dessous. L'angle $\widehat{AMC}$ semble maximum pour $t = 0,33$ et il mesure $119,995^\circ$.

2 Le plan $\mathcal{P}$ passant par M et perpendiculaire à la droite (BH) .



b. En faisant varier le point M sur $[BH]$, le plan $\mathcal{P}$ correspondant à la valeur maximale de $\widehat{AMC}$ semble être le plan (ACF) .



2 Élaborer une démarche

1 Cadre analytique

a. $A(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$.

On a $\vec{BM} = t \vec{BH} = t(\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BF})$, donc $M(t; t; t)$.

b. $\vec{MA} \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ -t \end{pmatrix}$, $\vec{MC} \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \\ -t \end{pmatrix}$, donc $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = 3t^2 - 2t$.

Mais $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = MA \cdot MC \cdot \cos \widehat{AMC}$,

et $MA^2 = MB^2 = (1-t)^2 + t^2 + t^2 = 3t^2 - 2t + 1$,

donc $\cos \widehat{AMC} = \frac{3t^2 - 2t}{3t^2 - 2t + 1} = 1 - \frac{1}{3t^2 - 2t + 1}$.

c. Pour tout $t \in [0; 1]$, $f'(t) = \frac{6t-2}{(3t^2-2t+1)^2}$ qui est du signe de $6t-2$, d'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

En tenant compte du sens de variation de la fonction cosinus $\widehat{AMC}$ qui a un maximum pour $t = \frac{1}{3}$, dans ce cas $\widehat{AMC} = 120^\circ$.

2 Cadre géométrique

a. Comme $\widehat{AMC} = 2\widehat{AMO}$, si le sinus de $\widehat{AMO}$ est maximum, alors $\widehat{AMC}$ est maximum. $\sin \widehat{AMO} = \frac{AO}{AM}$, donc comme AO est constant, il faut que AM soit minimum, donc $(AM) \perp (BH)$.

b. AM est la hauteur du triangle ABH et $AB = 1$, $AH = \sqrt{2}$ (diagonale d'une face), $BH = \sqrt{3}$ (diagonale du cube).

c. On a $\sin \widehat{AHB} = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $AM = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

En appliquant le théorème d'Al Kashi dans le triangle AMC on obtient :

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \times MC \times \cos \widehat{AMC}$, soit :

$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\cos \widehat{AMC}$,

donc $\cos \widehat{AMC} = -\frac{1}{2}$, soit $\widehat{AMC} = 120^\circ$.

3 Pour aller plus loin

L'angle $\widehat{ANC}$ est maximum pour $t = 0,5$ et dans ce cas $\cos \widehat{ANC} = \frac{1}{3}$, donc $\widehat{ANC} \approx 70,5^\circ$.

10 Distance d'un point à une droite

Objectif

Là aussi, résoudre un problème classique à l'aide de deux méthodes différentes.

Partie A

1 2 3 Lorsque r est minimum cela représente la distance de A à Δ .

Partie B – Méthode 1

1 Si $M(x; y; z)$, alors $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$.

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y + z - 11 = 0.$$

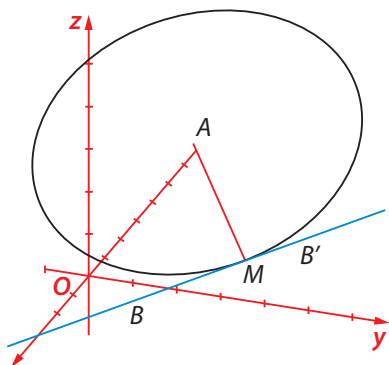
2 La droite Δ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

3 Les coordonnées du point d'intersection de Δ et de $\mathcal{P}$ vérifient :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \\ -2x + 3y + z - 11 = 0 \end{cases} ;$$

donc, en reportant les valeurs de x , y et z dans la quatrième équation on obtient $14t - 12 = 0$, soit $t = \frac{6}{7}$.



Le point d'intersection H a donc pour coordonnées $(\frac{9}{7}; \frac{32}{7}; -\frac{1}{7})$. La distance de A à Δ est donc $\sqrt{\frac{152}{7}}$.

Partie C – Méthode 2

1 Si M appartient à Δ , alors $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$;

$$\text{donc } AM^2 = (4 - 2t)^2 + (3t)^2 + (-4 + t)^2,$$

$$\text{donc } AM^2 = 14t^2 - 24t + 32.$$

2 La fonction du second degré $t \mapsto 14t^2 - 24t + 32$ admet un minimum pour $t = \frac{6}{7}$, donc $AM^2 = \frac{152}{7}$; donc la distance de A à Δ est $\sqrt{\frac{152}{7}}$.

11 Calculs de distances, aires, volumes

Objectif

Utiliser le produit scalaire pour préciser des situations ou calculer des grandeurs.

1 a. On a $a^2(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$,

$$\text{donc } \overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD} ;$$

b. donc, en décomposant :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BA} + \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{AD}$$

et $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD}$, soit en tenant compte des orthogonalités :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} &= \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + 2} \left(-\frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2 + 2} = 0. \end{aligned}$$

b. On a $a^2(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DM}) + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$,

$$\text{donc } \overrightarrow{DK} = \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{DM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{BD} ;$$

b. donc en décomposant :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + 2} \overrightarrow{DA} + \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{AB}$$

et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, soit en tenant compte des orthogonalités :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MD} &= \frac{a^2}{a^2 + 2} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{1}{a^2 + 2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + 2} \left(-\frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2 + 2} = 0. \end{aligned}$$

c. Comme $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$, K appartient à la hauteur issue de B dans le triangle BMD . Comme $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, K appartient à la hauteur issue de D dans le triangle BMD , donc K est l'orthocentre du triangle BMD .

2 a. Dans le triangle rectangle ABM ,

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 = 1 + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 + 1}{a^2}.$$

Le triangle BMD est isocèle en M , donc si on appelle I le milieu de $[BD]$, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle MIB , on a :

$$AI^2 = MB^2 - IB^2 = \frac{a^2 + 1}{a^2} - \frac{1}{2} = \frac{a^2 + 2}{a^2} ;$$

donc $AI = \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{a}$, comme $\mathcal{A} = \frac{AD \times AI}{2}$ on a :

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a}.$$

b. $\mathcal{A} = 1$ équivaut à $\sqrt{a^2 + 2} = 2a$, soit en élevant au carré $a^2 + 2 = 4a^2$; donc $a^2 = \frac{2}{3}$ et $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

c. Le volume de la pyramide $MABD$ est :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{MA \times AB}{2} \times AD = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

b. On a $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ en développant et en tenant compte des orthogonalités.

De même, $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{AK}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDM) est un vecteur normal à (BDM) , donc (AK) est une hauteur de

la pyramide $MABD$, donc on a aussi $V = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times AK$, donc $AK = 3V = \frac{3}{2\sqrt{6}}$.

12 Distance d'un point à une droite. Cas particulier

Objectifs

Présenter une méthode générale à l'aide d'un cas particulier et utiliser un logiciel de calcul algébrique.

1 a. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas colinéaires, les deux plans sont sécants suivant une droite Δ .

b. Le logiciel nous donne un système d'équations paramétriques de Δ :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{10}{7}z \\ y = 2 + \frac{2}{7}z \\ z = z \end{cases} \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

c. La droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$; comme

$\vec{u} = 7\vec{v}$, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ .

2 $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont, par définition, orthogonaux à $\vec{u}$. De plus, $\vec{n} \cdot \vec{m} = 2 - 6 + 4 = 0$, donc ils sont orthogonaux.

3 Comme (OH) est perpendiculaire à Δ , les vecteurs $\vec{OH}$, $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{OH} = a\vec{n} + b\vec{m}$, donc en tenant compte de la question **2** on a $OH^2 = a^2\vec{n}^2 + b^2\vec{m}^2$.

4 Le point H est un point de Δ et ses coordonnées sont $(1 + \frac{10}{7}z; 2 + \frac{2}{7}z; z)$ le logiciel permet de déterminer z , a et b tels que $\vec{OH} = a\vec{n} + b\vec{m}$. On obtient $z = -\frac{98}{153}$; $a = -\frac{4}{17}$; $b = \frac{5}{9}$.

$\vec{n}^2 = 2^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 17$ et $\vec{m}^2 = 9$, on a :

$$\delta^2 = \left(-\frac{4}{17}\right)^2 \times 17 + \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times 9, \text{ donc } \delta^2 = \frac{569}{153};$$

$$\text{donc } \delta = \sqrt{\frac{569}{153}}.$$

Faire le point

16 **1** c. **2** b. **3** c. **4** a. **5** a. **6** c.

17 **1** b. **2** b. **3** b. **4** a. et c. **5** a. et c.

18 **1** Faux (considérer les arêtes d'un cube passant par un même sommet).

2 Faux (ici d est incluse dans $\mathcal{P}$).

3 Vrai.

4 Vrai. $\vec{CM} \cdot \vec{MB} = (\vec{CA} + \vec{AM}) \cdot \vec{MB}$
 $= \vec{CA} \cdot \vec{MB} + \vec{AM} \cdot \vec{MB} = 0 + 0 = 0.$

Exercices d'application

1 Produit scalaire dans l'espace

19 **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Vrai.
4 Faux. **5** Vrai.

20 **1** b. et c. **2** b. **3** b. et c.

4 c.; $OABC$ est un losange formé de deux triangles équilatéraux accolés.

Repères orthonormés – Normes

21 Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point H a pour coordonnées $(x; y)$ et donc $OH^2 = x^2 + y^2$. La droite (MH) est parallèle à la droite (OK) et $\vec{HM} = z\vec{i}$, donc le triangle OHM est rectangle en H , donc en utilisant le théorème de Pythagore, $OM^2 = OH^2 + HM^2$; donc $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, soit $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

22 **1** $A(8; 0; 0), E(0; 8; 8).$

$B(0; 8; 0)$ et $G(8; 8; 8)$, donc $I(4; 8; 4).$

$\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AF}$, donc $K(8; 0; 2).$

$\vec{CL} = \frac{5}{8}\vec{CE}$, donc $L(0; 5; 8).$

2 $\vec{AE} \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{AE}\| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 8^2} = 8\sqrt{3}.$

On a $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{AE}\|}\vec{AE}$, donc $\vec{e} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$

3 $\vec{KI} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{KI}\|^2 = 84.$

$\vec{IL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{IL}\|^2 = 41.$

$\vec{KL} \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{KL}\|^2 = 125.$

Comme $\|\vec{KI}\|^2 + \|\vec{IL}\|^2 = \|\vec{KL}\|^2$ le triangle KIL est rectangle en I .

4 a. La sphère S est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\Omega M = O\Omega$ son équation est :

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 \\ = 58x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 8z = 0; \end{aligned}$$

soit $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 8z = 0.$

b. En reportant les coordonnées de chaque point on vérifie que le cube $OADBCFGE$ est inscrit dans la sphère S .

23 **1** On a $\vec{DA} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc :
 $DA = DB = DC = 3.$

Les points A, B, C appartiennent à la sphère de centre D et de rayon 3.

2 La sphère S a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$, soit $x^2 + y^2 + z^2 - 8z + 7 = 0$.

3 a. Les plans médiateurs des segments $[AB]$ et $[BC]$ se coupent suivant une droite d . Tout point de cette droite est équidistant des points A, B et C , donc ils sont sur une sphère de centre M .

b. Vérifier que $OA = OB = OC = 3$, donc la sphère de centre O et de rayon 3 contient les points A, B et C .

4 a. Le point I a pour coordonnées $(0; 2; 2)$, $\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite (OI) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

b. Les coordonnées $(0; 2 + 2t; 2 + 2t)$ du point M de (OI) qui appartient à S est tel que :

$$0^2 + (2 + 2t)^2 + (2 + 2t)^2 - 8(2 + 2t) + 7 = 0.$$

Donc $t^2 = \frac{1}{2}$, soit $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. La droite (OI) coupe la sphère en deux points $E(0; 2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ et $F(0; 2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$.

Calculer un produit scalaire dans l'espace

24 1 Le quadrilatère $ABGH$ est un rectangle de largeur 4 et de longueur $4\sqrt{2}$.

► $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{GB} = BG^2 = 32$;

► $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2 = -16$.

2 Dans le triangle rectangle ABG on a :

$AC^2 = AB^2 + BG^2 = 16 + 32 = 48$, donc $AC = 4\sqrt{3}$, soit $AO = 2\sqrt{3}$.

► En utilisant le théorème d'Al Kashi dans le plan ABG pour le triangle AOB on a :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \times OB} = \frac{12 + 12 - 16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

On en déduit que $\widehat{AOB} \approx 48,2^\circ$.

25 1 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = BF^2 = 9$.

► $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = BF \times BG \cos \widehat{FBG}$, donc :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = 3 \times 3\sqrt{2} \cos 45 = 9\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9.$$

► Dans le repère $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}; \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$, $E(0; 0; 3)$,

$B(3; 0; 0)$ et $G(3; 3; 3)$, donc $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; donc

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = 3 \times 3 = 9$.

2 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{HB} = -EH^2$, car le triangle EHB est rectangle en E .

► $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HB} = -9$.

26 1 a. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$.

b. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = SA^2 + \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$
 $= SA^2 - AO^2$,

donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$.

c. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$.

d. $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = CS \times CD \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$.

2 a. Le triangle SAC est triangle rectangle et isocèle en S .

b. On a $CB = CD = 0$, $AB = AD = 0$ et $SB = SC = 0$, donc les points C, A, S sont équidistants de B et de D , donc le plan (SAC) est le plan médiateur de $[BD]$.

c. $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, car (BD) perpendiculaire au plan (SAC) qui est le plan médiateur de $[BD]$.

27 AI et ID sont les hauteurs de triangles équilatéraux de côté a , donc $AI = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

En appliquant Al Kashi dans le triangle AID :

$$\cos \widehat{AID} = \frac{AI^2 + DI^2 - AD^2}{2AI \times DI} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit $\widehat{AID} \approx 70,5^\circ$.

28 1 a. Le plan médiateur de $[HC]$ est le plan (AFG) , car les points A, F et G sont équidistants de H et de C .

b. En déduire l'intersection de la droite (HC) avec le plan perpendiculaire à (HC) passant par A est, d'après **1**, le plan (AFG) . Il coupe (HC) en I milieu de $[HC]$, donc le projeté orthogonal de A sur la droite (HC) est I .

2 Le milieu K du segment $[DG]$ est le point I .

► $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$, car (AK) est perpendiculaire à (HC) .

► $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AH} = AK^2$; le triangle AHK est rectangle en K ,

donc $AK^2 = AH^2 - HK^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$, donc

$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}$.

► $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{DK} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}$.

29 1 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

et $\Phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{6 + \sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$,

donc $\Phi^2 = \Phi + 1$.

2 a. Pour tout point $M(a; b; c) \in \{A, B, C, \dots, K, L\}$ on a

$OM^2 = 0^2 + \Phi^2 + 1^2 = \Phi + 2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$, soit :

$$OM = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = R.$$

Tous ces points sont sur une sphère de centre O et de rayon R .

b. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 1 - \Phi \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $AB^2 = \Phi^2 + (1 - \Phi)^2 + (-1)^2$,

soit, en tenant compte de la relation du **1**; $AB^2 = 4$ donc $AB = 2$.

► On vérifie de même que $AC = BC = 2$. Le triangle ABC est équilatéral.

c. Toutes les faces du solide sont des triangles équilatéraux.

3 Les arêtes de l'icosaèdre ont pour mesure 2.

30 Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$ et $I(2;0;0)$, donc $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HI} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HI} = 0$. Les droites (AG) et (HI) sont orthogonales.

2 Propriétés du produit scalaire

31 1 a. Vrai. b. Faux. 2 a. Vrai. b. Faux.

32 1 Faux. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Faux.

33 1 b. 2 c. 3 a. 4 c.

Expression en repère orthonormé

34 1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$. 2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. 3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

35 1 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$,
donc $AB^2 = 8$, $AC^2 = 16$, $BC^2 = 8$, soit $AB = BC$ et $AC^2 = AB^2 + BC^2$; le triangle ABC est isocèle rectangle en B .

2 ABC est isocèle rectangle en B , donc $\widehat{BCA} = 45^\circ$.

36 $\|\vec{u}\|^2 = \cos^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha$, soit :

$$\|\vec{u}\|^2 = \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha;$$

comme $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, on a :

$$\|\vec{u}\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

37 1 a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

b. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.

2 $I(3; \frac{3}{2}; 1)$.

3 a. $\overrightarrow{IS} \begin{pmatrix} 3,5 \\ 8 \\ 2,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{IS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; donc (IS) est perpendiculaire au plan (ABC) .

b. Le volume de la pyramide $SABCD$ est :

$$V = \frac{1}{3} AB \times BC \times IS;$$

comme $AB = \sqrt{29}$, $BC = \sqrt{11}$, $IS = \sqrt{82,5}$ alors :

$$V = \frac{11\sqrt{870}}{6}.$$

4 On se propose de déterminer une mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{SAB}$.

a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AS} \begin{pmatrix} 5,5 \\ 6,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 15$.

b. $AS = \frac{\sqrt{371}}{2}$, $AB = \sqrt{29}$.

c. $\cos \widehat{SAB} = \frac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB}}{AS \times AB} \approx 0,07$, donc $\widehat{SAB} \approx 85,9^\circ$.

38 1 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Les quatre points A, B, C et D sont coplanaires.

2 $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Propriétés algébriques

39 1 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{HG}$
 $= ED^2 = 4$.

2 $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{HG} = ED^2 = 4$.

3 $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH})$
 $= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AH}$
 $= 0 - 2AI^2 - EA^2 + 0 = -6$.

4 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB} + 0 = 2$.

5 $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{JI} = (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GJ}) \cdot (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI})$
 $= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{JC}$
 $= -2 - 4 + 1 = -5$.

6 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IC}$
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB} + BC^2 = 2 + 4 = 6$.

40 1 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EH}$,
donc comme $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IE} = 0$, on a : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH} = BC^2 = 16$.

► De même, $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA} = (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EJ}) \cdot \overrightarrow{FA}$,
donc $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$;
soit $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA} = -EB^2 + FE^2 = 0$.

► $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG} = (\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EI}) \cdot (\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HG}) = \overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HG}$,
soit $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EF} = -4 + 2 = -2$.

2 $IJ^2 = IE^2 + EJ^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 6$.

► $JG^2 = JH^2 + GH^2 = 2^2 + 2^2 = 8$.

► On a $\cos \widehat{IJG} = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG}}{JI \times JG} = \frac{-2}{\sqrt{6} \times \sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$,
donc $\widehat{IJG} \approx 106,8^\circ$.

Vecteurs orthogonaux

41 **1** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + a + 5a$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $a = \frac{1}{3}$.

2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + a^2$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $a^2 = 1$; soit $a = -1$ ou $a = 1$.

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = a - 2a^2$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à :
 $a(1 - 2a) = 0$;
 soit $a = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$.

42 **a.** On a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = -a\overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{AC},$$

soit $\overrightarrow{MN} = (a + b - 1)\overrightarrow{AD'} + b\overrightarrow{AB} - a\overrightarrow{AA'}$.

► Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = a + 2b - 1$.

► Comme $\overrightarrow{DA'} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DA'} = 2a + b - 1$.
 La droite (MN) est perpendiculaire à $(A'D)$ et à (AC) si, et seulement si :

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

b. On a $M(0; 1 - a; a)$, $N(b; b; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$

et $A'(0; 0; 1)$, donc $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} b \\ b + a - 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

► $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = a + 2b - 1$.

► $\overrightarrow{DA'} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DA'} = 2a + b - 1$.

On retrouve le système du **a.**, donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

43 **1** $\vec{w}_1$: non. **2** $\vec{w}_2$: non. **3** $\vec{w}_3$: oui.
4 $\vec{w}_4$: non. **5** $\vec{w}_5$: oui.

44 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos \widehat{BAC} = 0$,
 donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

45 ► Les droites Δ et Δ' ont pour vecteurs directeurs respectivement $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; les droites Δ et Δ' sont orthogonales.

3 Orthogonalité dans l'espace

46 **1** **a.** **2** **b.** **3** **a.** et **c.**

47 **1** **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux.
2 **a.** Faux. **b.** Faux.

Orthogonalité entre une droite et un plan

48 **1** **b.** **2** **b.** ; sécantes en $(1; -1; 0)$.
3 **b.** **4** **b.**

49 **1** On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JG}$, donc A, I, G, H sont coplanaires.

2 ► $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HJ}$, mais $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{HJ} = \vec{0}$;
 donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CH}$.

► $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$, car le triangle FCH est isocèle en F , donc (FQ) est perpendiculaire à (HC) .

3 ► $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{IG} = \left(\overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}\right) \cdot \overrightarrow{IG} = 1 - 1 = 0$,

donc (FG) orthogonale à (IG) et comme elle est aussi orthogonale à (HC) , elle est orthogonale au plan $(AIGJ)$.

50 **1** **a.** **2** **b.** **3** **b.**
4 **c.**, car $\overrightarrow{KE} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5** **c.**

51 **1** $\vec{n} \cdot \vec{v}_1 = -ac + ac = 0$

et $\vec{n} \cdot \vec{v}_2 = -ab + ab = 0$,

donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux à $\vec{n}$.

2 Le vecteur $\vec{n}$ est coplanaire avec $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{n} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\alpha a - \beta b \\ b = \beta a \\ c = \alpha a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\alpha^2 - \beta^2 \\ b = \beta a \\ c = \alpha a \end{cases}$$

qui n'admet pas de solution, donc $\vec{n}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas coplanaires.

3 **a.** Vu la question précédente, $(A; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{n})$ est un repère de l'espace, donc il existe trois réels α, β et γ tels que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{n}$.

b. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$;
 donc M appartient au perpendiculaire en A à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

52 Si d est parallèle à $\mathcal{P}$, il contient une droite Δ parallèle à d . Si d' est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ elle est orthogonale à Δ , donc à d .

53 **1** ► $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = -a^2$.

► $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = a^2$.

► $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$.

2 $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

donc $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$,

donc $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = -a^2 + a^2 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.

De même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

3 On en déduit que la droite (EC) est orthogonale aux droites (AF) et (AH) , donc orthogonale au plan (AFH) . Le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH) .

4 **a.** ► Le plan (EAB) contient la droite (AF) et comme $(EH) \perp (EAB)$ on a $(AF) \perp (EH)$.

► Le plan (AFH) contient la droite (AF) et comme $(EI) \perp (AFH)$ on a $(AF) \perp (EI)$.

b. La droite (AF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EHI) , donc orthogonale à la droite (HI) .

c. De même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI) .

5 Le point I est l'orthocentre du triangle AFH .

54 Soit a l'arête du cube.

► $AH = AF = a\sqrt{2}$, donc le triangle AFH est isocèle en A . (AP) est la médiatrice de $[HF]$, donc $(AP) \perp (HE)$.

► On a (EP) parallèle à (AC) .

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EP}) \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Donc $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{EC} = -a^2 + a^2 = 0$; donc $(AP) \perp (EC)$.

Vecteur normal – équation cartésienne

55 $\mathcal{P}$ passe par $B(2; 4; 1)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(-1; -1; 5)$, pour équation cartésienne $-x - y + 5z + 1 = 0$ et pour vecteurs directeurs $\vec{v}_1(4; 1; 1)$ et $\vec{v}_2(1; 4; 1)$.

56 $\mathcal{P}$ passe par $B(2; 0; 1)$ a pour vecteur normal

$\vec{n}(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -1)$ pour équation cartésienne

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - z = 0$ et pour vecteurs directeurs

$\vec{v}_1(-2; 4; 0)$ et $\vec{v}_2(2; -8; -1)$.

57 $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1; -1; -1)$ a pour vecteur normal $\vec{n}(4; 3; -1)$, pour équation cartésienne $4x + 3y - z - 2 = 0$ et pour vecteurs directeurs $\vec{v}_1(-1; 2; 2)$ et $\vec{v}_2(-1; 1; -1)$.

58 $\mathcal{P}$ passe par le point $A(0; -1; 1)$ a pour vecteur normal $\vec{n}(0; 1; 0)$, pour équation cartésienne $y - 1 = 0$ et pour vecteurs directeurs $\vec{v}_1(4; 0; 2)$ et $\vec{v}_2(-1; 0; -1)$.

59 $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1; -2; 3)$ pour vecteur normal $\vec{n}(0; 2; 1)$, pour équation cartésienne $2y + z + 1 = 0$ et pour vecteurs directeurs $\vec{v}_1(1; 0; 0)$ et $\vec{v}_2(0; 1; -2)$.

60 1 $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$;

comme le vecteur $\overrightarrow{AM}(x+1; y-2; z)$ on a :

$$(x+1) \times 1 + (y-2) \times 1 + z \times (-1) = 0.$$

$\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

2 $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$;

comme le vecteur $\overrightarrow{AM}(x; y; z+1)$ on a :

$$x \times 1 + y \times 0 + (z+1) \times 0 = 0.$$

$\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x = 0$.

61 $M(x; y; z)$, donc $\overrightarrow{AM}(x-1; y-2; z-3)$, donc :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \times 1 + (y-2) \times 2 + (z-3) \times (-1) = 2;$$

soit $x + 2y - z - 4 = 0$.

62 1 On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\alpha \\ -1 = \beta, \text{ donc } \alpha = -1; \beta = -1, \\ -1 = \beta \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ et les points A, B, C et D sont coplanaires.

2 Si le plan (BCD) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, en utilisant les coordonnées des points B, C et D , on a :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ -a + 2b + c + d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ 2b + c = -2d \\ b + 2c = -d \end{cases}$$

On a donc $a = -d$; $b = -d$ et $c = 0$, donc le plan (BCD) a pour équation $x + y - 1 = 0$ en prenant $d = -1$.

63 1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C déterminent un plan.

2 a. Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) , le système posé est le système en écrivant que les coordonnées de chaque point vérifient l'équation de (ABC) .

b. En prenant $d = -1$ on obtient $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$, donc (ABC) a pour équation cartésienne $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

Intersection de droites et de plans

64 ► La droite (AB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 5 - t \end{cases}$

► En reportant dans l'équation du plan $\mathcal{P}$ on obtient $t = -1$, donc la droite (AB) coupe le plan $\mathcal{P}$ en $C(3; 5; 6)$.

65 1 Les vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont respectivement $\vec{n}_1(2; 1; -1)$ et $\vec{n}_2(-1; 3; -2)$ qui ne sont pas colinéaires, donc les deux plans sont sécants.

2 Les coordonnées de la droite D d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} 2x + y = z - 1 \\ -x + 3y = 2z - 4 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}z - \frac{1}{7} \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{11}{7} \\ z = z \end{cases}$$

La droite D a pour vecteur directeur $\vec{v}(1; 5; 7)$ et passe par $A(0; -\frac{6}{7}; 1)$.

66 La droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(2; 1; 3)$ et passe par $A(1; 0; 1)$.

67 1 Une représentation paramétrique de la droite d'intersection D est
$$\begin{cases} x = 2 - z \\ y = -2 \\ z = z \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

2 Le plan $\mathcal{Q}$ passe par $A(1; 1; 2)$ et a pour vecteur normal $\vec{v}(-1; 0; 1)$. Il a pour équation $-x + z - 1 = 0$.

68 1 Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à D et passant par A a pour vecteur normal un vecteur directeur de D , soit $\vec{n}(2; -1; -2)$. Il a pour équation $2x - y - 2z + 22 = 0$.

2 D coupe le plan $\mathcal{P}$ en $H(-1 + 2t; 2 - t; -2t)$ et $2(-1 + 2t) - (2 - t) - 2(-2t) + 22 = 0$, soit $t = -2$, donc $H(-5; 4; 4)$.

$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $AH^2 = 72$. La distance de A à D est $AH = 6\sqrt{2}$.

3 $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -2 + 2t \\ -2 - t \\ -2t - 10 \end{pmatrix}$, donc :

$$AM = f(t) = \sqrt{9t^2 + 36t + 108}.$$

La fonction f aura un minimum pour $t = -2$ (fonction du second degré) et il est égal à $6\sqrt{2}$. Ce minimum est la distance de A à D .

69 1 $M \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 = y \\ 3x + 2x + 5 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases}$$

on reconnaît la représentation paramétrique de la droite D .

2 Affirmation 1 : vraie

D est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et R a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, D , qui est dirigée par un vecteur du plan $\mathcal{R}$, est parallèle au plan $\mathcal{R}$.

Affirmation 2 : faus

D'une part, les deux droites ne sont pas parallèles, car

les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

D'autre part, le système :

$$\begin{cases} t = -3m \\ 2t + 5 = 1 + m \\ 5t + 5 = 2 + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3m \\ -7m = -4 \\ -17m = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{3}{17};$$

ce qui est faux : les deux droites ne sont donc pas sécantes non plus. Elles sont non coplanaires.

70 1 On a $I(2; 1; 3)$, $K(3; 3; 3)$ et $J(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2})$.

2 $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IK} = 0$. Le

vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IJK) qui a donc pour équation $2x - y + z - 6 = 0$.

3 $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de

(AD) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(IJK) et (AD) sont sécants en un point L tel que ses coordonnées $(1 + 4t; 2t; 2 + 2t)$ vérifient l'équation de (IJK) , donc $t = \frac{1}{4}$; donc $L(2; \frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.

On a donc $\overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

71 Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; on a
$$\begin{cases} x_B - 2 = 1 \\ y_B + 3 = 1 \\ z_B - 1 = 1 \end{cases}$$

donc $B(3; -2; 2)$. Les coordonnées de B vérifient l'équation de (P) , donc $B \in (P)$.

Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On obtient de même que ci-dessus $C(5; -6; 1)$ et $C \in (P)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 3 = 0$.

On a donc : $(A; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthogonal du plan (P) .

72 1 Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(2; 1; -2)$.

2 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, donc $\vec{u}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$.

3 Cherchons un vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{u}$.

$$\text{On a } \begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = -a \end{cases}.$$

Le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{u}$.

On peut choisir comme base orthonormée $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}$, $\vec{V} = \frac{1}{3}\vec{n}$ et $\vec{W} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{w}$.

73 1 L'équation de E se met sous la forme $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 13$, donc (E) est une sphère de centre $\Omega(2; 0; -3)$ et le rayon $\sqrt{13}$.

2 La droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les points d'intersection de E et de Δ sont tels que leurs coordonnées sont :

$$(3 + t; 1 - 2t; 2 + 3t)$$

$$\text{et } (1 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + (5 + 3t)^2 - 13 = 0,$$

soit $14 + 28t + 14t^2 = 0$ qui admet une seule solution $t = -1$. (E) coupe Δ en un point $B(2; 3; -1)$.

3 $\overrightarrow{\Omega B} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\Omega B} \cdot \vec{u} = 0$. Les droites (ΩB) et Δ sont perpendiculaires.

4 En procédant comme ci-dessus, Δ' coupe (E) en un seul point B .

5 a. $\vec{v}(0; -2; 3)$ est un vecteur directeur de Δ' . On a $\overrightarrow{\Omega B} \cdot \vec{v} = 0$, donc la droite (ΩB) est perpendiculaire à Δ' , donc elle est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ défini par les deux droites Δ et Δ' .

b. Dans le triangle ΩBM rectangle B on a $\Omega M > \Omega B$, donc $\Omega M > \sqrt{13}$.

c. On en conclut que le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère (E) .

74 1 a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; donc on a :
 $AB = AC = BC = 6\sqrt{2}$.

Le triangle ABC est équilatéral.

b. Si le plan (ABC) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors :

$$\begin{cases} a - b + 4c + d = 0 \\ 7a - b - 2c + d = 0 \\ a + 5b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{d}{4} \\ b = -\frac{d}{4} \\ c = -\frac{d}{4} \end{cases}$$

Le plan ABC a pour équation $x + y + z - 4 = 0$ en prenant $d = -4$.

2 Soit D la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2t - 3 \end{cases}$$

a. D a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2; -2; -2)$ qui est colinéaire à $\vec{n}(1; 1; 1)$, vecteur normal à (ABC) . Donc D est perpendiculaire au plan (ABC) .

b. G est un point de (ABC) et de $D(t = -\frac{3}{2})$, donc c'est le point d'intersection.

On vérifie que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, donc G est le centre de gravité de ABC .

3 La sphère S a pour équation :

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 24.$$

Les points d'intersection de S et D sont définis par le paramètre t vérifiant :

$$(-2t - 3)^2 + (-2t - 3)^2 + (-2t - 3)^2 = 24; \text{ soit :}$$

$$3(-2t - 3)^2 = 24,$$

$$\text{donc } t = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ ou } t = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{2}.$$

D coupe S en deux points.

Plans perpendiculaires

75 1 Faux ; contre-exemple : dans un repère de l'espace, les plans de coordonnées (xoz) et (xoy) sont tous deux perpendiculaires au plan (yoz) et ne sont pas parallèles.

2 Faux.

3 Vrai.

76

1 Vrai.

2 Faux.

3 Vrai.

4 Vrai.

77

1 Faux.

2 Vrai.

3 Vrai.

4 Vrai.

5 Vrai.

78

1 $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow AM \cdot \vec{n} = 0$. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x - y - z = 0$.

2 a. $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$,

donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

b. $d = \frac{|-1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3 a. La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + z \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = z \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

b. On a $H(-\frac{1}{3} + z; -\frac{1}{3}; z)$, donc $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + z \\ -\frac{4}{3} \\ z - 1 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2}{3} \text{ donc } H(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}).$$

$$\text{On a } MH = 2 \text{ et } d = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ et } d' = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

c. On a bien $MH^2 = d^2 + d'^2$, car si E est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{P}$, le triangle MEH est rectangle en E .

79

1 $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont respectivement pour vecteurs normaux $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.

2 La droite $\mathcal{D}$ a pour système d'équations paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3 Le plan (R) passe par $A(2; -2; 0)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{v}(2; 1; 0)$.

$$M(x; y; z) \in (R) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0, \text{ soit } 2x + y - 2 = 0.$$

➔ Prépa Bac

Exercices guidés

80

Bac 2006

1 Faux, car $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$.

2 Vrai.

3 Faux.

4 Vrai.

81 1 Les coordonnées des points d'intersection des deux plans vérifient
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0. \\ z = z \end{cases}$$

On a donc
$$\begin{cases} x + y = -z \\ 2x + 3y = -z + 4, \text{ donc } \begin{cases} x = -2z - 4 \\ y = z + 4 \\ z = z \end{cases} \end{cases}$$

L'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$
 où t est un nombre réel.

2 a. P_λ a pour équation :

$$(1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0,$$

donc $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ .

b. Si $\lambda = 0$ les plans P et P_λ sont confondus.

c. P admet pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 1)$;

$\vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3\lambda + 3 = 0$. Si $\lambda = -1$, les plans P et P_λ sont perpendiculaires.

3 D' a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

donc les droites D et D' sont confondues.

4 La distance de A à P est $D = \frac{|3|}{\sqrt{3}}$. La distance de A à P_{-1} est $D' = \frac{4}{\sqrt{2}}$. Comme les plans P et P_{-1} sont perpendiculaires, la distance k de A à D vérifie : $k^2 = d^2 + d'^2 = 3 + 8 = 11$; donc $k = \sqrt{11}$.

82 1 $I(0; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$ et $K(1; 1; 1)$.

Comme $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AI} + \vec{AB} + \vec{AK})$ on a $G(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

2 $\vec{JD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; donc un système d'équations paramétriques de la droite (JD) est
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le point G est obtenu pour $= \frac{1}{3}$.

3 $\vec{BK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{JD} \cdot \vec{BK} = 0$ et $\vec{JD} \cdot \vec{BI} = 0$;

donc $\vec{JD}$ est normal au plan (BIK) . (BIK) a pour équation cartésienne $-x + y - z + 1 = 0$.

83 1 a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires,

donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

c. Le plan (ABC) a pour équation $x - y - z - 3 = 0$.

2 a. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

b. O' est le point d'intersection de (ABC) et de d , donc, en résolvant le système formé des équations de (ABC) et d , on obtient $O'(1; -1; -1)$.

3 On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC) . Soit t le réel tel que $\vec{BH} = t\vec{BC}$.

a. $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = (\vec{BH} + \vec{HO}) \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC} = t\|\vec{BC}\|^2$,
car $\vec{HO} \cdot \vec{BH} = 0$; donc $\frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$.

b. $\vec{BO} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$; donc on en déduit $t = \frac{35}{52}$ et $H(\frac{1}{36}; -\frac{51}{36}; -\frac{18}{13})$.

c. La droite (BC) est perpendiculaire à la droite (OH) et orthogonale à la droite (OO') , donc elle est perpendiculaire au plan $(OO'H)$; donc les droites $(O'H)$ et (BC) sont perpendiculaires.

4 Le triangle $OO'H$ est rectangle en O' , donc $OH > OO'$; donc la sphère de centre O et de rayon OH coupe le plan (ABC) suivant un cercle Γ . Ce cercle est tangent à la droite (BC) , car $(BC) \perp (O'H)$.

Exercices d'entraînement

84 1 c. et d. 2 a. et d. 3 c.
4 b. et c. 5 b.

85 Partie A

1 $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ et ABC est rectangle en A .

2 $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{AB}$. (AB) est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et comme $3 + (-2) + 3 - 3 = 0$ A appartient à $\mathcal{P}$.

3 $M \in P' \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 3) - 3(z - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x - z - 1 = 0$.

4 $M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -x - z + 3 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -2z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases}$

Partie B

1 $\vec{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = -9 + 18 - 9 = 0$

et $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = -9 + 9 = 0$.

Le vecteur $\vec{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : la droite (AD) est donc orthogonale au plan (ABC) .

2 $V = \frac{1}{3} AD \times S(ABC)$, où $S(ABC)$ est l'aire du triangle ABC . Comme ABC est rectangle en A ,

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 9 + 9} \times \sqrt{9 + 9} = \frac{9}{2} \sqrt{6}$$

et $AD = \sqrt{9 + 36 + 9} = 3\sqrt{6}$;
d'où $V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{6} \times \frac{9}{2} \times \sqrt{6} = 27$.

3 $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = 36 + 18 = 54$; d'où :

$\cos \widehat{BDC} = \frac{54}{DB \times DC} = \frac{54}{\sqrt{81} \times \sqrt{72}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
et donc $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$.

4 a. En appelant H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle BDC , avec $\widehat{CDH} = \frac{\pi}{4}$, on a :

$$S(BDC) = \frac{1}{2} CH \times DB = \frac{1}{2} DC \times \sin \frac{\pi}{4} \times DB \\ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 9 = 27.$$

b. Soit K le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) , comme on a aussi : $V = \frac{1}{3} AK \times S(BDC)$, on obtient $AK = \frac{3V}{27} = 3$: c'est la distance du point A au plan (BCD) .

86 1 $\vec{n}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires donc :

$$|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = \|\vec{n}\| \times \|\vec{AH}\| = AH \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2 $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{AH} \begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \\ z_H - z_0 \end{pmatrix}$,

donc $\vec{n} \cdot \vec{AH} = ax_H - ax_0 + by_H - by_0 + cz_H - cz_0$;

comme $ax_H + by_H + cz_H = -d$ on a :

$$\vec{n} \cdot \vec{AH} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d.$$

3 On en déduit que la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4 $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc la distance du point au plan $\mathcal{P}$ est :
$$\frac{|-4 - 2 \times 6 + 2(-1)|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = 6.$$

87 Partie A

1 $\vec{KD} \begin{pmatrix} -x_K \\ -y_K \\ -z_K \end{pmatrix}$ et $\vec{KF} \begin{pmatrix} 1 - x_K \\ 1 - y_K \\ 1 - z_K \end{pmatrix}$, donc $K \left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3} \right)$.

2 $\vec{EK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{EK} \cdot \vec{DF} = 0$;

les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3 $EK = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Partie B

1 Le triangle EFM a pour aire $\frac{1}{2}$ et la hauteur du tétraèdre $EMFD$ est 1, donc le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2 $M(0; m; 1)$. Les coordonnées des points M , D et F vérifient l'équation $(-1 + m)x + y - mz = 0$ du plan (MFD) .

3 a. Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$d_m = \frac{|-1 + m - m|}{\sqrt{(-1 + m)^2 + 1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

b. Pour tout $m \in [0; 1]$, $d'_m(m) = \frac{1 - 2m}{(\sqrt{2m^2 - 2m + 2})^3}$;

d'où le tableau de variations :

m	0	$\frac{1}{2}$	1		
$d'_m(m)$		+	0	-	
$d_m(m)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lorsque la distance d_m est maximale M est au milieu de $[HG]$.

88 Partie 1

1 a. On a $BA' = \frac{2}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc :

$$\vec{AA'} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BA'}) \cdot \vec{BD} ;$$

$$\text{soit } \vec{AA'} \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{BA'} \cdot \vec{BD},$$

soit, en tenant compte des angles particuliers :

$$\vec{AA'} \cdot \vec{BD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

De même : $\vec{AA'} \cdot \vec{BC} = 0$.

b. La médiane (AA') qui est orthogonale à deux droites non sécantes de la face BCD est orthogonale à (BCD) .

c. Il en sera de même pour les autres médianes.

2 $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 3\vec{GA'}$, donc $\vec{GA} + 3\vec{GA'} = \vec{0}$.

G appartient à (AA') .

On démontre de même que G appartient aux autres médianes (BB') , (CC') et (DD') .

Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G .

Partie 2

1 $OP = \sqrt{14}$, $OQ = \sqrt{21}$, le tétraèdre $OPQR$ n'est pas régulier.

2 On a $3\vec{OP'} = \vec{OQ} + \vec{OR}$, donc $P' \left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{3} ; -\frac{1}{3} \right)$.

3 Les coordonnées des points O , Q et R vérifient l'équation $3x + 2y + 16z = 0$.

4 $\vec{PP'} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$ et n'est pas colinéaire au vecteur normal

de (OQR) , donc la médiane (PP') n'est pas perpendiculaire au plan (OQR) . La propriété (P_1) de la partie 1 n'est pas vraie pour un tétraèdre quelconque.

89 Bac 2000

1 a. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc les deux droites ne sont pas parallèles.

Cherchons deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} 3 + a = 0,5 + 2b \\ 9 + 3a = 4 + b \\ 2 = 4 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,5 \\ 9,5 = b \\ b = 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution, donc les deux droites ne sont pas sécantes.

Les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

2 a. Soit $A(3; 9; 2)$ un point de (D_1) , donc $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1,9 \end{pmatrix}$.

Cherchons deux réels α et β tels $\overrightarrow{u_2} = \alpha \overrightarrow{u_1} + \beta \overrightarrow{AS}$; soit

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ 3\alpha - 5\beta = 1 \\ -1,9\beta = -1 \end{cases} \text{ qui n'admet pas de solution, donc la}$$

droite (D_2) est sécante à (P_1) .

b. De même, la droite (D_1) est sécante à (P_2) .

c. Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite Δ passant par S . Cette droite répond à la question, car D_2 coupe P_1 sur Δ et D_1 coupe P_2 sur Δ . La droite Δ est donc la droite (R) cherchée.

Problèmes

90 Le système $\begin{cases} 2 - 3t = 5 + 2t' \\ 1 + t = 2t' \\ -3 + 2t = -5 - t' \end{cases}$ admet comme

solution $t = -1$ et $t' = 0$, donc les droites Δ et Δ' sont sécantes en $A(5; 0; -5)$. Elles sont dans le plan $\mathcal{P}$

passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On cherche $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Les réels a , b et c sont solutions du système $\begin{cases} -3a + b + 2c = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \end{cases}$, soit $a = \frac{5}{8}c$ et $b = -\frac{1}{8}c$. En

prenant $c = 8$ on obtient $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc le plan $\mathcal{P}$ a pour

équation cartésienne $5x - y + 8z + 15 = 0$.

91 1 a. Calculer $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}) \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ en tenant compte des orthogonalités.

b. Les triangles MEF et MEG sont rectangles en E , donc $MF^2 = ME^2 + EF^2$ et $MG^2 = ME^2 + EG^2$; donc $MF = MG$, car $EF = EG$.

2 L'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants des droites (BA) et (BC) est l'union de $\mathcal{P}$ et du plan $\mathcal{Q}$ qui se projette sur (ABC) suivant la bissectrice extérieure de l'angle BAC .

92 1 Les points B , A et J sont équidistants des points C et D , donc le plan médiateur du segment $[CD]$ est le plan (ABJ) . La droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABJ) , donc $(CD) \perp (AB)$.

2 On démontre de même que $(BC) \perp (AD)$ et $(AC) \perp (BD)$.

3 a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$, car le triangle BJA est isocèle.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \\ &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DJ} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

La droite (IJ) est perpendiculaire à la fois à (AB) et à (CD) .

b. Théorème de la médiane dans le triangle ABJ :

$$JA^2 + JB^2 = 2IJ^2 + \frac{AB^2}{2},$$

donc comme $JA = JB = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ on a $IJ = a \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{4 a. } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{CD} = 0; \end{aligned}$$

de même, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. La droite (AA') est perpendiculaire au plan (BCD) , car elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

$$\text{b. } BA' = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On a $AA'^2 = AB^2 - BA'^2 = \frac{2}{3}a^2$, donc $AA' = a \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Le tétraèdre $ABCD$ a pour volume $V = \frac{1}{3} \frac{CD \times BJ}{2}$; donc $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$.

5 a. Le point G est sur (AA') et $GA = \frac{3}{4}AA'$; de même pour GB , GC et GD , donc il est équidistant des points A , B , C , et D .

Le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ a pour rayon $R = GA$, donc $R = a \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Son volume est $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{24}a^3$.

93 1 a. Les coordonnées des points B , C et D vérifient l'équation $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

b. Le point H est tel que $\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à (BCD) , donc ses coordonnées x , y et z vérifient :

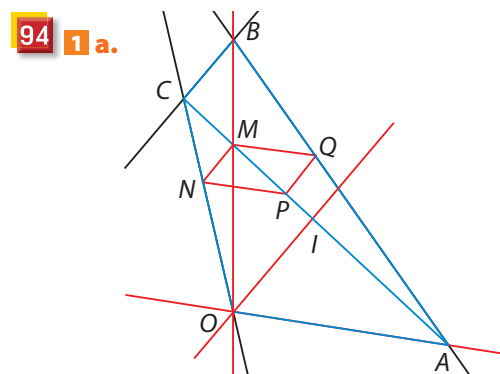
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

et $-2(3 - 2t) - 3(2 - 3t) + 4(-1 + 4t) - 13 = 0$; soit $t = 1$, donc $H(1; -1; 3)$.

c. $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = -39$.

d. Le tétraèdre $ABCD$ n'est pas orthocentrique.

2 Le tétraèdre $OIJK$ est orthocentrique ; les hauteurs sont concourantes en I .



b. $\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BA} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, donc $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$. Les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.

$\vec{CO} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{CO} \cdot \vec{OA} = 0$. Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales.

$\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc $\vec{BC} \cdot \vec{OB} = 0$. Les droites (BC) et (OB) sont orthogonales.

La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB) , car elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Le volume, en cm^3 , du tétraèdre $OABC$ est :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{BC \times BO}{2} \times OA = 32 \text{ cm}^3.$$

d. Soit I le milieu de $[AC]$, on a $IA = IB = IC = \sqrt{29}$. Les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère de centre I et de rayon $\sqrt{29}$.

2 a. On a $M(0; 0; k), N\left(\frac{k}{2}; 0; k\right), P\left(\frac{k}{2}; 6 - 3\frac{k}{4}; k\right)$ et $Q\left(0; 6 - 3\frac{k}{4}; k\right)$. On vérifie que $\vec{NP} = \vec{MQ}$ et que $\vec{NP} \cdot \vec{NM} = 0$, donc le quadrilatère $(MNPQ)$ est un rectangle.

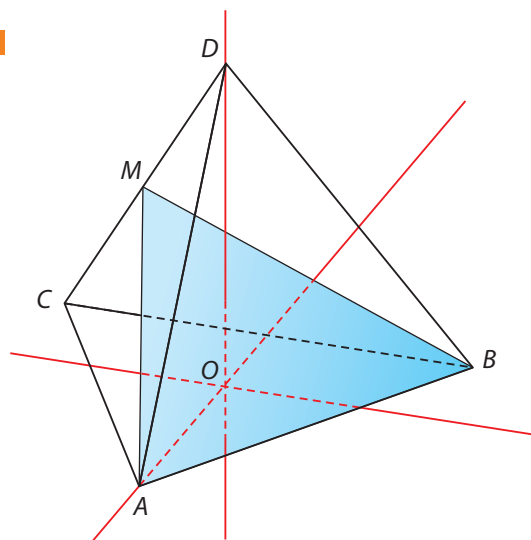
b. La droite (PM) est orthogonale à la droite (OB) , car elle est perpendiculaire au plan (π) .

$$\vec{MP} \cdot \vec{AC} = 2k - 36 + \frac{9}{2}k = \frac{13}{2}k - 36.$$

La droite (MP) est orthogonale à la droite (AC) pour $k = \frac{72}{13}$.

c. $MP^2 = \frac{13}{16}k^2 - 9k + 36$. La distance MP est minimale pour $k = \frac{72}{13}$.

95 1



$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} +3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$AC = AB = BC = 2\sqrt{3}.$$

Le triangle ABC est équilatéral et O est son centre, car il est à l'intersection des médiatrices des côtés.

3 a. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est le plan médiateur de $[AB]$.

b. L'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C est le plan médiateur $\mathcal{Q}$ de $[BC]$.

c. L'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O; \vec{k})$, droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

4 D appartient à l'axe $(O; \vec{k})$, donc $D(0; 0; a)$ avec $a > 0$. $AD = AC \Leftrightarrow 4 + a^2 = 12$, donc $a = 2\sqrt{2}$.

5 a. On pose $M(x; y; z)$,

$$\text{donc } \vec{CM} = \lambda \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \lambda \\ y + \sqrt{3} = \sqrt{3}\lambda, \\ z = 2\sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

$$\text{donc } M(\lambda - 1; \lambda\sqrt{3} - \sqrt{3}; 2\sqrt{2}\lambda).$$

$$\text{On a } \vec{AM} \begin{pmatrix} \lambda - 3 \\ \lambda\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BM} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BM}}{AM^2} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}.$$

b. $f'(\lambda) = \frac{2\lambda - 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}$ qui s'annule pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

La fonction f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

c. $\cos \widehat{AMB}$ est minimum pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et ce minimum est $\frac{1}{3}$. Si le point M est au milieu de $[CD]$ alors comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$, l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.

d. Ce maximum est $70,5^\circ$.

96 1 (GE) et (FI) sont deux médianes du triangle FGH , donc P est le centre de gravité du triangle FGH , de même Q est le centre de gravité du triangle FBG .

2 Dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a :

$$\vec{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{FC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{GP} = \frac{1}{3} \vec{GE}, \text{ donc } P\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right).$$

$$\vec{FQ} = \frac{1}{3} \vec{FC}, \text{ donc } Q\left(1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right); \text{ soit } \vec{PQ} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{PQ} \cdot \vec{EG} = 0$ et $\vec{PQ} \cdot \vec{FC} = 0$. La droite (PQ) est orthogonale aux droites (EG) et (FC) .

3 On a $PQ = PG + GQ = \frac{1}{3}EG + \frac{2}{3}GI$, soit

$$3\vec{PQ} = \vec{GB} + \vec{GF} - \vec{GE}; \text{ donc } \vec{PQ} \cdot \vec{GE} = 0 = \vec{PQ} \cdot \vec{FC}.$$

La droite (PQ) est orthogonale aux droites (EG) et (FC) .

97 1 « Si $xy'z' = x'y'z' = x'y'z$ », alors

Afficher « **les vecteur sont colinéaires** »

Sinon

Si $xx' + yy' + zz' = 0$ Alors

Afficher « **les vecteurs sont orthogonaux** »

Sinon

Ils ne sont pas colinéaires ni orthogonaux

- 2) $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ sont orthogonaux ;
 $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires ;
 $\vec{u}_3$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas colinéaires ni orthogonaux.

98 1 2 Il semble que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale pour $OM = 3,97$.

3) La droite (OC) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ donc } N\left(\frac{5}{4}z; 0; z\right).$$

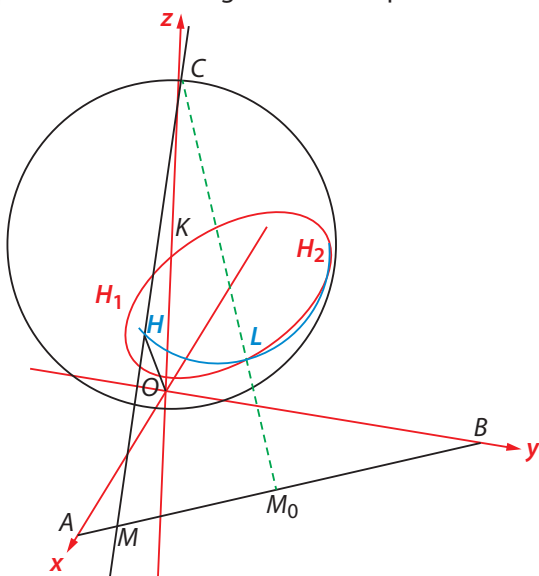
La droite (AB) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 - 6t \\ z = 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ donc } Q\left(0; 6 - \frac{3}{4}z; z\right).$$

$MN = \frac{5}{4}z$ et $MQ = 6 - \frac{3}{4}z$.

4 L'aire de $MNPQ$ est $a(z) = \frac{15}{2}z - \frac{15}{16}z^2$ qui est maximum pour $z = 4$.

99 1 On réalise une figure sous Geoplan.



Il semble que H décrive un arc de cercle.

2 Les positions qui donnent les valeurs minimales pour CH correspondent au point M en A ou B .

H est alors en H_1 ou H_2 les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$. La valeur maximale semble atteinte lorsque M est en M_0 milieu de $[AB]$.

3 a. $\vec{CM} \cdot \vec{CO} = (\vec{CO} + \vec{OM}) \cdot \vec{CO}$
 $= \vec{CO}^2 + \vec{OM} \cdot \vec{CO} = \vec{CO}^2,$

car $\vec{OM} \cdot \vec{CO} = 0$.
 $\vec{CM} \cdot \vec{CO} = \vec{CM} \cdot (\vec{CH} + \vec{HO})$
 $= \vec{CM} \cdot \vec{CH} + \vec{CM} \cdot \vec{HO} = \vec{CM} \cdot \vec{CH},$
car $\vec{CM} \cdot \vec{HO} = 0$.

b. On a donc $CH \times CM = CO^2$, c'est-à-dire $CH = \frac{CO^2}{CM}$.

CH est maximal lorsque CM est minimal, donc M en M_0 le milieu de $[AB]$.

CH est minimal lorsque CM est maximal, donc avec M en A ou en B .

c. Comme l'angle $\widehat{OHC} = 90^\circ$, H appartient à la sphère de diamètre $[CO]$.

On a vu que le lieu de H contient H_1, H_2 et il contient aussi le point L de $[CM_0]$, correspondant à la valeur maximale (on peut montrer que L a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$) et lorsque l'on fait tracer le cercle circonscrit au triangle H_1H_2L , on s'aperçoit que le lieu de H en diffère. Ce lieu n'est donc pas un arc de cercle de la sphère de diamètre $[CO]$, mais une courbe inscrite dessus.

100 1 a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C déterminent un plan.

b. $\begin{cases} 2a + 0b - c = 0 \\ 0a + b + c = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} c = 2a \\ b = -2a \end{cases}$;

on peut donc choisir $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et une équation de (ABC) est $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

2 a. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$: les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants.

b. $\mathcal{P}_1 = (ABC)$ et C appartient à $\mathcal{P}_2$, car :
 $1 - 3 \times 3 + 2 \times 3 + 2 = 0,$

donc C est un point de leur intersection.

c. $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0$, donc $\vec{u}$ est un vecteur commun aux deux plans, il dirige donc la droite d'intersection de ces deux plans.

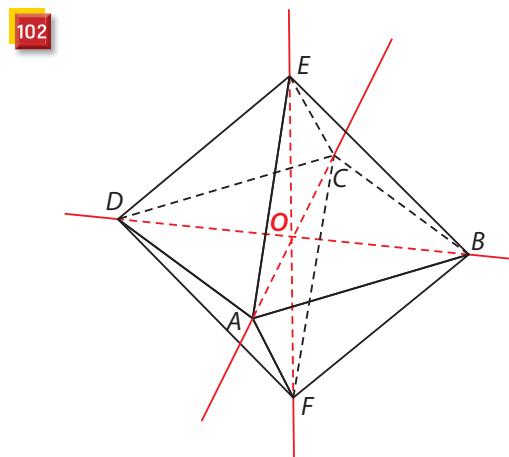
d. $\mathcal{D}: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3 a. $\vec{AM} \begin{pmatrix} -2+k \\ k \\ 1+k \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à :
 $\vec{AM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$

b. Soit H le point repéré par le paramètre -1 sur Δ , on a $AH(1; -1; 0)$ et la distance de A à Δ est $d = AH = \sqrt{2}$.

101 L'intérieur d'un cube de centre O et d'arête 4 dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées est caractérisé par :

$$-2 \leq x \leq 2; \quad -2 \leq y \leq 2; \quad -2 \leq z \leq 2.$$



La condition s'écrit, en distinguant les signes de x, y ou z :

$$\begin{cases} x + y + z \leq 2, x + y - z \leq 2 \\ x - y + z \leq 2, x - y - z \leq 2 \\ -x + y + z \leq 2, -x + y - z \leq 2 \\ -x - y + z \leq 2, -x - y - z \leq 2 \end{cases}$$

L'ensemble des points cherchés est l'octaèdre $ABCDEF$, de centre O dont les faces sont portées par chacun des 8 plans obtenus en remplaçant $\leq$ par $=$ (voir figure).

103 On cherche les équations des plans (SAB) :

$x + z - 3 = 0$ et (SBC) : $y + z - 3 = 0$;

$$\begin{cases} 0 < x < 3, 0 < y < 3, 0 < z \\ x + z - 3 < 0 \\ y + z - 3 < 0 \end{cases}$$

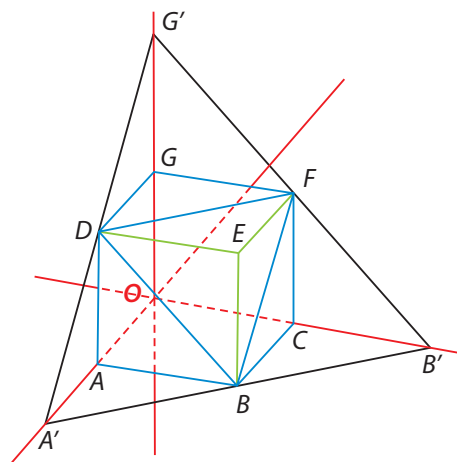
Pour justifier les inégalités, voir le raisonnement développé à l'exercice **104**.

104 L'ensemble des points $M(x; y; z)$ dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$$
 est le cube $OABCDEFG$.

Le plan d'équation $x + y + z - 8 = 0$ coupe les axes aux points $A'(8; 0; 0)$, $C'(0; 8; 0)$ et $G'(0; 0; 8)$ le cube suivant le triangle DBF .

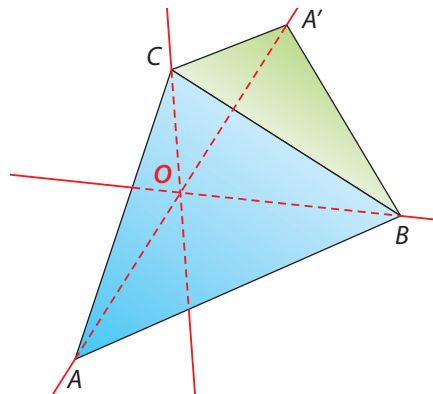
Pour tous les points $M(x; y; z)$ de ce triangle DBF , et quand on se dirige du côté du point O , x, y ou z ne peuvent que diminuer, donc $x + y + z - 8 \leq 0$ *a contrario* vers l'extérieur ils augmentent, l'ensemble des points de l'espace vérifiant le système est le cube tronqué $OABCD BFG$.



105 **1** $A(3; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 1)$.

2 La trace du plan (Q) est sur (xOy) la droite (BA') avec $A'(-3; 0; 0)$, sur (yOz) la droite (CB) comme (P) et sur (zOx) la droite $(A'C)$ comme (P) .

3 L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient le système est l'intérieur du tétraèdre $ACBA'$, faces comprises (voir argumentation à l'exercice **104**).



106 **1 a.** $\vec{AG} \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, or $\vec{ED} \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$ et $\vec{DB} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui

donne $\vec{AG} \cdot \vec{ED} = \vec{AG} \cdot \vec{DB} = 0$; les deux vecteurs $\vec{ED}$ et $\vec{DB}$ étant non colinéaires, $\vec{AG}$ est bien un vecteur normal au plan (EDB) qui a de ce fait pour équation : $-x + y + z = 0$.

b. Le plan d'équation $x + y - z = 0$ est le plan (EGD) et celui d'équation $x - y + z = 0$, le plan (BGD) .

2 a. Lorsque l'on se déplace à partir, par exemple, d'un point $M(x; y; z)$ de la face (EDB) , pour lequel on a $-x + y + z = 0$ et que l'on va vers l'intérieur de S , nécessairement x diminue, ou y augmente ou z augmente : dans ces trois cas, la quantité $-x + y + z$ augmente et on obtient $-x + y + z > 0$.

Comme lorsque l'on va vers l'extérieur de S , la quantité $-x + y + z$ ne peut que diminuer, on obtient que l'inéquation $-x + y + z > 0$ caractérise le demi-espace ouvert de frontière le plan (EDB) contenant S .

b. Un raisonnement analogue au précédent effectué pour chaque face délimitant le solide S , nous montre que le solide ouvert (ne contenant pas les bords) est caractérisé par le système d'inéquations :

$$\begin{cases} -x + y + z > 0 \\ x + y - z > 0 \\ x - y + z > 0 \\ 0 < x < 100, 0 < y < 100, 0 < z < 100 \end{cases}$$

3 Le tétraèdre $EABD$ a pour volume :

$$\frac{1}{3} AE \times \text{aire}(ADB) = \frac{1}{6} V(ABCDEFGH) ;$$

comme il y a trois tétraèdres de ce type à l'extérieur de S dans le cube, on obtient que :

$$V(S) = \frac{1}{2} V(ABCDEFGH) = 5 \times 10^5 \text{ u.v.}$$

4 a. Si trois nombres positifs sont les cotés d'un triangle, ils vérifient l'inégalité triangulaire et réciproquement, les inégalités étant strictes si on veut de vrais triangles (points non alignés). La condition s'écrit donc :

$$\begin{cases} x + y > z, y + z > x, z + x > y \\ 0 < x < 100, 0 < y < 100, 0 < z < 100 \end{cases}$$

Système qui est équivalent à $\mathcal{E}$.

b. Choisir 3 nombres réels entre 0 et 100, c'est choisir un point du cube $ABCDEFGH$. Chaque point de S réalise l'événement « les trois nombres choisis mesurent les cotés d'un triangle », les autres points non, d'après **4**.

La probabilité cherchée est donc le rapport du volume de S à celui du cube, soit $\frac{1}{2}$.

107 Partie A

La condition est nécessaire : si Δ_1 et Δ_2 sont sécantes, alors le point M appartient au plan contenant ces deux droites ; ce plan contient aussi A et est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

La condition est suffisante : soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires (voir figure) $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. La droite passant par A et dirigée par $\vec{u}_1$ est sécante à toute droite Δ_2 de $\mathcal{P}$, passant par un point M de $\mathcal{P}$ et dirigée par $\vec{u}_2$, puisque ces droites sont coplanaires et non parallèles.

Partie B

$$1 \Delta_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \Delta_2 \begin{cases} x = a - u \\ y = b + 2u, u \in \mathbb{R} \\ z = c - 3u \end{cases}$$

2 a. $c = a - b - 1$. La résolution montre que les deux droites se coupent au point de paramètre $t = \frac{2a+b}{5}$ sur Δ_1 et $u = \frac{3a-b-5}{5}$ sur Δ_2 .

b. $\mathcal{P}: x - y - z - 1 = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(1; -1; -1)$.
 $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 1 - 3 + 2 = 0$; $\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = -1 - 2 + 3 = 0$.

Prendre des initiatives

108 L'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$.

Les coordonnées de $A(a; 0; 0)$ vérifient l'équation de ce plan, car $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} - 1 = 1 - 1 = 0$.

Il en est de même des coordonnées des points B et C . Ce plan contient donc les points A, B et C , qui n'étant pas alignés définissent bien le plan (ABC) .

109 Soient A et B les points communs aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, de centre O_1 et O_2 de rayons r_1 et r_2 . Soit $\mathcal{P}$ le plan médiateur du segment $[AB]$. $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{C}_1$ en deux points diamétralement opposés E et E' .

$\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{C}_2$ en deux points diamétralement opposés F et F' .

La médiatrice de $[EE']$ dans $\mathcal{P}$ et celle de $[FF']$ dans $\mathcal{P}$ sont sécantes en un point Ω , car les droites (EE') et (FF') sont elles-mêmes sécantes les deux cercles n'étant pas coplanaires.

Pour tout point M de $\mathcal{C}_1$, $\Omega M^2 = \Omega O_1^2 + r_1^2 = \Omega A^2$.

Pour tout point M de $\mathcal{C}_2$, $\Omega M^2 = \Omega O_2^2 + r_2^2 = \Omega A^2$.

Les points de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$ appartiennent donc à la sphère de centre Ω et de rayon ΩA .

110 1 Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Comme $(CH) \perp (AB)$ et $(CO) \perp (AB)$, la droite

(AB) est orthogonale au plan (COH) et par suite à la droite (OH) . OH est donc la distance de O à la droite (AB) et comme une équation de (AB) est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

$$\text{On a } OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dans le triangle rectangle COH , on a :

$$CH^2 = CO^2 + OH^2 = c^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}$$

$$CH = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2 Le volume du tétraèdre $COAB$ se calcule de deux façons :

$$\frac{1}{3} OK \times \text{aire}(ABC) = \frac{1}{3} \times PC \times \text{aire}(OAB),$$

où K est le projeté orthogonal de O sur (ABC) .

Comme une équation du plan (ABC) est :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \text{ (voir exercice 108).}$$

$$OK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{|abc|}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{aire}(ABC)^2 &= c^2 \times \frac{1}{4} a^2 b^2 \times \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{(abc)^2} \\ &= \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{1}{4} b^2 c^2 + \frac{1}{4} c^2 a^2 \\ &= \text{aire}(OAB)^2 + \text{aire}(OCB)^2 + \text{aire}(OAC)^2. \end{aligned}$$

Pistes pour l'accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

$$\begin{aligned} 111 \text{ a. } \cos \widehat{CAB} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} \\ &= \frac{64 + 25 - 49}{2 \times 8 \times 5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(théorème d'Al Kashi),

donc $\widehat{CAB} = 60^\circ$.

$$112 \text{ b. } CI^2 = \frac{25 + 49}{2} - 16 = 21 \text{ et } CI = \sqrt{21}$$

(théorème de la médiane).

112 a. Vrai. b. Vrai.

$$112 \text{ c. Vrai, car } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = \frac{12}{13} \times 3 - \frac{18}{13} \times 2 = 0$$

$$\text{et } \frac{12}{3 \times 13} + \frac{18}{2 \times 13} - 1 = 0.$$

113 Les réponses correctes sont : b. c. et d.

$$\text{Justification pour d. : } \vec{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} = -5\vec{d}$$

où $\vec{d}$ dirige la droite d .

Pour e. : faux ;

$$\text{le système } \begin{cases} 6 + s = 2 - t \\ 8 + s = 1 + 2t \\ 7 - s = -1 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -4 - t \\ t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

est sans solution, donc elles ne sont pas sécantes et comme elles ne sont pas parallèles, elles ne sont pas coplanaires.

$$114 \quad AI = AJ = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a,$$

$$IJ = \frac{1}{2}BE = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{2}(AI^2 + AJ^2 - IJ^2) = \frac{5}{4}a^2$$

$$\text{et } \cos \widehat{IAJ} = \frac{\vec{AI} \cdot \vec{AJ}}{AI \times AJ} = \frac{5}{6},$$

$$\text{d'où : } \cos \widehat{IAJ} \approx 33,6^\circ.$$

$$115 \quad 1 \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ d'où } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$$

Donc le triangle ABC est rectangle en A .

$$2 \quad \cos \widehat{AOC} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{OA \times OC} = \frac{3 - 1 + 0}{\sqrt{2} \times \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\widehat{AOC} \approx 67,8^\circ.$$

$$116 \quad a. \quad 3\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 11,5.$$

$$b. \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ = 4 - 1 + 16 = 19 \text{ et } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{19}$$

117 1 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ diagonales du carré $ABCD$,
 $\vec{AC} \cdot \vec{BI} = \sqrt{2} \vec{EF} \cdot \vec{BI} = 0$ puisque les droites (EF) et (AC) sont parallèles et que dans le triangle équilatéral BEF , I est le milieu du segment $[EF]$.

Le vecteur $\vec{AC}$ du plan (ABC) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDI) , il est donc normal au plan (BDI) et, de ce fait, les plans (ABC) et (BDI) sont perpendiculaires.

2 Le plan médiateur du segment $[BD]$ est le plan (ACK) avec K milieu de $[FG]$. Il est alors aisé de montrer que c'est un plan de symétrie du solide.

$$118 \quad 1 \text{ Vrai. } 2 \text{ Faux. } 3 \text{ Vrai. } 4 \text{ Vrai. } 5 \text{ Faux.}$$

$$119 \quad 1 \quad \vec{n} \cdot \vec{EB} = 0 = \vec{n} \cdot \vec{BC} \text{ avec } \vec{EB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2 \quad (BCE) : x + z - 1 = 0.$$

$$3 \quad \Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$4 \quad (ABC) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = -1 \end{cases};$$

d'où $R(-1; 0; 0)$ qui est bien le symétrique de $B(1; 0; 0)$ par rapport à l'origine A .

$$120 \quad \text{On a : } \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ d'où :}$$

$$1 \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1, \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 4 \text{ et } \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 9;$$

$$2 \quad \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \text{ et } \widehat{BAC} \approx 81,9^\circ;$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{4}{\sqrt{65}} \text{ et } \widehat{ABC} \approx 60,2^\circ;$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{9}{\sqrt{130}} \text{ et } \widehat{ACB} \approx 37,9^\circ;$$

$$3 \quad \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a}{2} \\ c = \frac{a}{3} \end{cases}.$$

$$\text{On peut donc prendre avec } a = 6, \vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$4 \quad (ABC) : 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

121 1 Dans le repère orthonormé $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$, on a $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(1; 1; 1)$ et

$$G(1/2; 1/2; 1/2), \text{ donc } \vec{GA} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \vec{GB} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \vec{GC} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{GD} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ vecteurs qui ont tous pour norme } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2 \quad \cos \widehat{AGC} = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{GC}}{GA \times GC} = -\frac{1}{3}; \text{ d'où } \widehat{AGC} \approx 109,5^\circ.$$

$$122 \quad 1 \quad \vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}') = a(bc' - b'c) + b(ca' - c'a) + c(ab' - a'b) \\ = abc' - ab'c + a'bc - abc' + ab'c - a'bc = 0. \\ \vec{u}' \cdot \vec{u} \wedge \vec{u}' = a'(bc' - b'c) + b'(ca' - c'a) + c'(ab' - a'b) \\ = a'bc' - a'b'c + a'b'c - ab'c' + ab'c' - a'bc' = 0.$$

$$2 \quad \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \text{ et } \vec{u} \wedge \vec{u}' = -\vec{u}' \wedge \vec{u}.$$

3

ALGO

Variables : $x, y, z, x', y', z', a, b, c$: réels ;

Début

Entrer (x, y, z, x', y', z') ;

$a \leftarrow yz' - y'z$

$b \leftarrow zx' - z'x$

$c \leftarrow xy' - x'y$

$n \leftarrow (a, b, c)$

afficher (« un vecteur orthogonal à u et u' est n : », n)

Fin.

Avec TI :

```
PROGRAM:VNORMAL
:Promp (X,Y,Z)
:Promp (X',Y',Z')
:Y*Y'-Z*Z'+A
:Z*T-X*U+B
:X*U-Y*T+C
:Disp "VECTEUR N
```

```
:Disp A
:Disp B
:Disp C
```

Avec Casio :

```
=====V NORMAL=====
"X1"?>X#
"Y1"?>Y#
"Z1"?>Z#
"X2"?>X#
"Y2"?>Y#
"Z2"?>Z#
TOP [BTM] SRC MENU [A] CHAR
```

```
=====V NORMAL=====
YXU-UXZ+A#
ZXU-TXV+C#
A#
B#
C#
TOP [BTM] SRC MENU [A] CHAR
```

Stop#

4 Application : on lance le programme avec les données pour $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ et on trouve : $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et une équation du plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$: $6x - 5y + z = 0$.

123 **1** Avec $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et le milieu I de $[AB] (-1; 4; -3)$,

on obtient $P_1 : x + 2z + 7 = 0$.

Et de même $P_2 : x - y + 3 = 0$ et $P_3 : -y + z + 5 = 0$.

2 a. $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

b. Ω est équidistant des quatre points A, B, C et D ; il appartient donc aux plans médiateurs de chacun des segments formés avec deux des points, en particulier $[BD]$, $[AD]$ et $[CA]$.

3 a. Les trois plans ont en commun le point $\Omega(-1; 2; -3)$.

b. On résout le système figurant à la question **a**.

4 Une équation de la sphère circonscrite aux quatre points est : $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

124 Le plan médiateur de $[AD]$ a pour équation :
 $y + z - 3 = 0$.

Celui de $[BC] : -y + z + 1 = 0$;

celui de $[CD] : x + y - 5 = 0$.

Le système $\begin{cases} y + z - 3 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$ a pour unique solution

(voir écran Xcas) le triplet $(3; 2; 1)$.

ce qui prouve que les trois plans médiateurs ont en commun le point $\Omega(3; 2; 1)$ équidistant des quatre points A, B, C et D et donc centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

resoudre([x+y-5=0,-y+z+1=0,y+z-3=0],[x,y,z])

[3, 2, 1]

125 a. Vrai ; M' est l'intersection du plan perpendiculaire à la droite Δ' passant par M .

b. Vrai ; il s'agit de la droite passant par N et de vecteur directeur $\vec{\Delta}'$.

c. Faux. **d.** Faux. **e.** Vrai ; R' est le point M' du **a**.

126 Soit Ω le centre d'une telle sphère, on doit avoir $\vec{C\Omega} = t\vec{n}$, où $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P)

et $C\Omega = 6$. Ces deux conditions sont alors suffisantes. Cela donne $t = \pm 2$ et on peut choisir $\Omega(14; -3; 8)$ ou $\Omega'(6; 5; 4)$.

Avec le centre Ω , on obtient la sphère d'équation :

$$(x-14)^2 + (y+3)^2 + (z-8)^2 = 36.$$

127 **1** $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 4z + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ -1 + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

ce qui est la représentation paramétrique d'une droite passant par le point $A(-2; 1; 0)$ obtenu avec $t = 1$, et

dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 $4(-1-t) + 4t + 1 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

ce qui prouve que la droite et le plan (Q) ont un seul point en commun, donc sont sécants au point B de la droite repéré par le paramètre $t = 0$.

3 Le système (S) a donc pour unique solution $(-1; 0; 1)$, qui sont les coordonnées du point B .

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 3y - 2z \\ y = t \\ z = -3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

ce qui est la représentation paramétrique d'une droite Δ' passant par le point $C(1; 0; -3)$ obtenu avec $t = 0$,

et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme C n'appartient pas au plan (Q') d'équation $2x + 3y + z = 1$ car $2 + 0 - 3 = -1$ et comme $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal au plan (Q') ($-2 + 3 - 1 = 0$) la droite Δ' est strictement parallèle à (Q') : ils n'ont donc aucun point en commun et le système n'a aucune solution.

5 On peut par exemple choisir comme troisième équation : $2x + 3y + z + 1 = 0$, équation d'un plan qui contient Δ' , ou bien encore $y + z + 3 = 0$.

128 **1** Pour tout réel t , $P(t) = t^2\vec{v}^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}^2$.

2 $P(t)$ est un trinôme du second degré qui est positif ou nul pour tout réel t , puisque c'est le carré de la norme d'un vecteur. Son discriminant est donc négatif ou nul, ce qui donne :

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\vec{u}^2\vec{v}^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \vec{u}^2\vec{v}^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

L'égalité a lieu lorsque le discriminant est nul, c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel t_0 qui annule $P(t)$, c'est-à-dire lorsque $\vec{u} + t_0\vec{v} = \vec{0}$, donc lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

129 **1** $\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 + 1 + 1 = 0$

et $\vec{n} \cdot \vec{u}' = 6 + 1 - 7 = 0$.

2 On trouve $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal à $\mathcal{P}$. Une

équation de P est : $y + z + 2 = 0$.

3 Les coordonnées du point K sont solutions du système :

$$\begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ x = -3s \\ y = 2 + s \\ z = 4 + 7s \end{cases}$$

Comme $2 + s + 4 + 7s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = -1$, on obtient $K(3; 1; -3)$.

4 Il s'agit de la droite (AK) qui coupe $\mathcal{D}$ en A , $\mathcal{D}'$ en K et dont le vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. C'est la perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

130 **1** Les vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ des deux plans sont colinéaires, donc les plans sont parallèles.

2 Soit $A(1; 0; 2)$ un point de (P) et D la perpendiculaire à P passant par A .

Une représentation paramétrique de D est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$;

D coupe le plan Q au point B repéré par le paramètre t solution de :

$$3(1+t) + 6(2t) - 3(2-t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}.$$

La distance de (P) à (Q) est : $AB = \frac{7}{18} \|\vec{n}\| = \frac{7\sqrt{6}}{18}$.

3 Soit H le projeté orthogonal de O sur P et K celui de O sur Q . La distance de P à Q est la norme du vecteur $\vec{HK}$.

$$\text{Or, } \vec{OH} \cdot \vec{n} = ax_H + by_H + cz_H = -d_1$$

$$\text{et } \vec{OK} \cdot \vec{n} = ax_K + by_K + cz_K = -d_2$$

où $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal aux deux plans.

Par différence, on obtient $\vec{HK} \cdot \vec{n} = -d_2 + d_1$, d'où

$$KH \times \|\vec{n}\| = |d_1 - d_2| \text{ et } HK = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

131 **1** $x^2 + y^2 = a^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)$ on trouve les cercles de centre $\Omega_k(0; 0; k)$ de rayon $|a| \sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}$, dans les plans d'équation $z = k$.

$$\text{2 } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = a \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = a \end{cases}$$

on trouve la réunion de deux droites, définies par les intersections des plans dont les équations apparaissent dans les systèmes.

3 Oui, on obtient, par exemple, des droites dans les plans d'équation $x = a$ ou $x = -a$.

132 **1** Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n}_1(1; 2; -2)$ avec $\|\vec{n}_1\| = 3$.

Avec l'expression de la distance d'un point à un plan

$$\text{établie à l'exercice 86, on obtient : } d_1 = \frac{|x + 2y - 2z|}{3},$$

$$\text{et la distance de } M \text{ à } \mathcal{P}_2 \text{ est : } d_2 = \frac{|3x + 4z - 2|}{5}.$$

2 M est équidistant de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$$\Leftrightarrow d_1 = d_2 \Leftrightarrow d_1^2 = d_2^2$$

$$\Leftrightarrow 25(x + 2y - 2z)^2 = 9(3x + 4z - 2)^2.$$

3 La condition précédente s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & [5(x + 2y - 2z) + 3(3x + 4z - 2)] \\ & \quad \times [5(x + 2y - 2z) - 3(3x + 4z - 2)] = 0 \\ & (14x + 10y + 2z - 6)(-4x + 10y - 22z + 6) = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$7x + 5y + z - 3 = 0 \text{ ou } -2x + 5y - 11z + 3 = 0.$$

Il s'agit bien de la réunion de deux plans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{v}_1(7; 5; 1)$ et $\vec{v}_2(-2; 5; -11)$, vérifiant $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$:

$\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux plans perpendiculaires.

Soit M un point de Δ , droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, on a, puisque M est commun à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$:

$$x + 2y - 2z = 0 \text{ et } 3x + 4z - 2 = 0$$

$$\text{donc aussi : } 5(x + 2y - 2z) + 3(3x + 4z - 2) = 0$$

$$\text{et } 5(x + 2y - 2z) - 3(3x + 4z - 2) = 0$$

ce qui signifie que M appartient à la fois à $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$. Donc :

$$\Delta = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2.$$

4 On a, par exemple : $\vec{n}_1(1; 2; -2)$, $\vec{n}_2(3; 0; 4)$, $\vec{v}_1(7; 5; 1)$ et $\vec{v}_2(-2; 5; -11)$.

$$\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{n}_1\| \times \|\vec{v}_1\|} = \frac{15}{3 \times 5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{et } \frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{n}_2\| \times \|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

mais ces vecteurs sont définis au signe près, donc :

$$\cos(\vec{n}_1; \vec{v}_1) = \pm \cos(\vec{n}_2; \vec{v}_1) \text{ et par suite :}$$

$$\text{soit i) } (\vec{n}_1; \vec{v}_1) = (\vec{n}_2; \vec{v}_1) \quad (2\pi),$$

$$\text{soit ii) } (\vec{n}_1; \vec{v}_1) = -(\vec{n}_2; \vec{v}_1) \quad (2\pi),$$

$$\text{soit iii) } (\vec{n}_1; \vec{v}_1) = \pi - (\vec{n}_2; \vec{v}_1) \quad (2\pi),$$

$$\text{soit iv) } (\vec{n}_1; \vec{v}_1) = (\vec{n}_2; \vec{v}_1) - \pi \quad (2\pi),$$

mais i) entraîne $(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 0 \quad (2\pi)$ ce qui est absurde et iv) entraîne $(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \pi \quad (2\pi)$ ce qui est également absurde, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ n'étant pas colinéaires, d'où il reste ii) et iii) qui donnent : $(\vec{n}_1; \vec{v}_1) = (\vec{v}_1; \vec{n}_2) \quad (\pi)$.

Considérons dans un plan Π orthogonal à Δ les droites :

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \Pi, \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_2 \cap \Pi,$$

$$\Delta_1 = \mathcal{Q}_1 \cap \Pi \text{ et } \Delta_2 = \mathcal{Q}_2 \cap \Pi$$

dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$.

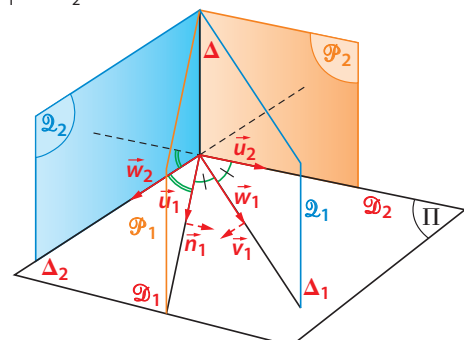
$$\begin{aligned} \text{On a } (\vec{u}_1; \vec{w}_1) &= (\vec{u}_1; \vec{n}_1) + (\vec{n}_1; \vec{v}_1) + (\vec{v}_1; \vec{w}_1) \quad (\pi) \\ &= (\vec{n}_1; \vec{v}_1) \quad (\pi), \end{aligned}$$

$$\text{car } (\vec{u}_1; \vec{n}_1) = (\vec{v}_1; \vec{w}_1) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

$$\begin{aligned} \text{et } (\vec{w}_1; \vec{u}_2) &= (\vec{w}_1; \vec{v}_1) + (\vec{v}_1; \vec{n}_2) + (\vec{n}_2; \vec{u}_2) \\ &= (\vec{v}_1; \vec{n}_2) \quad (\pi), \end{aligned}$$

donc : $(\vec{u}_1; \vec{w}_1) = (\vec{w}_1; \vec{u}_2)$, ce qui montre que Δ_1 est bissectrice de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$; on obtient de même Δ_2 bissectrice des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Les plans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont ainsi les plans bissecteurs des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.



Probabilités conditionnelles

➔ Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Conditionnement, indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.	• Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.
Indépendance de deux événements.	■ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour A et B.	Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes. Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre, notamment pour simuler une marche aléatoire. ⇒ [SVT] Hérité, génétique, risque génétique.

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

2. Intentions des auteurs

Ce chapitre introduit les notions de probabilité conditionnelle, la formule des probabilités totales et la notion d'indépendance de deux événements.

Pour la notion de conditionnement, on s'est attaché à mettre en évidence le fait qu'une nouvelle probabilité a été définie en privilégiant la notation $p_A(B)$ à $p(B/A)$, qui prête à confusion et laisse supposer qu'il existerait des « événements conditionnels », notion qui n'a pas de sens.

Le point de vue adopté est celui de la richesse et de la multiplicité des situations et des exercices, parmi lesquels des choix s'imposeront.

Les auteurs ont préféré introduire la notion de probabilité conditionnelle avant celle de loi continue. Les exercices et situations faisant intervenir de telles lois dans le cadre des probabilités conditionnelles sont intégrés aux chapitres dévolus à l'introduction des lois continues.

Partir d'un bon pied

- A** 1 a. Proportion de femmes parmi les électeurs de B.
b. Proportion d'électeurs de B parmi les femmes.
c. Proportion de femmes ayant voté pour B dans l'ensemble des 1 000 personnes interrogées.

2 a. Vrai. b. Faux. c. Faux.

B a. Non. b. Oui. c. Oui.

- C a. $p(A) = 0,6$.
b. $p(B) = 0,5$.
c. $A \cup B$: « le résultat est pair ou premier » :
 $p(A \cup B) = 0,9$.
d. $A \cap B$: « le résultat est pair et premier » :
 $p(A \cap B) = p(\{2\}) = 0,2$.

D 1 Faux. 2 Faux. 3 Vrai.
4 Vrai. 5 Vrai.

Découvrir

Activité 1 Vers les probabilités conditionnelles

1 $p(S) = \frac{113}{285}$; $p(P) = \frac{82}{285}$; $p(T) = \frac{90}{285}$;

$p(F) = \frac{158}{285}$; $p(G) = \frac{127}{285}$.

2 a. $p_G(T) = \frac{37}{127}$.

b. Lorsque G est réalisé, on s'intéresse à la deuxième ligne du tableau seulement.

$p_G(S) = \frac{46}{127}$; $p_G(P) = \frac{44}{127}$.

c. $p(T \cap G) = \frac{37}{285}$.

d. $p_G(T) = \frac{\frac{37}{285}}{\frac{127}{285}} = \frac{p(T \cap G)}{p(G)}$.

3 a. C'est la probabilité de choisir une fille parmi les élèves de Seconde.

b. $p_S(F) = \frac{67}{113}$.

c. Oui : $\frac{67}{113} = \frac{\frac{67}{285}}{\frac{113}{285}} = \frac{p(F \cap S)}{p(S)}$.

Activité 2 Partitions d'un ensemble

1 Deux partitions de E : F et G ; S, P et T.

2 Si $p(A) \neq 0$, alors $p(\bar{A}) \neq 1$ et si $p(A) \neq 1$ alors $p(\bar{A}) \neq 0$.

Ainsi ni A ni $\bar{A}$ ne sont vides (leur probabilité est non nulle). De plus, par définition $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$. Donc A et $\bar{A}$ forment une partition de E.

Activité 3 Calculer une probabilité à partir d'une partition et d'un arbre pondéré

1 a. $\frac{67}{113}$ correspond à la probabilité du tirage d'une fille parmi les élèves de Seconde.

b. $\frac{113}{285} = p(S)$;

$\frac{67}{113} = p_S(F)$;

$\frac{113}{285} \times \frac{67}{113} = p(F \cap S)$.

c. $\alpha = p(P) = \frac{82}{285}$; $\beta = p_P(F) = \frac{38}{82}$;

$a = p(T) = \frac{90}{285}$; $b = p(F) = \frac{53}{90}$.

d. $\frac{113}{285} \times \frac{67}{113} + \alpha\beta + ab = \frac{67}{285} + \frac{38}{285} + \frac{53}{285}$
 $= \frac{158}{285} = p(F)$.

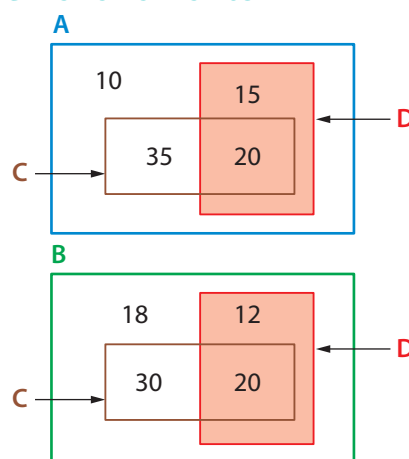
2 $p_F(T) \times p(F) + p_G(T) \times p(G)$.

$= \frac{53}{158} \times \frac{158}{285} + \frac{37}{127} \times \frac{127}{285}$

$= \frac{53}{285} + \frac{37}{285} = \frac{90}{285} = p(T)$.

Activité 4 Indépendance de deux événements

1



2 a. $p(D) = \frac{35}{80} \approx 0,4375$.

b. $\frac{20}{55} = p_C(D) \approx 0,3637$.

c. Il est plus probable de tirer une facture d'un client ayant pris un dessert parmi la clientèle globale que parmi celle des seuls buveurs de café. Ainsi, les événements « prendre un café » et « prendre un dessert » n'apparaissent pas indépendants.

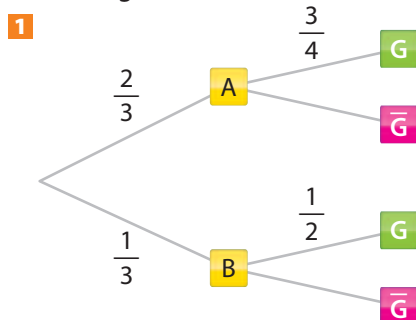
3 $p(D) = 0,4$ et $p_C(D) = 0,4$.

Les probabilités de tirer une facture avec dessert est la même si l'on tire parmi toutes les factures, ou seulement parmi celles des clients ayant pris un café : dans le restaurant B, les événements « prendre un dessert » et « prendre un café » apparaissent indépendants.

Exercices d'application

➔ Savoir faire Reconnaître des probabilités conditionnelles, construire et exploiter un arbre pondéré

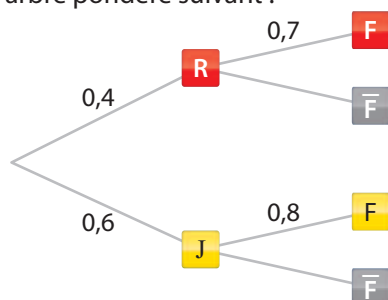
1 On appelle A (respectivement B) l'événement « Monsieur Cruciverbis achète l'hebdomadaire A » (respectivement B) et G l'événement « Monsieur Cruciverbis achève la grille de mots croisés de son hebdomadaire ».



2 $p(G \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

➔ Savoir faire Utiliser la formule des probabilités totales

2 On a l'arbre pondéré suivant :



$p(F) = 0,7 \times 0,4 + 0,8 \times 0,6 = 0,76$.

➔ Travaux pratiques

3 Étude d'une épidémie

1 a. Notations : V : « l'individu tiré au sort est vacciné » ; M : « l'individu tiré au sort est malade ».

b. $p(V) = 0,25$; $p_V(\bar{M}) = 0,92$; $p(M) = 0,1$.

c. On cherche $p_{\bar{V}}(M) = \frac{p(\bar{V} \cap M)}{p(\bar{V})}$.

2 a. Arbre pondéré :

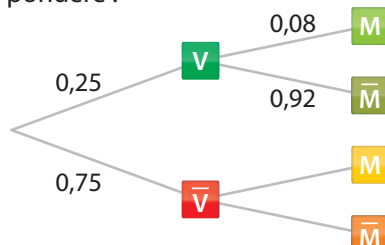


Tableau :

	V	$\bar{V}$	total
M	2		10
$\bar{M}$	23		
total	25	75	

L'information « 10% de la population est malade » trouve sa place dans la ligne M, colonne du total.

Dans l'arbre, 0,1 correspond à la somme des probabilités des chemins menant à M, c'est-à-dire à $p(M \cap V) + p(M \cap \bar{V})$.

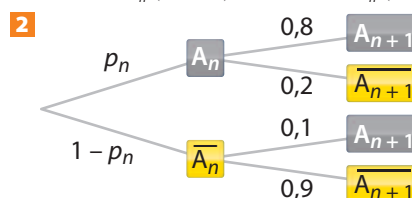
On peut alors calculer :

$$p(M \cap \bar{V}) = 0,1 - 0,25 \times 0,08 = 0,08.$$

3 $p_{\bar{V}}(M) = \frac{0,08}{0,75} = \frac{8}{75}$
 $\approx 0,107$ (à 0,001 près).

4 Étude de l'évolution d'une population

1 $0,1 = p_{A_n}(A_{n+1})$ et $0,2 = p_{A_n}(\bar{A}_{n+1})$.



3 a. $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1(1 - p_n)$
 $= 0,7p_n + 0,1$,

d'où le contenu de la formule dans B3.

b. Feuilles de calcul à réaliser.

c. La suite semble converger vers $\frac{1}{3}$ quelle que soit la valeur initiale choisie.

4 a. $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = 0,7p_n + 0,1 - \frac{1}{3}$
 $= 0,7(u_n + \frac{1}{3}) + 0,1 - \frac{1}{3}$
 $= 0,7u_n$.

b. Avec $u_n = 0,7^n u_0$ on obtient :

$$p_n = (p_0 - \frac{1}{3}) \times 0,7^n + \frac{1}{3}.$$

c. Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{3}.$$

➔ Faire le point

9 1 b. 2 a. et b. 3 c. 4 a. et c.

10 1 b. et c. 2 a. 3 b. et c. 4 a. et c.

11 Situation 1 :

1 Vrai. 2 Faux.

Situation 2 :

1 Faux. 2 Faux.

➔ Exercices d'application

1 Probabilités conditionnelles

12 1 Faux : il faut imposer $p(A)$ non nul.

2 Faux.

3 Vrai.

13 1 Faux, si $p(A) = 0$, vrai sinon.

2 Vrai.

3 Vrai.

4 Vrai.

5 Vrai, si $p(A)$ non nul.

14 1 b. et c. 2 c. 3 a., b. et c. 4 a. et c.

15 Les phrases associées à des probabilités conditionnelles sont les phrases 2 et 5.

16 a. $p_R(G) = \frac{1}{4}$. b. $p_G(R) = \frac{1}{3}$.

c. $p(R \cap G) = \frac{1}{5}$. d. $p_{\bar{G}}(R) = \frac{1}{5}$.

17 On démontre sans difficulté que :

$p_A(B) = p_B(A)$ équivaut à $p(A \cap B) = 0$ ou $p(A) = p(B)$.

18 a. $p(A) = 0,5$;

b. $p(A \cap B) = 0,14$.

19 $p(A \cap B) = 0,2$; $p_B(A) = \frac{2}{7}$; $p_A(B) = \frac{2}{3}$.

20 On a d'une part $p(A \cap B) = 3p(A) - 0,5$ et d'autre part $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = 0,5p(A)$.

On peut alors calculer $p(A)$ en égalisant, et on obtient : $p(A) = 0,2$.

Alors : $p(B) = 2p(A) = 0,4$.

21 On a : $p(A \cap B) = 0,5p(A)$ et $p(A \cap B) = 0,3p(B)$.
De plus : $p(A) + 0,3 = p(B)$.

On résout le système : $\begin{cases} 0,5p(A) = 0,3p(B) \\ p(B) = p(A) + 0,3 \end{cases}$

On obtient : $p(A) = 0,45$, $p(B) = 0,75$, puis $p(A \cap B) = 0,225$.

22 $p(C) = 0,25$ et $p_C(A) = 0,4$; on en déduit :

$$p(A \cap C) = 0,1.$$

23 1 a. 0,25 ; b. 0,5 ; c. 0,25.

2 a. 0,5 ; b. 0,5 ; c. 0.

24 La probabilité recherchée est égale à 0,5 (somme impaire et bleu sur 2 : $\frac{1}{12}$; bleu sur 2 : $\frac{1}{6}$).

On trouve la probabilité d'obtenir un impair avec le dé rouge.

25 $p(G) = 10^{-6}$; $p_G(O) = \frac{1}{20}$; on obtient :

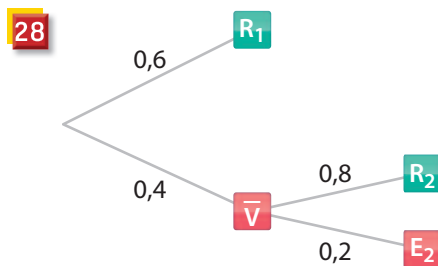
$$p(G \cap O) = 5 \times 10^{-8}.$$

26 1 On lance une pièce et un dé équilibrés.

On gagne lorsque : on obtient « pile » et une face de dé au plus égale à 4, ou on obtient « face » et une face de dé égale à 1. Dans tous les autres cas, on perd.

2 On obtient $p(G) = \frac{5}{12}$.

27 a. $\frac{3}{4}$; b. $\frac{1}{2}$; c. $\frac{3}{8}$; d. $\frac{3}{8}$.



$$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) = 0,2 \times 0,4 = 0,08.$$

$$\begin{aligned} 29 \quad p_V(M) &= \frac{p(M \cap V)}{p(V)} = \frac{p_M(V) \times p(M)}{p(V)} \\ &= \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = 0,075. \end{aligned}$$

30 1 a. $p(C \cap D) = p_D(C) \times p(D) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$.

b. $p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D) = 0,9$;
 $p(\overline{C \cup D}) = 0,1$.

2 $p_C(\overline{D}) = 1 - p_C(D) = 1 - \frac{p(C \cap D)}{p(C)} = \frac{5}{8}$.

3 $p_{\overline{C}}(\overline{D}) = \frac{p(\overline{C} \cap \overline{D})}{p(\overline{C})} = 0,5$.

2 Probabilités totales

31 1 Faux. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Vrai.

32 1 b. et c. sont vraies.

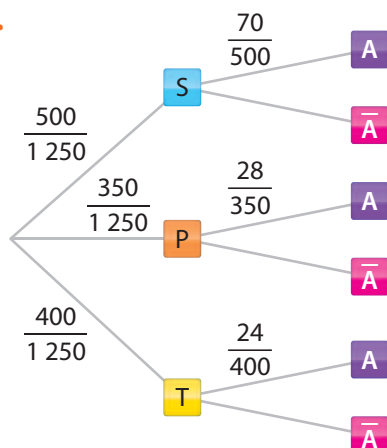
2 a. et c. sont vraies.

33 $p(F) = 0,7 \times 0,5 + 0,8 \times 0,25 = 0,55$.

$$34 \quad p(R) = \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{10} = \frac{19}{60}.$$

$$35 \quad 1 \quad \frac{70}{500} = 0,14.$$

2 a.



$$b. p(A \cap S) = \frac{7}{125}.$$

$$c. \frac{70}{500} \times \frac{500}{1250} + \frac{28}{350} \times \frac{350}{1250} + \frac{24}{400} \times \frac{400}{1250} = \frac{122}{1250}.$$

$$d. p_A(P) = \frac{\frac{28}{1250}}{\frac{122}{1250}} = \frac{28}{122} = \frac{14}{61}.$$

$$36 \quad a. p(R) = p(R \cap D) + p(R \cap \bar{D}) = 0,98 \times 0,05 + 0,04 \times 0,95 = 0,087.$$

$$b. p(\bar{R} \cap \bar{D}) = 0,96 \times 0,95 = 0,902.$$

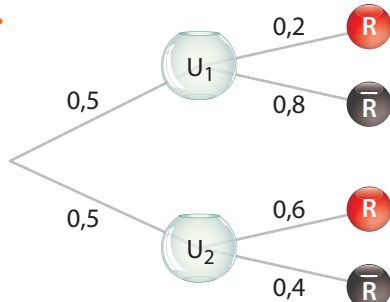
$$c. p(E) = p(R \cap \bar{D}) + p(\bar{R} \cap D) = 0,038 + 0,02 \times 0,05 = 0,039.$$

$$d. p_R(\bar{D}) = \frac{1}{87}.$$

$$e. p_{\bar{R}}(D) = \frac{1}{913}.$$

$$37 \quad a. p_{U_1}(R) = \frac{1}{5}; p_{U_2}(R_2) = \frac{3}{5}.$$

b.

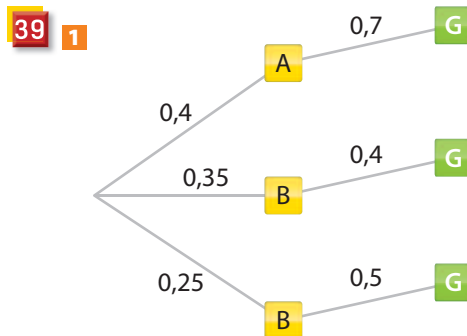


$$c. p(R) = 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,6 = 0,4.$$

$$38 \quad 1 \quad a. 0,15 \times 0,3 = 0,05.$$

$$b. 0,45 \times 0,85 + 0,05 = 0,4325.$$

$$2 \quad p_D(\bar{M}) = \frac{0,3 \times 0,15}{0,4325} = \frac{20}{173}.$$



$$2 \quad p(G) = 0,7 \times 0,4 + 0,4 \times 0,35 + 0,5 \times 0,25 = 0,545.$$

$$3 \quad p_G(A) = \frac{0,28}{0,545} = \frac{56}{109}.$$

$$4 \quad \binom{10}{5} \times 0,545^5 \times 0,455^5 \approx 0,2363.$$

$$40 \quad p(\bar{A} \cap \bar{P}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5};$$

$$p(A \cap \bar{P}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12};$$

$$p(\bar{P}) = \frac{3}{5} + \frac{1}{12} = \frac{41}{60};$$

$$p(P) = \frac{19}{60}.$$

$$41 \quad a. p(A) = 0,02 \times 0,6 + 0,65 \times 0,1 + 0,97 \times 0,3 = 0,368.$$

$$b. p_{\bar{A}}(R) = \frac{0,3 \times 0,03}{0,632} \approx 0,014 \text{ (à } 0,001 \text{ près)}.$$

$$42 \quad p(b_2) = p(b_2 \cap b_1) + p(b_2 \cap \bar{b}_1) = p_{b_1}(b_2) \times p(b_1) + p_{\bar{b}_1}(b_2) \times p(\bar{b}_1) = 0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,8 = 0,34.$$

3 Indépendances de deux événements

$$43 \quad 1 \text{ Faux. } 2 \text{ Faux. } 3 \text{ Vrai.}$$

44 a. 2 et 5 sont compatibles avec l'indépendance de A et B.

b. Situation à choisir.

45 Par exemple : « 30 % des individus portant des lunettes sont diplômés de l'enseignement supérieur ».

46 a. Si A et B sont indépendants :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) = 0,12$$

$$\text{et } p(A \cup B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58.$$

b. Si A et B sont incompatibles : $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cup B) = 0,7$.

$$47 \quad p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,4 + 0,3 - 0,58 = 0,12 = p(A)p(B).$$

On en déduit que A et B sont indépendants.

$$48 \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B);$$

$$\text{d'où : } 0,75 = 0,5 + p(B) - 0,5p(B).$$

$$\text{On obtient : } p(B) = 0,5.$$

49 a. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) + p(B) - p(A \cup B)}{p(B)}$
 $= \frac{0,8 + 0,3 - 0,86}{0,3} = 0,8.$

b. On constate que $p_B(A) = p(A)$; on en déduit l'indépendance des événements A et B.

50 On veut simultanément $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cap B) = p(A)p(B)$; d'où $p(A)p(B) = 0$, c'est-à-dire $p(A) = 0$ ou $p(B) = 0$.

51 a. A et B sont indépendants.

b. C et D ne sont pas indépendants.

c. E et F ne sont pas indépendants.

d. Réponse au choix.

52 Diverses stratégies sont possibles ; la plus simple semble être la suivante :

On a $p_A(B) = 0,5$; pour avoir $p(B) = 0,5$, il faut et il suffit que l'on ajoute 30 boules vertes numérotées 1.

53 1 $p(S) = 0,5$; $p(V) = 0,5$;

$$p(S \cap V) = \frac{9}{36} = 0,25 = 0,5 \times 0,5.$$

2 Oui, comme S et V le sont.

3 $p(V \cap R) = 0,25$ et $p(S) = 0,5$.

Comme « V et R » est inclus dans S, on a :

$$p(S \cap (V \cap R)) = 0,25 \text{ et } 0,25 \times 0,5 \neq 0,25.$$

Les événements S et « V et R » ne sont pas indépendants.

54 La démonstration demandée est rédigée page 332 du manuel.

Les produits mq et np sont tous deux égaux à $p(A)p(B)p(\bar{A})p(\bar{B})$.

55 1 a. A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de $A \cap \bar{B}$, d'où l'égalité demandée.

b. Si A et B sont indépendants, on a :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)p(B) + p(A \cap \bar{B}).$$

$$\text{Ainsi : } p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) \\ = p(A)p(\bar{B}).$$

c. On en déduit l'indépendance de A et $\bar{B}$.

2 Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi. Si $\bar{B}$ et A sont indépendants, alors $\bar{B}$ et $\bar{A}$ le sont aussi en vertu du même résultat.

Ainsi, si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

4 Expériences répétées indépendantes – Loi binomiale

56 1 Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.

57 1 a. $0,95^4 \approx 0,815$ à 10^{-3} près.

b. $1 - 0,95^4 \approx 0,185$.

2 $\binom{4}{3} \times 0,95 \times 0,05^3 \approx 4,7 \times 10^{-3}.$

58 1 Simulation à réaliser.

2 i	0	1	2	3
$P(R = i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$E(R) = 1.$$

59 1 $\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729} \approx 0,088.$

2 $1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729} \approx 0,912.$

3 $\binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243} \approx 0,329.$

4 $\bar{S}$: « au moins un feu n'est pas rouge ».

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{728}{729} \approx 0,998.$$

60 1 $\frac{1}{60}.$

2 $\frac{1}{30} = \frac{4!}{6!}.$

3 a. X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{30}$.

b. $P(X = 0) = \left(\frac{29}{30}\right)^{10}.$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{10} \approx 0,287.$$

61 1 Les hypothèses permettent d'affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0,014.

2 $P(X = 0) = 0,986^{20} \approx 0,754$; d'où : $P(X \geq 1) \approx 0,246$. L'affirmation est donc exacte.

3 Soit Y la variable aléatoire dénombrant le nombre de boîtes exemptes de tout stylo défectueux dans un carton. Si on admet que Y suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,75, alors : $P(Y = 50) = 0,75^{50} \approx 5,6 \times 10^{-7}$. L'affirmation est évidemment fautive : il est « quasi certain » qu'au moins une boîte contiendra un stylo défectueux.

62 1

n	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 2$	$\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times 3$
n	4	5	6
P	$\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times 4$	$\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times 5$	$\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 \times 6$

2 Il suffit de vérifier l'égalité des deux expressions obtenues pour 5 et 6, toutes deux égales à $\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

3 On obtient : $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times n.$

4 À partir de $n = 21$, il semble que la probabilité obtenue soit inférieure à 0,1.

63 1 On peut réaliser un arbre pondéré pour répondre aux questions, en utilisant la partition « B ; R » à chaque tirage.

$$\begin{aligned} \text{a. } P(X = -1) &= \frac{n}{9+n} \times \frac{10}{10+n} + \frac{10}{9+n} \times \frac{n}{9+n} \\ &= \frac{20n}{(10+n)(9+n)}. \end{aligned}$$

$$\text{b. } P(X = 4) = \frac{9}{9+n} \times \frac{10}{10+n} = \frac{90}{(10+n)(9+n)};$$

$$P(X = -6) = \frac{n(n-1)}{(9+n)(10+n)}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } E(X) &= (-1) \frac{20n}{(10+n)(9+n)} + 4 \frac{90}{(10+n)(9+n)} \\ &\quad + (-6) \frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}; \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(9+n)(10+n)}.$$

d. On résout l'inéquation $-6n^2 - 14n + 360 > 0$, avec la condition $n \geq 2$.

On obtient : $2 \leq n < \frac{20}{3}$; d'où : $2 \leq n \leq 6$.

2 Si Y désigne la variable aléatoire dénombrant les boules rouges tirées parmi les 20 tirages, alors Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{n}{10+n}$.

$$\text{On a : } P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}.$$

L'inégalité $P(Y \geq 1) > 0,999$ est vérifiée pour $n \geq 5$ ($n > (10^{23})^{\frac{1}{20}} - 10$).

➔ Prépa Bac

Exercices guidés

$$\begin{aligned} \text{64 1 a. } a &= \frac{5}{8}; & b &= \frac{3}{8}; & c &= \frac{4}{7}; \\ d &= \frac{3}{7}; & e &= \frac{5}{7}; & f &= \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Réponse c. : } \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

$$\text{2 } p(V) = \frac{1}{3}; p(G) = \frac{1}{4}; p_G(V) = \frac{1}{10}$$

$$p(V \cap G) = p_G(V) \times p(G) = \frac{1}{40}.$$

$$p_V(G) = \frac{3}{40}.$$

$$\begin{aligned} \text{65 1 a. } a &= \frac{1}{6}; & b &= \frac{5}{6}; & c &= \frac{1}{10}; \\ d &= \frac{9}{10}; & e &= \frac{7}{10}; & f &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

2 $A \cap R$: « tirer une boule de l'urne A et qu'elle soit rouge ».

$$p(A \cap R) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{20}.$$

$$\begin{aligned} \text{3 } p(R) &= p(A \cap R) + p(B \cap R) \\ &= \frac{3}{20} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{20} + \frac{5}{20} = 0,4. \end{aligned}$$

$$\text{4 a. } p_R(A) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{8}{20}} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

b. A et R ne sont pas indépendants : en effet, on a : $p(A) \neq p_R(A)$.

5 On veut : $p(R) = p(N) = 0,5$.

Or : $p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R)$;

$$\text{d'où : } p(B \cap R) = p(R) - p(A \cap R) = 0,5 - \frac{3}{20}.$$

On obtient :

$$p(B \cap R) = \frac{7}{20} = p_B(R) \times p(B) = p_B(R) \times \frac{5}{6}.$$

$$\text{Ainsi : } p_B(R) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{5} = \frac{42}{100}.$$

Avec 100 boules dans l'urne B, il en faut 42 rouges et 58 noires pour réaliser l'égalité $p(R) = p(N) = 0,5$.

$$\text{66 1 a. } a = 0,7; b = 0,3; c = 0,05; d = 0,95.$$

$$p(A_1) = 0,7p_0 + 0,05(1 - p_0) = 0,65p_0 + 0,05 = p_1.$$

$$\text{On obtient : } p_1 = 0,65 \times 0,6 + 0,05 = 0,44.$$

b. De même, on a : $p_{n+1} = 0,65p_n + 0,05$.

2 a. On complète par 0,3, puis par 0,7.

b. La suite semble converger vers un nombre voisin de 0,14.

3 a. La propriété est vraie au rang 0. En effet, on a :

$$p_0 = \frac{1}{7} + \frac{16}{35} = \frac{21}{35} = 0,6.$$

On suppose la propriété vraie au rang n ; alors :

$$p_{n+1} = 0,65\left(\frac{1}{7} + \frac{16}{35} \times 0,65^n\right) + 0,05$$

$$= \frac{16}{35} \times 0,65^{n+1} + 0,65 \times \frac{1}{7} + 0,05$$

$$= \frac{16}{35} \times 0,65^{n+1} + \frac{1}{7}.$$

On en déduit que la propriété est héréditaire, et on conclut qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,65^n = 0$; on en déduit que la suite converge

vers $\frac{1}{7} \approx 0,143$ (à 10^{-3} près).

4 L'expression obtenue ci-dessus permet de minorer la suite (p_n) par $\frac{1}{7}$, elle ne peut donc pas tendre vers 0.

Exercices d'entraînement

$$\begin{array}{lll} \text{67 1 b.} & \text{2 c.} & \text{3 c.} \\ & \text{4 c.} & \text{5 b.} & \text{6 a.} \end{array}$$

68 1 a. L'événement $\bar{A}$: « l'un des deux dés tirés est « spécial » ».

$$\text{b. } p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \text{ et } p(A) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{2 a. } p_A(B) = \frac{1}{36} \text{ et } p(B \cap A) = \frac{1}{108}.$$

$$\text{b. } p_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{12} \text{ et } p(B \cap \bar{A}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$p(B) = \frac{1}{108} + \frac{1}{18} = \frac{7}{108}.$$

$$\text{3 } p_B(A) = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{7}{108}} = \frac{1}{7}.$$

69 1 $B = D \cap G$; $S = D \cup G$.

$p(B) = 0,05^2 = 0,0025$;

$p(S) = p(D) + p(G) - p(B) = 0,0975$.

2 a. $p_S(D) = \frac{p(D)}{p(S)} = \frac{20}{39}$ ($\approx 0,513$ à 10^{-3} près).

b. $p_S(B) = \frac{0,05^2}{0,0975} = \frac{1}{39}$ ($\approx 0,026$ à 10^{-3} près).

3 a. $(1 - 0,0975)^n$ ($\approx 0,358$ à 10^{-3} près).

b. Il s'agit de l'événement contraire du précédent, dont la probabilité est donc environ égale à : 0,642.

70 1 **a.** $p(C) = 0,65$; $p_C(E) = 0,7$; $p_{\bar{C}}(E) = 0,2$.

b. Construction de l'arbre pondéré correspondant.

2 a. $p(C \cap E) = 0,7 \times 0,65 = 0,455$.

b. $p(\bar{C} \cap E) = 0,2 \times 0,35 = 0,07$.

c. $p(E) = 0,455 + 0,07 = 0,525$.

3 a. $p(F) = p(C \cap \bar{E}) = 0,3 \times 0,65 = 0,195$.

b. La probabilité recherchée vaut $1 - 0,95^5$, c'est-à-dire $0,304$ à 10^{-3} près.

71 1 **a.** $0,8^3 = 0,512$.

b. $1,25 \times 10^{-4}$.

2	0	1	2	3
	0,08	0,096	0,384	0,512

$E(X) = 2,4$.

72 1 **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$
 $= \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}v_n$.

La suite v est géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b. $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

et $u_n = v_n + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.

2 a. $a_1 = \frac{1}{2}$.

b. $r_1 = \frac{7}{12}$.

c. $r_n = a_n \times \frac{1}{2} + (1 - a_n) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

d. D'après la règle du jeu, on lance le dé A au lancer $(n+1)$ lorsque :

► on a utilisé le dé A au lancer n et obtenu le rouge : événement $A_n \cap R_n$;

► ou bien on a utilisé le dé B au lancer n et obtenu le blanc : événement $\bar{A}_n \cap \bar{R}_n$.

e. Ces deux événements étant disjoints la probabilité $p(A_{n+1})$ est égale à la somme de leurs probabilités. On obtient :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}.$$

Avec **1**, on obtient pour tout entier naturel n :

$$a_n = u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}.$$

f. $r_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$; d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{3}{5}$.

73 1 $p(R) = \frac{3}{n+7}$, $p(B) = \frac{4}{n+7}$

et $p(V) = \frac{n}{n+7}$.

2 a. X prend les valeurs 0, 10, 12, 20 ou 28.

b. $P(X=0) = p(B) = \frac{4}{n+7}$;

$P(X=28) = p(R) = \frac{3}{n+7}$.

$P(X=10) = p(V_1 \cap B_2)$
 $= p_{V_1}(B_2) \times p(V_1)$
 $= p(B) \times p(V),$

du fait de l'indépendance de tirages successifs. Donc :

$$P(X=10) = \frac{4n}{(n+7)^2}.$$

On obtient de même :

$$P(X=12) = p(V)^2 = \frac{n^2}{(n+7)^2}$$

et $P(X=20) = \frac{3n}{(n+7)^2}$.

c. $E(X) = 10 \times \frac{4n}{(n+7)^2} + 12 \times \frac{n^2}{(n+7)^2}$
 $+ 20 \times \frac{3n}{(n+7)^2} + 28 \times \frac{3(n+7)}{(n+7)^2}$
 $= \frac{12n^2 + 184n + 588}{(n+7)^2}$
 $= \frac{16n}{(n+7)^2} + 12.$

3 $f'(x) = \frac{(x+7)(7-x)}{(x+7)^4}$.

x	0	7	10
f'(x)		+	-
f(x)	0	$\frac{1}{28}$	

4 $E(X)$ est maximale lorsque f est maximale, c'est-à-dire pour $n=7$.

$$E(X)_{\max} = \frac{4}{7} + 12 = \frac{88}{7} \text{ €}.$$

➔ Problèmes

74 1 $\frac{p(A) - p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(A)}{p(B)} = \frac{p(A) - p(A \cap \bar{B})}{p(B)}$

et, comme :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}),$$

on a :

$$\frac{p(A) - p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(A)}{p(B)} = \frac{p(A) - (p(A) - p(A \cap B))}{p(B)}$$

$$= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p_B(A).$$

2 $p(A) = 0,2$; $p(B) = 0,3$; $p_{\bar{B}}(A) = 0,1$.

a. $p_B(A) = \frac{0,2 - 0,7 \times 0,1}{0,3} = \frac{13}{30}$.

b. Non, puisque $p_B(A) \neq p(A)$; ce que l'on pouvait aussi remarquer au départ, puisque : $p_{\bar{B}}(A) = \frac{1}{2} \cdot p(A) \neq p(A)$.

75 **1** $P(X = 0) = 0,97^n$;

2 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,97^n$.

$$1 - 0,97^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,97^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,97)}.$$

On trouve $n \geq 76$.

76 **1** $0,4 + 0,15 + 0,15 + 0,05 + 4y + y = 1$;
 $y = 0,05$; $x = 0,02$.

2 $0,75$;

3 $\frac{0,4}{0,75} = \frac{8}{15}$.

4 a. $p(A) = 0,25$; $p(B) = 0,2$;
 $p(A \cap B) = y = 0,05 = 0,25 \times 0,2 = p(A) \times p(B)$
donc A et B sont indépendants.

b. $p(A) = 0,25$; $p(C) = 0,7$;
 $p(A \cap C) = p(\{2\}) = 0,15 \neq p(A) \times p(C)$.
A et C ne sont pas indépendants.

77 **1** Les trois espérances de gain sont égales à 10. Le principe des jeux varie sur l'échelle « peu de gagnants gagnent très gros » jusqu'à « beaucoup de gagnants gagnent peu ».
2 On peut réaliser un arbre, où les probabilités de tirer un billet de chaque type « méga », « maxi » ou « magot » valent $\frac{1}{3}$.

On obtient comme espérance de gain :

$$10 = \frac{1}{3} \times 10^{-4} \times 10^5 + \frac{1}{3} \times 10^{-3} \times 10^4 + \frac{1}{3} \times 10^{-3} \times 10^3.$$

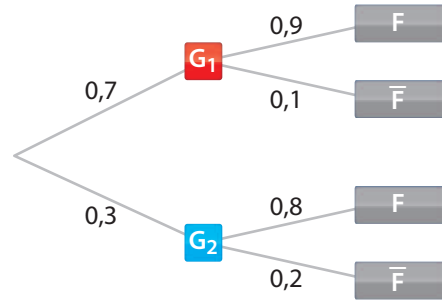
$$p(G) = \frac{1}{3} \times 10^{-4} + \frac{1}{3} \times 10^{-3} + \frac{1}{3} \times 10^{-2} \approx 0,0037.$$

78 **1** **ALGO**
 $G := -30$; $b := 0$; $n := 0$
TantQue $b \neq 6$ **Faire**
 $n := n + 1$
 $b := \text{nbaleatoire}(1,6)$;
FinTantQue
 $G := -30 + 10 \times 2n$
Afficher G

2 On appelle N le nombre de simulations effectuées.

ALGO
Entrer N
 $S := 0$
Pour i allant de 1 à N **Faire**
 $G := -30$; $b := 0$; $n := 0$
TantQue $b \neq 6$ **Faire**
 $n := n + 1$
 $b := \text{nbaleatoire}(1,6)$;
FinTantQue
 $G := -30 + 10 \times 2n$
Si $G < 0$
Alors $S := S + 1$ **FinSi**
FinPour
Afficher S/N

79 Soit l'événement F : « le bulbe fleurit ».



$$F = (F \cap G_1) \cup (F \cap G_2).$$

La réunion est disjointe, donc :

$$p(F) = p(F \cap G_1) + p(F \cap G_2).$$

$$p(F) = p_{G_1}(F) \times p(G_1) + p_{G_2}(F) \times p(G_2) \\ = 0,9 \times 0,7 + 0,8 \times 0,3 = 0,87.$$

80 **1** $p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A}) \\ = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(B).$

$$p_A(B) \times p(A) = p(A \cap B).$$

Par suite, on a :

$$\frac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p_B(A).$$

2 On pose A : « le dé est truqué » et B : « on obtient le 6 ».

$$p_A(B) = \frac{1}{2} ; p_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{6} ;$$

$$p(A) = \frac{1}{4} ; p(\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

$$\text{D'où : } p_B(A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}.$$

81 Questions **1** et **2** : simulations à réaliser sur tableur.

3 $p = \frac{1}{36} \times \int_0^6 (g(x) - f(x)) dx \\ = \frac{1}{36} \left[\frac{2}{3} x \sqrt{6} x - \frac{1}{18} x^3 \right]_0^6 = \frac{1}{3}.$

4 X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.

a. $P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$

b. $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,983.$

c. $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{4\,680}{6\,561} \approx 0,683.$

82 **1 a.** $p_A(B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} ;$

b. $p_B(C) = \frac{5}{6} ;$ **c.** $p_A(C) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$

2 Comme $p(B) = \frac{1}{6} = p_A(B)$, A et B sont indépendants.

3 Comme $p(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \neq p_B(C)$, B et C ne sont pas indépendants.

4 Comme $p(C) \neq p_A(C)$, A et C ne sont pas indépendants.

83 **1** $0,99 = p_M(T)$ et $0,99 = p_{\bar{M}}(\bar{T}).$

2 a. Suite à la construction d'un arbre pondéré, on obtient, avec la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = 0,01 + 0,98p.$$

$$\text{Alors : } f(p) = p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,99p}{0,01 + 0,98p}.$$

b. f est strictement croissante sur $[0; 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

c.	p	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5	0,8
	$p_T(M)$	0,09	0,5	0,917	0,977	0,99	0,997

Valeurs exactes pour 0,01 et 0,5 ; valeurs approchées à 0,001 près sinon.

3 Pour $p = 0,7$, on a : $0,995 \leq p_T(M) \leq 0,996$.

De plus, on a :

$$p_T(\bar{M}) = \frac{p(\bar{M} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{0,99(1-p)}{0,99 - 0,98p}.$$

Pour $p = 0,7$, on obtient :

$$0,976 \leq p_T(\bar{M}) \leq 0,977.$$

Le test est donc ici « Très fiable » dans les deux cas de figure possibles : en cas de résultat positif, la probabilité est grande d'être atteint par la maladie, et en cas de résultat négatif, la probabilité est grande de ne pas être atteint.

4 a. et b. Pour $p = 0,005$, on a :

$$0,332 \leq p_T(M) \leq 0,333 \quad \text{et} \quad 0,667 \leq p_T(\bar{M}) \leq 0,668.$$

c. Pour une population cible dans laquelle la maladie est « rare », le test positif n'est pas un bon indicateur : chez les personnes dont le test est positif, une sur trois seulement est effectivement malade. On remarquera toutefois que cette proportion de une sur trois est très largement supérieure à la proportion d'individus malades dans la population générale étudiée (qui est ici de 5 sur 1 000).

84 A : « tirer noir au second tirage ».

B_2 (resp. C_2) : « tirer dans B (resp. dans C) au second tirage ».

$$\begin{aligned} p(b_2) &= p(b_2 \cap B_2) + p(b_2 \cap C_2) \\ &= p_{B_2}(b_2) \times p(B_2) + p_{C_2}(b_2) \times p(C_2). \end{aligned}$$

Soit :

$$p(b_2) = 0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,8 = 0,34.$$

85 **1** $2^4 = 16$ trajets.

2 Le jeton arrive en A si, et seulement si, on a obtenu (P, P, P, P) : $\frac{1}{16}$.

Le jeton arrive en B si, et seulement si, on a obtenu (F, F, F, F) : $\frac{1}{16}$.

Le jeton arrive en I si, et seulement si, on a obtenu deux piles et deux faces : $\frac{3}{8}$.

3 $\frac{1}{2}$ est la probabilité cherchée.

4 Soit le résultat commence par pile et le jeton est passé par C.

Soit le résultat commence par face et le jeton n'est pas passé par C.

D'où la probabilité cherchée : $\frac{1}{2}$.

86 **1** $p(G_1) = 0,5 = p(P_1)$.

2 $G_2 = (G_2 \cap G_1) \cup (G_2 \cap P_1)$; la réunion étant disjointe, on obtient :

$$\begin{aligned} p(G_2) &= p(G_2 \cap G_1) + p(G_2 \cap P_1) \\ &= p_{G_1}(G_2) \times p(G_1) + p_{P_1}(G_2) \times p(P_1) \\ &= 0,6 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 = 0,45 \end{aligned}$$

Donc $p(P_2) = p(\bar{G}_2) = 0,55$.

3 On a, d'après l'énoncé : $p_{G_n}(G_{n+1}) = 0,6$ et donc :

$$p_{G_n}(P_{n+1}) = 0,4 \quad \text{et} \quad p_{P_n}(P_{n+1}) = 0,7.$$

Conclusion : $p_{P_n}(G_{n+1}) = 0,3$.

D'autre part :

$$G_{n+1} = (G_{n+1} \cap G_n) \cup (G_{n+1} \cap P_n)$$

$$\text{et } P_{n+1} = (P_{n+1} \cap G_n) \cup (P_{n+1} \cap P_n) ;$$

les réunions étant disjointes, on en déduit :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p(G_{n+1}) \\ &= p_{G_n}(G_{n+1}) \times p(G_n) + p_{P_n}(G_{n+1}) \times p(P_n) \\ &= 0,6x_n + 0,3y_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= p(P_{n+1}) = p_{G_n}(P_{n+1}) \times p(G_n) + p_{P_n}(P_{n+1}) \times p(P_n) \\ &= 0,4x_n + 0,7y_n. \end{aligned}$$

4 a. $v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$

$$= (0,6 + 0,4)x_n + (0,3 + 0,7)y_n = x_n + y_n$$

pour tout $n \geq 1$.

(v_n) est donc une suite constante égale à $v_1 = 1$.

Remarque

On a aussi, pour tout entier n , $P_n = \bar{G}_n$, donc :

$$x_n + y_n = p(\bar{V}) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } w_{n+1} &= 4x_{n+1} - 3y_{n+1} \\ &= 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n \\ &= 1,2x_n - 0,9y_n \\ &= 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n. \end{aligned}$$

w est géométrique, de raison 0,3, et son premier terme est :

$$w_1 = 4x_1 - 3y_1 = x_1 = 0,5.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc :

$$w_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1} = \frac{5}{3} \times 0,3n.$$

$$\text{c. } \begin{cases} 4x_n - 3y_n = \frac{5}{3} \times 0,3n \\ x_n + y_n = 1 \end{cases}$$

$$\text{implique } x_n = \frac{3}{7} + \frac{5}{21} \times 0,3n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3n = 0$, car $0,3 \in [0; 1[$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{7} \quad \text{et, par suite :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{4}{7}.$$

87 **1** $\alpha_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , on a : $\alpha_n + \beta_n = 1$ (la particule est en A ou en B à chaque instant).

2 a. $p_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que la particule soit en A à l'instant $n+1$ sachant qu'elle y était à l'instant n ; c'est donc la probabilité que la particule ne change pas de position entre les instants n et $n+1$.

Cette probabilité est, par hypothèse, une constante θ .

Par définition, on a également : $\theta = p_{B_n}(B_{n+1})$.

3 a. $p(B_n \cap A_{n+1}) = p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) = (1 - \theta)\beta_n$.

b. $\alpha_{n+1} = p(A_{n+1} \cap B_n) + p(A_{n+1} \cap A_n)$
 $= (1 - \theta)\beta_n + p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1})$
 $= (1 - \theta)(1 - \alpha_n) + \alpha_n \theta$.

Finalement, on a $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.

c. Démonstration par récurrence sans difficulté particulière.

On a $-1 < 2\theta - 1 < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\theta - 1)^n = 0$.

Ainsi, on en déduit que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Les positions de la particule « tendent vers l'équirépartition » entre A et B lorsque n tend vers l'infini.

88 Partie A

1 $x_1 = p(p, f) = \frac{1}{4}$; $y_1 = p(f, p) = \frac{1}{4}$;

$z_1 = 1 - x_1 - y_1 = \frac{1}{2}$.

2 a. $p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap N_n)$
 $= p_{N_n}(A_{n+1}) \times p(N_n) = \frac{1}{4} z_n$.

b. $p(B_{n+1}) = p(B_{n+1} \cap N_n)$
 $= p_{N_n}(B_{n+1}) \times p(N_n) = \frac{1}{4} z_n$.

c. $p(N_{n+1}) = p(N_{n+1} \cap N_n)$
 $= p_{N_n}(N_{n+1}) \times p(N_n) = \frac{1}{2} \times z_n$.

pour tout $n \leq 19$.

3 La suite (z_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$, et $z_1 = \frac{1}{2}$, donc :

$$z_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

pour tout $n \in [1; 20]$;

et $x_n = \frac{1}{4} \times z_{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$;

de même pour $y_n = x_n$.

Partie B

1 2^{20} . On a aussi :

$$\begin{aligned} P(X = 2^{20}) &= p(A_{20} \cup B_{20} \cup N_{20}) \\ &= x_{20} + y_{20} + z_{20} \\ &= \frac{1}{2^{21}} + \frac{1}{2^{21}} + \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{2^{19}}. \end{aligned}$$

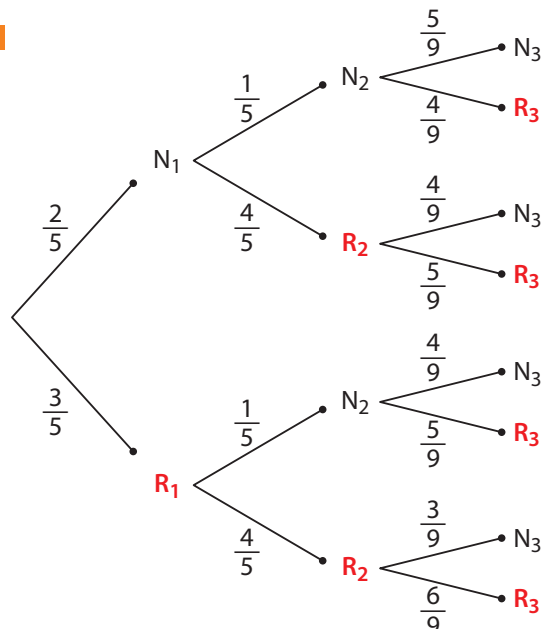
2 $P(X = 2^{20}) = p(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{19})$
 $= p(N_{19}) = z_{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$.

3 $(X = 2^k) = A_k \cup B_k$; les deux événements étant disjoints, on a :

$$P(X = 2^k) = x_k + y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

4 $E(X) = \sum_{k=1}^{k=19} 2^k P(X = 2^k) + 2^{20} P(X = 2^{20})$
 $= \sum_{k=1}^{k=19} 2^k \times \frac{1}{2^k} + 2^{20} \times \frac{1}{2^{19}} = 21$.

89 1



2 a. $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$

et $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$.

b. $p(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{42}{225} = \frac{14}{75}$.

c. $p(R_1 \cap N_3) = \frac{48}{225}$.

3 $p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3) = \frac{90}{225} = \frac{2}{5}$.

4 $p(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75}$; $p(N_1) \times p(N_3) = \frac{4}{25}$.

N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5 $p_{N_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)} = \frac{\frac{48}{225}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{15}$.

90 Partie A

1 La suite (b_n) est géométrique de raison α , avec $b_0 = 1$, donc :

$$b_n = b_0 \alpha^n = \alpha^n, \text{ pour tout entier } n.$$

2 $a_{n+1} - a_n = a_n + \frac{1-\alpha}{2} \times \alpha^n - a_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \alpha^n$
 $(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})$
 $= \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) [\alpha^0 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}]$,

donc $-a_0 + a_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \times \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$,

et comme $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1-\alpha^n}{2}$.

Partie B 1

	AA	Aa	aa
AA	1	$\frac{1}{4}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	$\frac{1}{4}$	1

2 a. $x_1 = \frac{1}{4}$; $y_1 = \frac{1}{2}$; $z_1 = \frac{1}{4}$.

b. $u_{n+1} = 1$; $v_{n+1} = \frac{1}{4}$; $w_{n+1} = \frac{1}{2}$.

$$x_{n+1} = p(AA_{n+1}) \\ = p_{AA_n}(AA_{n+1}) \times p(AA_n) + p_{Aa_n}(AA_{n+1}) \times p(Aa_n) \\ + p_{aa_n}(AA_{n+1}) \times p(aa_n).$$

$$c. x_n = u_{n+1}x_n + v_{n+1}y_n + 0 \times z_n = x_n + \frac{1}{4}y_n.$$

$$y_{n+1} = p(Aa_{n+1}) \\ = p_{AA_n}(Aa_{n+1}) \times p(AA_n) + p_{Aa_n}(Aa_{n+1}) \times p(Aa_n) \\ + p_{aa_n}(Aa_{n+1}) \times p(aa_n) \\ = 0 \times x_n + w_{n+1}y_n + 0 \times z_n = \frac{1}{2}y_n.$$

En posant $\alpha = \frac{1}{2}$, on a bien :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1-\alpha}{2}y_n \\ y_{n+1} = \alpha y_n \\ x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 1 \end{cases}, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

$$D'où x_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}, y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{et } z_n = 1 - x_n - y_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} = x_n.$$

$$d. C'est p_n = y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$p_n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,5}.$$

$n_0 = 7$: c'est à partir de la 7^e génération que la probabilité que la plante m ne soit pas homozygote est inférieure à 0,01.

$$91 \quad 1 \quad u_1 = 0,9.$$

$$2 \quad a. u_{n+1} = p(S_{n+1}) = 0,1 \times (1 - u_n) + 0,9u_n \\ = 0,8u_n + 0,1.$$

b. On trouve $u_{10} \approx 0,55$; au bout de 10 étapes, la probabilité d'obtenir l'information correcte est voisine de 0,5...

3 a. Comme précédemment, on a :

$$u_{n+1} = pu_n + (1-p)(1-u_n) = (2p-1)u_n + 1-p.$$

b. On a saisi dans B2 : « =D2 ».

c. On a saisi en B3 : « =(2*\$D\$2-1)*B2+1-\$D\$2 ».

d. On obtient $0,998 < p < 0,999$.

92 Notations utilisées :

I : « le marchand est indélicat » ; Q : « la marchandise achetée est de qualité ».

Avec l'énoncé : $p(I) = 0,8$; $p_1(\bar{Q}) = 0,5$; $p_{\bar{1}}(\bar{Q}) = 0,1$.

On cherche : $p_Q(\bar{I})$.

On a : $p_1(Q) = 0,5$; donc : $p(Q \cap I) = 0,5 \times 0,8 = 0,4$.

De même : $p(Q \cap \bar{I}) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$.

Alors : $p(Q) = 0,4 + 0,18 = 0,58$ et donc :

$$p_Q(\bar{I}) = \frac{0,18}{0,58} = \frac{9}{28} \approx 0,31.$$

93 La première solution est évidemment correcte : sur les trois coffrets, on en choisit un au hasard, et un seul contient une médaille de chaque métal.

Pour mettre en évidence la carence présentée par la seconde solution, il faut entrer dans plus de détails.

On appelle :

– O : l'événement « on ouvre un tiroir du coffret contenant deux pièces d'or » ;

– A : « on ouvre un tiroir du coffret contenant deux pièces d'argent » ;

– D : « on ouvre un tiroir du coffret contenant une pièce de chacun des deux métaux ».

On a : $\frac{1}{2} = p_{\bar{A}}(D) = p_{\bar{O}}(D)$: c'est cette valeur $\frac{1}{2}$ que l'énoncé substitue habilement à $p(D)$; la première égalité, par exemple, correspond à l'affirmation : « si je vois de l'or (et $\bar{A}$ est réalisé), il y a une chance sur deux que je choisisse ensuite le coffret à deux métaux ».

On peut par ailleurs retrouver $p(D)$ à partir de cette valeur :

$$p(D) = p(D \cap \bar{A}) + p(D \cap A) ; \text{ or :}$$

$$p(D \cap A) = 0 \text{ et } p(D \cap \bar{A}) = p_{\bar{A}}(D) \times p(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3},$$

$$\text{et on retrouve donc : } p(D) = \frac{1}{3}.$$

La mise en évidence de la nature conditionnelle des probabilités $\frac{1}{2}$ est difficile.

94 En faisant par exemple un arbre, on obtient :

$$p(L) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$$

Le nombre de matins où Sherlock prend sa loupe suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,6, dont la moyenne est égale à 6.

Sherlock prend donc en moyenne six fois sa loupe.

95 1 Cas $n = 2$

On crée un arbre à trois niveaux de branches (Ève peut gagner par deux victoires contre une, ce qui donne trois parties).

On obtient comme probabilité de victoire pour Ève :

$$0,6^2 + 2 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,648.$$

2 Cas $n = 10$

a. Algorithme à compléter :

ALGO

```
E := 0 ; S := 0 ;
TantQue E < 10 et S < 10 Faire
  a = Nombrealeatoire(0 ; 1) ;
  Si a < 0,6 Alors E := E + 1
  Sinon S := S + 1 ;
FinSi ;
FinTantQue ;
Si E = 10 Alors Afficher (« Ève a gagné ») ;
Sinon Afficher (« Sarah a gagné ») ;
FinSi
```

b. Rajouter un compteur pour opérer 1 000 répétitions et dénombrer les victoires d'Ève, que l'on rapporte à 1 000.

c. Simulation à réaliser.

96 La variable D mesure l'état de la dernière transmission ; $D = 1$ pour une transmission correcte, $D = 0$ pour une transmission erronée.

La suite de l'exercice est basée sur la réalisation de simulations.

→ Pistes pour l'accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

97 1 On construit un arbre à trois niveaux de branches, chaque branche « rouge » étant pondérée par 0,4, chaque branche « verte » par 0,6.

2 a. Probabilité de « deux rouges, puis une verte » : $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$.

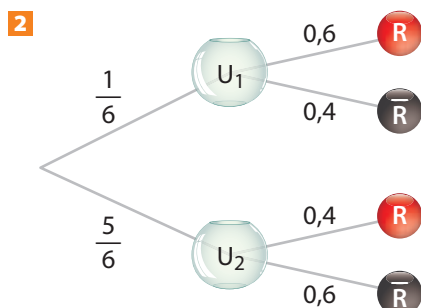
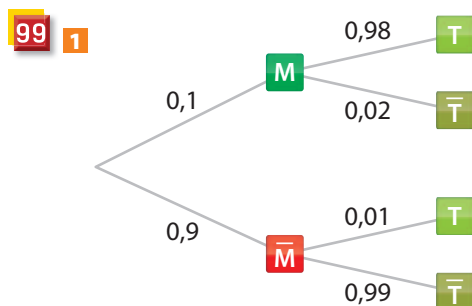
b. Probabilité de « trois boules rouges » : $0,4^3 = 0,064$.

98 1 Probabilité que ce soit un homme : $\frac{274}{627} \approx 0,437$.

2 Probabilité que ce soit une personne jouant de la guitare : $\frac{242}{627} = \frac{22}{57} \approx 0,386$.

3 Si c'est une femme, probabilité qu'elle joue du piano : $\frac{92}{353} \approx 0,261$.

Les savoir-faire du chapitre



100 1 $p_T(C) = 0,7$; $p_D(C) = 0,2$; $p_D(\bar{C}) = 0,1$.

2 a. $p(H \cap T) = 0,3 \times 0,1 = 0,03$.

b. $p(H) = 0,3 \times 0,1 + 0,1 \times 0,2 + 0,3 \times 0,7 = 0,26$.

3 $p_H(D) = \frac{0,1 \times 0,2}{0,26} \approx 0,077$.

101 1 $0,3 \times 0,2 \times 0,8 = 0,048$.

2 $0,3 + 0,2 - 0,3 \times 0,2 = 0,44$.

3 $0,3^{60}$ qui est de l'ordre de 4×10^{-32} ...

Approfondissement

102 1 $p(A \cap IP) = p_A(IP) \times p(A) = 0,3 \times 0,0098 = 0,00294$;

d'où : $p(A \cup IP) = 0,1 + 0,0098 - 0,00294 = 0,10686$.

2 $p_{IP}(A) = \frac{0,00294}{0,1} = 0,0294$.

103 1 $p(\bar{G} \cap C) + p(G \cap \bar{C}) = 0,4p + 0,5(1 - p) = 0,5 - 0,1p$.

2 $p(G) = 0,6p + 0,5(1 - p) = 0,1p + 0,5$

3 $p_G(C) = \frac{p(G \cap C)}{p(G)} = \frac{0,6p}{0,1p + 0,5}$.

f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et on a :

$$f(p) \geq 0,9 \Leftrightarrow p \geq \frac{45}{51}.$$

4 Il faut que p soit supérieur à 0,88 pour que la probabilité pour un candidat de présenter les qualités requises sachant qu'il a réussi le test dépasse 0,9. On peut conseiller au DRH de changer de méthode...

104 1 **a.** On construit un arbre pondéré, comme indiqué dans l'énoncé, sous l'hypothèse que le père est de génotype **AA**. On obtient une probabilité qu'un « enfant » soit **AA** sachant que le père est **AA** est égale à $r_0 + \frac{1}{2}s_0$.

b. De même, la probabilité qu'un enfant soit **Aa** sachant que le père est **Aa** est égale à $\frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{4}s_0$.

c. Sachant que le père est **aa**, la probabilité que l'enfant soit **AA** est nulle.

d. Avec la formule des probabilités totales appliqué au système complet d'événements recouvrant l'ensemble des génotypes possibles du père, on obtient :

$$r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}s_0\right)^2.$$

2 La symétrie des hypothèses en **AA** et **aa** permet de déterminer sans calcul l'expression demandée pour t_1 :

$$t_1 = \left(t_0 + \frac{1}{2}s_0\right)^2.$$

(Par rapport au résultat de r_1 , remplacer r par t sans modifier s .)

On sait que $r_1 + t_1 + s_1 = 1$, d'où $s_1 = 1 - r_1 - t_1$.

3 $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}s_0\right)^2 = \left[r_0 - t_0 + t_0 + \frac{1}{2}(1 - r_0 - t_0)\right]^2 = \left[d + t_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_0 - \frac{1}{2}t_0\right]^2 = \frac{(d+1)^2}{4}$.

On a de même : $t_1 = \frac{(1-d)^2}{4}$ et $s_1 = \frac{1-d^2}{4}$

(en utilisant $s_1 = 1 - r_1 - t_1$).

4 On obtient facilement le résultat suggéré en remarque : $r_1 - t_1 = d$. On en déduit donc, que t_2 , r_2 et s_2 sont respectivement égaux à t_1 , r_1 et s_1 et, ensuite par récurrence, que les suites t , r et s sont stationnaires à partir du rang 1.

Vers le Supérieur

105 1 **c.** 2 **e.** 3 **b.** ; **c.** et **d.**

4 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Vrai

106 1 Moyenne de la série 16,96, écart type 2,28.

2 a. Y suit une loi binomiale de paramètres 30 et 0,1.

b. $p(Y \leq 2) = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) = 0,9^{30} + 30 \times 0,9^{29} \times 0,1 + 435 \times 0,9^{28} \times 0,1^2$.

On obtient : $p(Y \leq 2) \approx 0,41$.

c. L'espérance de Y est égale à 3, elle représente le nombre moyen d'étude menées dans des maisons de catégorie 3 par jour.

Lois de probabilité continues



Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Notion de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{K \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur $[a; b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a; b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0; 1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a; b]$ est introduite à cette occasion par : $E(X) = \int_a^b t f(t) dt.$ On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. (AP) Méthode de Monte-Carlo.
Lois exponentielles.	• Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.	■ On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	■ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.	L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t f(t) dt$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes, par exemple sur la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure.
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Théorème de Moivre-Laplace (admis).	• Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et sa représentation graphique. ■ Démontrer que pour $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. • Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire définie par $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre-Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a; b])$ tend vers $\int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ est définie par $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt$ où f désigne la densité de cette loi. On peut établir qu'elle vaut 0. On admet que la variance, définie par $E(X - (E(X))^2)$ vaut 1.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ .	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]\}$ $\{X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. $\Rightarrow$ [SI et SPC] Mesures physiques sur un système réel en essai. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme. On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.
---	--	---

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

2. Intentions des auteurs

Les lois de probabilités discrètes ont été introduites en Première. On s'attache dans ce chapitre à introduire les outils permettant de calculer des probabilités liées à des lois à densités, essentiellement les lois uniformes, exponentielles et normales.

Si nous avons fait le choix d'une définition assez large pour une densité sur un intervalle en n'imposant pas la continuité (on en trouvera dans quelques exemples en exercices), le chapitre est essentiellement axé sur les lois continues et les calculs qui y sont attachés. L'utilisation de la calculatrice ou des logiciels permettant des visualisations graphiques est un aspect essentiel de la compréhension et de la mémorisation des résultats.

À ce titre, ce chapitre s'inscrit dans la continuité du chapitre d'intégration pour lequel il fournit bon nombre d'exemples d'applications.

Une première approche de la loi normale est proposée suivant deux axes : une familiarisation avec les calculs et les propriétés d'une loi nécessitant l'utilisation de valeurs approchées, mais aussi un lien avec la loi binomiale, via les théorèmes d'approximation, qui sera poursuivie au chapitre 12.

→ Partir d'un bon pied

Objectif : Les activités de cette page ont été conçues pour réactiver les connaissances concernant la loi binomiale (A), le calcul intégral lié aux aires (B). La partie C permet de préparer le terrain pour l'approche graphique de la loi de Moivre-Laplace proposée dans l'activité 3.

A 1 b. 2 a. 3 b. 4 b.
5 a. $V(Z) = 1$.

B Il est difficile de comparer les aires « à l'œil nu ». Par le calcul, on a :

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = 2 - 2e^{-1} \approx 1,26$$

$$\text{et } \int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{6} \approx 1,33.$$

L'aire verte est donc supérieure à l'aire jaune.

C 1 $f(3) = -1$ et

$$P(Y = f(3)) = P(X = 3) = 0,164\,063.$$

2 a. Le diagramme bleu a une aire totale de 1 et le diagramme transformé a une aire de $\frac{2}{3}$.

b. L'aire a été divisée par 1,5. La loi n'est pas représentée, car l'aire totale ne vaut pas 1.

3 La hauteur devrait être de $1,5 \times P(Y = f(k))$.

4 Il faut que chaque rectangle ait une hauteur de $s \times P(Y = f(k))$.

→ Découvrir

Activité 1 Choisir un nombre dans [0 ; 1]

Objectif

On propose un premier exemple très visuel de lois de probabilité définies par des densités. Les valeurs des probabilités seront lues le plus souvent graphiquement. Les calculs demandés à la fin pourront être faits avec la calculatrice.

1 a. Avec la cible 3.

$$b. p_2 = 0,2.$$

c. p_1 et p_3 correspondent à l'aire de la portion de plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = 0,2$.

2 a. Cible 1.

$$\begin{aligned}
 b. p_1 &= \int_{0,3}^{0,7} (6x - 6x^2) dx \\
 &= [3x^2 - 2x^3]_{0,3}^{0,7} \\
 &= \frac{71}{125} = 0,568,
 \end{aligned}$$

$$p_3 = \int_{0,3}^{0,7} f_3(x) dx$$

$$= \frac{179}{500} = 0,358.$$

On obtient confirmation : $p_3 < p_2 = 0,4 < p_1$.

Activité 2 La loi de durée de vie d'un atome radioactif

Objectif

Il s'agit en réactivant la loi binomiale d'arriver à la modélisation de la loi de désintégration radioactive au moyen d'une densité et d'en tirer les premiers exemples de calcul.

1 a. Le nombre moyen est l'espérance de la variable aléatoire qui compte le nombre d'atomes radioactifs à l'instant t . Elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N_0; p(t))$. Donc l'espérance est $E = N_0 \times p(t)$.

b. $N_0 \times p(t) = N(t) = N_0 e^{-2t}$,

donc pour tout réel $t \geq 0$, $p(t) = e^{-2t}$.

c. $1 - e^{-2t}$.

1 a. Avec la définition, par l'intégrale on obtient : $\frac{d}{dt}(P(X \leq t)) = f(t)$ et d'autre part avec le **1 c.** on trouve : $\frac{d}{dt}(P(X \leq t)) = 2e^{-2t}$, par suite : $f(t) = 2e^{-2t}$ pour tout réel $t \geq 0$.

b. $P(X \leq 1) = \int_0^1 2e^{-2t} dt = 1 - e^{-2} = \frac{e^2 - 1}{e^2}$

et $P(X > 1) = \frac{1}{e^2}$.

Activité 3 Une approche du théorème de Moivre-Laplace

Objectif

On propose suivant les préconisations du programme une approche graphique du théorème de Moivre-Laplace

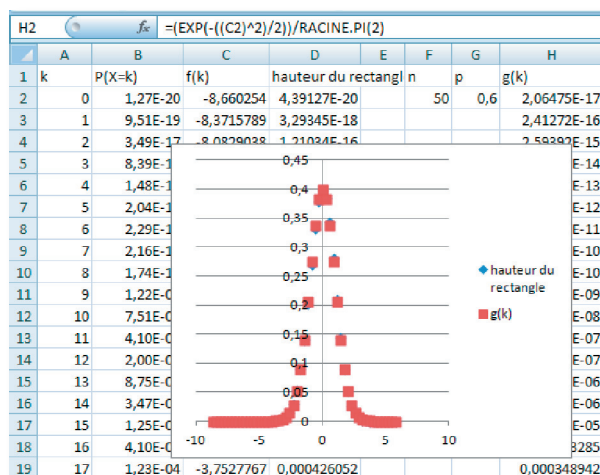
1, 2 et 3 On remarque que la première courbe varie très peu lorsqu'on modifie la valeur de p , et que les deux courbes sont quasiment confondues.

4 a. $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

b. $E(Y) = \frac{E(X) - np}{\sqrt{np(1 - p)}} = 0$

et $V(Y) = \frac{V(X)}{(\sqrt{np(1 - p)})^2} = 1$.

On utilise en effet que $E(aX + b) = a(E(X)) + b$ et que $V(aX + b) = a^2 V(X)$.



Activité 4 Une aire mystérieuse

Objectif : On amène les élèves à conjecturer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

1, 2 et 3 a.

3 b. On peut conjecturer que l'aire a une valeur finie.

c. En mettant au carré le résultat obtenu, on trouve $(2,506\ 63)^2 \approx 6,283\ 2$, qui est très proche de $2\pi (\approx 6,283\ 2)$. On peut conjecturer que la limite est $\sqrt{2\pi}$.

Exercices d'application

➤ Savoir faire Calculer une probabilité définie par une densité

1 a. Non, f n'est pas positive sur I .

b. Oui, f positive sur I et $\int_0^1 3t^2 dt = 1$.

c. Non, $\int_2^4 \frac{dt}{3} = \frac{2}{3} < 1$.

d. Oui, f est positive sur I et $\int_1^2 \frac{2}{x^2} dx = 1$.

2 a. $k = \frac{1}{8}$ et $P([2; 3]) = \frac{1}{8}$.

b. $k = \frac{1}{9}$ et $P([2; 3]) = \frac{19}{27}$.

c. $k = \frac{1}{6}$ et $P([2; 3]) = \frac{5}{12}$.

d. $k = \frac{1}{2}$ et $P([2; 3]) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

3 a. $P([1,2; 2,4]) = \frac{2,4 - 1,2}{5} = 0,24$

et $P([3; 4,4]) = \frac{4,4 - 3}{5} = 0,24$.

b. Deux intervalles de même longueur déterminent deux rectangles de même aire, puisque la hauteur est constante, d'où le résultat.

c. L'espérance est égale à $\frac{1+5}{2} = 3$ d'après le cours.

4 On doit trouver les réels t de $[0; 1]$ vérifiant :

$$\frac{P([0,3; t]) \cap P([0,4; 0,9])}{P([0,4; 0,9])} = P([0,3; t]),$$

ce qui équivaut à :

▷ si $t < 0,4$, $0 = P([0,3; t]) \Leftrightarrow t = 0,3$;

▷ si $0,4 \leq t < 0,9$, $t - 0,4 = (t - 0,3) \times 0,5 \Leftrightarrow t = 0,5$;

▷ si $t \geq 0,9$, $1 = t - 0,3 \Leftrightarrow t = 1,3 \dots$ absurde ;

▷ d'où $S = \{0,3; 0,5\}$.

➔ Savoir faire

Utiliser la loi exponentielle

5	$P(X \leq 0,5)$	$P(X > 10)$
a. $\lambda = 2$	$1 - \frac{1}{e}$	e^{-20}
b. $\lambda = \frac{1}{2}$	$1 - e^{-\frac{1}{4}}$	e^{-5}
c. $\lambda = 0,1$	$1 - e^{-0,05}$	$e^{-1} = \frac{1}{e}$

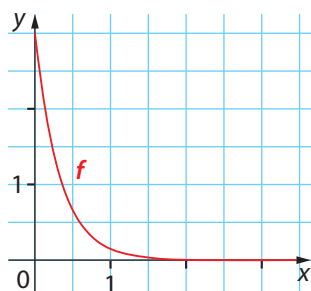
La fonction $\lambda \mapsto P(X \leq 0,5)$ est une fonction croissante de λ ;

La fonction $\lambda \mapsto P(X > 10) = e^{-10\lambda}$ décroît.

6 a. $P([0; 3]) = 1 - e^{-3\lambda}$; d'où $e^{-3\lambda} = \frac{1}{e}$ et $\lambda = \frac{1}{3}$.

2 $P\left(\left[\frac{9}{2}; +\infty\right)\right) = e^{-\frac{3}{2}}$.

7 a. Voir le schéma ci-dessous.



b. Le réel τ est solution de : $1 - e^{-3\tau} = e^{-3\tau}$.

D'où $\tau = \frac{\ln 2}{3}$. C'est la demi-vie.

8 a. On doit résoudre $e^{-2t} = 0,75$.

D'où $t = -\frac{\ln 0,75}{2} \approx 0,14$.

b. On doit résoudre $1 - e^{-2t} = 0,5$.

D'où $t = -\frac{\ln 0,5}{2} \approx 0,35$.

c. La loi exponentielle étant sans mémoire, on doit résoudre : $P(X > t) = 0,05$, soit encore $e^{-2t} = 0,05$.

D'où $t = -\frac{\ln 0,05}{2} \approx 1,5$.

9 $P(X > E(X)) = P\left(\left[\frac{1}{\lambda}; +\infty\right)\right)$
 $= e^{-\lambda \times \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

➔ Savoir faire

Calculer des probabilités à l'aide de la « courbe en cloche »

10 a. C'est le théorème de Moivre-Laplace.

b. $P(48 \leq X \leq 55)$.

$= P\left(\frac{48 - 50}{\sqrt{50 \times 0,6 \times 0,4}} \leq Y \leq \frac{55 - 50}{\sqrt{50 \times 0,6 \times 0,4}}\right) \approx 0,64$.

11 Les résultats sont donnés à 10^{-3} près.

a. 0,722.

b. 0,039.

c. 0,345.

➔ Savoir faire

Calculer des probabilités dans le cadre d'une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

12 a. $P(X \leq 15,6) \approx 0,664$

et $P(15,1 \leq X \leq 15,2) \approx 0,028$.

b. D'après le cours, l'intervalle $[15 - \sqrt{2}; 15 + \sqrt{2}]$ convient, soit $[13,5; 16,4]$.

13 a. 0,87.

b. 0,68.

c. 0,99.

➔ Travaux pratiques

14 Réglage d'une machine

1 Se faire une idée du résultat

1 a. D suit une loi normale $\mathcal{N}(360; 4)$.

b. Il s'agit de calculer $1 - P(355 \leq X \leq 365) \approx 0,211$.

2 En essayant différents réglages compris entre 350 et 370, on s'aperçoit que le meilleur réglage possible semble 360.

2 Valider la conjecture formulée

1 X suit une loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

2 a. On a : $g(\mu) = 1 - P(355 \leq D \leq 365)$.

Or $P(355 \leq D \leq 365) = P\left(\frac{355 - \mu}{2} \leq X \leq \frac{365 - \mu}{2}\right)$
 $= \int_{\frac{355 - \mu}{2}}^{\frac{365 - \mu}{2}} f(x) dx$.

D'où $g(\mu) = 1 - \int_{\frac{355 - \mu}{2}}^{\frac{365 - \mu}{2}} f(x) dx$.

b. $g(\mu) = 1 - F\left(\frac{365 - \mu}{2}\right) + F\left(\frac{355 - \mu}{2}\right)$.

3 $g'(\mu) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{365 - \mu}{2}\right) - f\left(\frac{355 - \mu}{2}\right) \right)$
 $= 0,5 e^{-\frac{(365 - \mu)^2}{8}} \left(1 - e^{-\frac{10 \times (365 + 355 - 2\mu)}{8}} \right)$.

La dérivée est donc du signe de : $1 - e^{-\frac{10 \times (365 + 355 - 2\mu)}{8}}$, qui s'annule en 360, est négatif avant et positif après. D'où le résultat attendu.

15 Théorème de Moivre-Laplace et approximation

1 On complète l'algorithme :

ALGO

Début

Entrer deux nombres a et b , $a < b$

Entrer un nombre entier naturel n

Entrer un réel p compris entre 0 et 1

$P := 0$;

Pour k de 0 à n faire

$Z := (k - n \cdot p) / \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Si $Z > a$ et $Z \leq b$ faire $P := P + \text{binom}(n, p, k)$

Sinon Faire $P := P$

FinSi

FinPour

$x = \text{norm}(b, 0, 1) - \text{norm}(a, 0, 1)$ // on complète l'algorithme pour qu'il affiche aussi $P(X \in [a; b])$ //

Afficher P ; Afficher x

Fin

2 On implémente l'algorithme sur une calculatrice ou un ordinateur.

ALGO

$a = \text{input}("a = ")$

$b = \text{input}("a < b = ")$

$p = \text{input}("p \text{ compris entre 0 et 1 : }")$

$n = \text{input}("n = ")$

$y = 0$;

$z = 0$;

$P = 0$;

$pr = \text{binomial}(p, n)$;

for $k = 0$: n

$z = (k - n \cdot p) / \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$;

if $z > a$ & $z \leq b$ then

$P = P + pr(k + 1)$;

else $P = P + 0$;

end

end

$x = \text{cdfnor}("PQ", b, 0, 1) - \text{cdfnor}("PQ", a, 0, 1)$;

// on complète l'algorithme pour avoir $P(a < X < b)$ dans le cas d'une loi normale //

$\text{disp}(x, \text{"la loi normale donne"}, P, \text{"la probabilité que } a \leq Z \leq b \text{ est"})$

3 a. Compléter le tableau suivant, X étant une variable qui suit la loi normale, $a = 3$, $b = 12$.

Le choix de $a = 3$ et $b = 12$, n'est pas suffisant, car les valeurs trouvées sont très faibles : il convient donc de présenter une autre série de résultats avec par exemple : $a = -1$ et $b = 3$.

n	15	50	50	50	50	50
p	0,4	0,4	0,02	0,98	0,6	0,8
$P(Z_n \in [3; 12])$	0,0019	0,0013	0,0177	0,0	0,0008	
$P(X \in [3; 12])$	0,0013					
$P(Z_n \in [-1; 3])$	0,781	0,842	0,618	0,736	0,843	0,813
$P(X \in [-1; 3])$	0,840					

b. Dans la pratique, on remplace Z_n par X dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

Les calculs précédents permettent de vérifier la pertinence de ces règles : voir les résultats en couleur.

16 Durée de vie sans vieillissement

1 a. $P_{(X \geq t)}(X \geq t + h) = P(X \geq h) = R(h)$.

b. Pour tous réels t et h positifs ou nuls, comme $(X \geq t + h) \cap (X \geq t) = (X \geq t + h)$ on a :

$$P_{(X \geq t)}(X \geq t + h) = \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \frac{R(t + h)}{R(t)}, \quad \text{d'où}$$

avec a. : $\frac{R(t + h)}{R(t)} = R(h)$ et $R(t + h) = R(t) \times R(h)$.

2 $R(0) = 1$. Comme $t \mapsto \int_0^t f(u) du$ est dérivable, puisque f est continue sur $[0; +\infty[$, la fonction R est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$, $R'(t) = -f(t)$.

3 a. R vérifie la relation fondamentale des fonctions exponentielles, donc il existe un réel α tel que pour tout $t \geq 0$, $R(t) = e^{\alpha t}$.

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(X > t) = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t} = 0$, par suite $\alpha < 0$.

4 Pour tout réel $t \geq 0$,

$$R(t) = e^{-\lambda t} \text{ et } R'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} = -f(t);$$

donc $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$.

Enfin pour tout réel $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt$ et donc X est une variable aléatoire définie par une densité qui lui confère les propriétés de la loi exponentielle.

Faire le point

- | | | | | |
|----|---------|------------|------------|------|
| 20 | 1 c. | 2 c. | 3 c. | 4 c. |
| 21 | 1 c. | 2 b. | 3 a. | 4 b. |
| 22 | 1 b. | 2 b. et c. | 3 a. et c. | |
| 23 | 1 Vrai. | 2 Vrai. | 3 Faux. | |
| 24 | 1 c. | 2 a. | 3 a. et b. | |
| 25 | 1 a. | 2 a. | 3 a. et c. | 4 b. |
| 26 | 1 Faux. | 2 Vrai. | 3 Vrai. | |
| 27 | 1 Vrai. | 2 Vrai. | | |

Exercices d'application

1 Loi à densité sur un intervalle

- 28 1 Faux. 2 Vrai. 3 Faux ($f \leq 0$). 4 Vrai.

29 1 Faux. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Vrai.

30 a. b. et c.

31 1 Vrai. 2 Faux. 3 Faux. 4 Vrai.

32 a. f densité $\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \int_1^5 \frac{k}{t^2} dt = 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}. \end{cases}$

b. $P([1; 2]) = \frac{5}{8} = 0,625$; $P_{[2; 5]}([3; 5]) = \frac{4}{9}$.

33 a.

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{k}{t^2} dt = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right)} = 1 ;$$

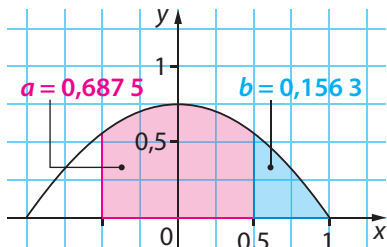
b. $P([1; 2]) = \frac{1}{2}$; $P_{[2; 5]}([3; 5]) = \frac{4}{9}$.

34 f est positive sur $[0; 4]$ et

$$\int_0^2 f(t) dt + \int_2^{\frac{5}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{5}{2}}^4 f(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

$P([1; 3]) = \frac{7}{12}$; $P_{[2; 4]}([2; 3]) = \frac{2}{3}$.

35 a. $\int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1 - t^2) dt = \frac{3}{4} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 1.$

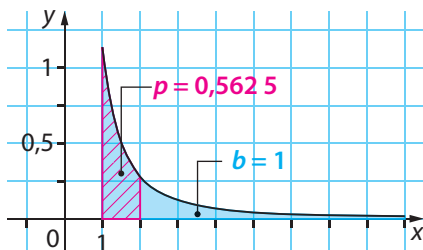


b. $P(X < 0) = 0,5$;

$P(-0,5 < X \leq 0,5) = \frac{11}{16} = 0,6875$;

$P(X \geq 0,5) = \frac{5}{32} = 0,15625.$

36 a. $\int_1^9 \frac{9}{8t^2} dt = \frac{9}{8} \left(-\frac{1}{9} + 1\right) = 1$ et f est positive sur $[1; 9]$.



b. $P(X < 2) = \frac{9}{16} = 0,5625.$

c. $a = \frac{9}{5} = 1,8.$

d. $E(X) = \frac{9}{8} \int_1^9 \frac{dt}{t} = \frac{9}{4} \ln 3.$

37 a. $\int_0^3 \frac{1}{3}(t - 2)^2 dt = \left[\frac{1}{9}(t - 2)^3 \right]_0^3 = 1$ et f est positive sur $[0; 3]$.

b. $P(X < 2) = \frac{8}{9}.$

c. $(a - 2)^3 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow a = 2 - \sqrt[3]{\frac{7}{2}}.$

d. $E(X) = \frac{3}{4}.$

2 Loi uniforme sur $[a; b]$

38 1 Faux. 2 Faux. 3 Vrai. 4 Faux. 5 Vrai.

39 1 b. 2 a. 3 b. et c. 4 c. 5 c.

40 1 c. 2 c. 3 a. 4 b.

41 1 $\int_a^m \frac{1}{b-a} dt = \int_m^b \frac{1}{b-a} dt$

$\Leftrightarrow m - a = b - m \Leftrightarrow m = \frac{b+a}{2}.$

2 $m = E(X).$

42 1 $f : t \mapsto 2$, avec $t \in [16; 16,5]$.

2 a. $\frac{1}{3}$;

b. $\frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}.$

c. 16 h 15.

43 Pour éclairer cet exercice et sa place dans la progression du cours on pourra se reporter au document d'accompagnement sur les statistiques, page 40, paragraphe VI. **COMPLÉMENTS SUR LES LOIS UNIFORME ET EXPONENTIELLE, A. LOI UNIFORME**

1 a. $E(Z) = \sum_{i=0}^{i=9} p_i z_i$
 $= 0,1 \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \dots + \frac{9}{10} \right) = 0,45.$

La droite en rouge a pour équation $y = x$. Chacun des 9 rectangles a pour aire $i \times 0,1 \times 0,1$, d'où l'égalité.

2 a. $P(x < X < x + dx)$ est l'aire du domaine « infinitésimal » de largeur dx et de hauteur $\frac{1}{b-a}$, c'est donc $\frac{1}{b-a} dx$.

b. C'est un rectangle de largeur dx et de hauteur $\frac{x}{b-a}.$

c. C'est l'intégrale qui calcule la somme de ces aires infinitésimales, par suite :

$\sum x_i P(X = x_i)$ devient $\int_a^b \frac{x}{b-a} dx$ et ainsi :

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

3 La loi exponentielle

44 1 Faux. 2 Faux. 3 Vrai.

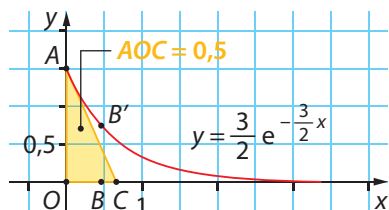
45 1 c. 2 a. 3 a. 4 c.

46 1 Faux (c'est $f(t) = 0,01e^{-0,01t}$). 2 Vrai.
3 Faux. 4 Vrai.

47 1 $P([0; 4]) = 1 - e^{-2} \Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 1 - e^{-2}$
 $\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

2 $e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

48 a. Voir la figure ci-dessous.



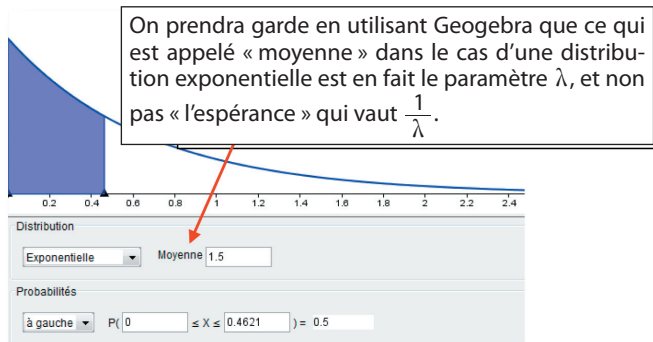
b. $e^{-\frac{3}{2}\tau} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau = \frac{2 \ln 2}{3}$.

c. $\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{3}$.

d. Les deux aires sont égales :

$\mathcal{A}(AOC) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt$

(voir la figure ci-dessous).



49 $P\left(X > \frac{2}{\lambda}\right) = e^{-\lambda \times \frac{2}{\lambda}} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135$.

50 $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, donc $\lambda = \frac{1}{3}$.

a. 0;

b. $1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,486$;

c. $\frac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,716$.

51 1 $e^{-1,5} \approx 0,223$.

2 $e^{-0,5} - e^{-2,5} \approx 0,524$.

3 C'est aussi $P(X \geq 15) = e^{-1,5}$.

52 1 $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$.

2 $P(X > 1) = e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$.

4 Théorème de Moivre-Laplace, loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

53 1 Faux. 2 Vrai. 3 Faux. 4 Faux.

54 1 c. 2 a. et b. 3 a.

55 1 Faux. 2 Faux. 3 Vrai. 4 Vrai.

56 a. 0,136; b. 0,023; c. 0,159; d. 0,857.

57 a. 0,9332; b. 0,841; c. 0,298; d. 0,138;
e. 0,235.

58 1 $P(-t \leq X \leq t) = P(X \leq t) - P(X \leq -t)$
 $= P(X \leq t) - (1 - P(X \geq -t))$.

Or, $P(X \geq -t) = P(X \leq t)$,

d'où $P(-t \leq X \leq t) = 2R(t) - 1$.

2 $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow 2R(\alpha) - 1 = 1 - \alpha \Leftrightarrow R(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

3 b. 2,3263; c. 3,2905.

4 a. On repère 0,975 qui correspond à 1,96.

b. 0,99 correspond à 2,33 et 0,9995 ne peut être lu sur la table.

59 1 et 2

X	Y1		X	Y1	
2.323	.97982		3.287	.99899	
2.324	.97987		3.288	.99899	
2.325	.97993		3.289	.99899	
2.326	.97998		3.29	.999	
2.327	.98003		3.291	.999	
2.328	.98009		3.292	.99901	
2.329	.98014		3.293	.99901	
X=2.329			X=3.287		

60 1 Algorithme :

ALGO

```

a=input(«choisir une valeur alpha dans ]0;1[, a=:»);
u=0;
p=0;
while p<1-a
    u=u+0.01;
    p=cdfnor("PQ",u,0,1)-cdfnor("PQ",-u,0,1);
end
disp(u,«la valeur du seuil ua est: »,p,«P(-ua<X<ua.
est:»)
```

choisir une valeur
alpha dans]0;1[:
a = 0,02
P(-ua < X < ua) est :
0,9801938
la valeur du seuil
ua est :
2,33

choisir une valeur
alpha dans]0;1[:
a = 0,001
P(-ua < X < ua) est :
0,9990332
la valeur du seuil
ua est :
3,3

2

ALGO

```

a=input(«choisir une valeur alpha dans ]0;1[ , a=:»);
h=input(«precision souhaitée pour le seuil u alpha:
h=:»);
u=0;
p=0;
while p<1-a
    u=u+h;
    p=cdfnor(«PQ»,u,0,1)-cdfnor(«PQ»,u,0,1);
end
disp(u,«la valeur du seuil ua est:»,p,«P(-ua<X<u.a.est:»)

```

choisir une valeur
alpha dans]0;1[:
 $a = 0,02$
précision souhaitée
pour le seuil u
alpha : $h = 0,001$
 $P(-ua < X < ua)$ est :
0,9800347
la valeur du seuil
ua est :
2,327

choisir une valeur
alpha dans]0;1[:
 $a = 0,001$
précision souhaitée
pour le seuil u
alpha : $h = 0,001$
 $P(-ua < X < ua)$ est :
0,9990017
la valeur du seuil
ua est :
3,291

5 Loi normale

61 1 Vrai. 2 Faux. 3 Faux.

62 1 b. 2 c.

63 a. 0,843; b. 0,921; c. 0,921.

64 1 $\mathcal{N}(0; 1)$.2 a. $P(X \leq 21) = P(Y \leq 1) \approx 0,841$.b. $P(X \geq 24) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 2) \approx 0,033$.c. $21 \leq X \leq 24 = P(1 \leq Y \leq 2)$
 $\approx P(Y \leq 2) - P(Y \leq 1) \approx 0,136$.d. $P(X \geq 15) = P(Y \leq -1) = P(Y \geq 1) \approx 0,159$.e. $P(15 \leq X \leq 21) = P(-1 \leq Y \leq 1) \approx 0,682$.65 1 Une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

2 Grâce à une table ou une calculatrice, on obtient les équations suivantes :

$$\frac{2000 - \mu}{\sigma} = -1,44 \text{ et } \frac{3000 - \mu}{\sigma} = -1,07.$$

3 On en déduit :

$$\mu = 5892 \text{ et } \sigma = 2703.$$

4 On en déduit :

$$P(D < 1000) \approx 0,04 \text{ et } P(D > 5000) \approx 0,63.$$

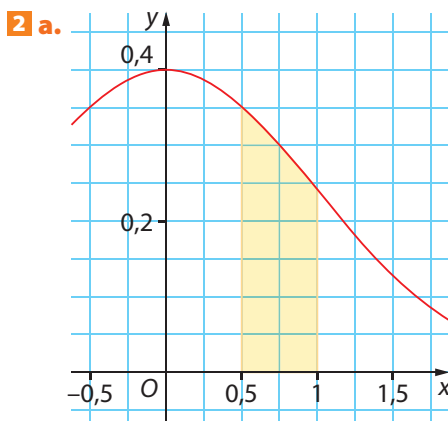
66 1 Une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

2 On obtient les équations suivantes :

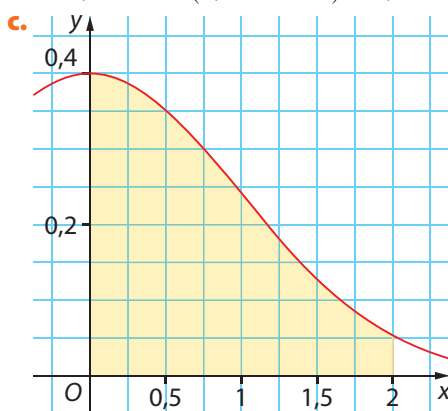
$$\frac{39 - \mu}{\sigma} = 1,52 \text{ et } \frac{25,5 - \mu}{\sigma} = -0,75.$$

3 On en déduit $\mu = 30$ et $\sigma = 6$.

$$67 \quad 1 \quad a. \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$



b. L'aire est comprise entre 11 et 13 carreaux, un carreau étant égal à 0,0125 unité d'aire.

D'où $0,1375 < P(0,5 < X < 1) < 0,1625$.

On obtient cette fois une aire comprise entre 36 et 40 carreaux.

D'où : $0,4375 < P(0 < X < 2) < 0,5$.On en déduit, en utilisant le fait que $P(X < 0) = 0,5$:

$$0,95 < P(X < 2) < 1.$$

68 1 $p = 0,2$ nécessairement, car la somme de toutes les probabilités est égale à 1.

2 Pour la première proposition, on a, par lecture graphique :

$$P(b < X < c) > 2 \times 0,2 = 0,4.$$

Pour la deuxième proposition, les intervalles $[a; b]$ et $[b; c]$ sont de même longueur, alors que la fonction f est strictement supérieure à $f(b)$ sur $[b; c]$ et strictement inférieure sur $[a; b]$. Les aires, et donc les probabilités ne peuvent être égales.69 La courbe verte correspond à $\mu = 0$ (c'est la seule centrée en 0), et donc à $\sigma = 1$.

$$\text{Or } f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

La courbe rouge correspond à :

$$\mu = 3 \text{ et } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}.$$

D'où $\sigma = 2$.

La courbe bleue correspond à :

$$\mu = -2 \text{ et } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où $\sigma = 0,5$.

70 1 $[189; 201]$ ($[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$).

2 a. On a $P\left(-1,28 < \frac{T - \mu}{\sigma} < 1,28\right) = 0,8$.

L'intervalle est donc :

$$[195 - 1,28\sigma; 195 + 1,28\sigma] = [187,3; 202,7].$$

b. Définir des critères trop restrictifs *a priori* est le meilleur moyen pour laisser échapper les talents d'exception.

71 1 On obtient les équations suivantes :

$$\frac{0,82 - \mu}{\sigma} = -0,84 \text{ et } \frac{0,98 - \mu}{\sigma} = -0,52.$$

On en déduit $\mu = 1,24$ et $\sigma = 0,5$.

2 Elle est de 1,24 g.

3 On utilise l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.

Soit $[0,24; 2,24]$.

4 0,16.

72 Si on appelle G la taille de la guérite et Y la taille d'une sentinelle, on veut : $P(Y < G) = 0,95$.
D'où $G \approx 180,9$.

73 C suit une loi binomiale $\mathcal{B}(600; 0,08)$.

a. La variable $\frac{C - 600 \times 0,08}{\sqrt{600 \times 0,08 \times (1 - 0,08)}}$ peut être approximée par une variable de loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

D'où le résultat, puisque $600 \times 0,08 = 48$ et $600 \times 0,08 \times 0,92 = 44,16$.

b. $P(40 \leq X \leq 50) \approx 0,50$.

3 La somme dépensée normalement en tickets serait de 720 euros.

Et la somme payée en amendes est une variable $Y = 20C$.

D'où $P(Y > 720) = P(C > 36) \approx 0,96$.

Donc Valéry a 96 % de chances d'être perdant.

74 1 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2\,000; 0,4)$.

2 X peut être approximé par une loi normale $\mathcal{N}(2\,000 \times 0,4; 2\,000 \times 0,4 \times 0,6) = \mathcal{N}(800; 480)$.

On cherche un réel t pour que $P(X > t) = 0,1$.

On trouve, grâce à la calculatrice : $t \approx 828,1$.

Il faut donc au moins 829 consoles en stock.

75 1 0,5.

2 On veut $P(X \leq 100) = 0,04$, où X suit une loi normale $\mathcal{N}(100; \sigma^2)$.

$$\text{D'où } P\left(\frac{X - \mu}{1,1} \leq \frac{100 - \mu}{1,1}\right) = 0,04.$$

Grâce à une table de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ ou à la calculatrice, on en déduit :

$$\frac{100 - \mu}{1,1} = -1,75.$$

D'où $\mu = 101,9$.

3 On doit cette fois avoir : $\frac{100 - \mu}{1,1} = -2,32$.

D'où $\mu = 102,6$.

76 1 On choisit l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$, soit $[20; 32]$.

2 Les trois intervalles : $[20; 24[$, $[24; 28[$, $[28; 32]$.

3 On fait le rapport entre la probabilité de chacun de ces intervalles et 0,95, soit :

– pour $[20; 24[$: 24 % ;

– pour $[24; 28[$: 52 % ;

– pour $[28; 32]$: 24 %.

➔ Prépa Bac

Exercices guidés

77 Partie A

1 $P(X \leq 1)$ est l'aire du domaine de plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2 λ est l'ordonnée du point A , puisque la valeur de la fonction densité en 0 est $\lambda e^0 = \lambda$.

3 a. Soit F la fonction $t \mapsto \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$, pour tout réel $t \geq 0$, on a $F'(t) = -e^{-\lambda t} + (-\lambda)\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$.

D'où $F'(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

$$\text{b. } E(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - F(0)$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} - (-1)}{\lambda}$$

$$= \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{X e^X - e^X}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

4 a. L'aire du triangle AOC est $\frac{1}{2} \times \lambda \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.

b. La phrase $P\left(X \leq \frac{1}{\lambda}\right) = 0,5$ est fausse puisque l'intégrale de 0 à $\frac{1}{\lambda}$ de la fonction densité dépasse manifestement l'aire du triangle AOC.

Partie B

1 a. $P(X \leq 1) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,777$.

b. $P(X \geq 2) = e^{-3} \approx 0,050$.

c. $P(1 \leq X \leq 2) = 1 - P(X \leq 1) - P(X \geq 2)$
 $\approx 1 - 0,827 = 0,173$ à 10^{-3} près.

3 Oui.

78 A. 1 b.

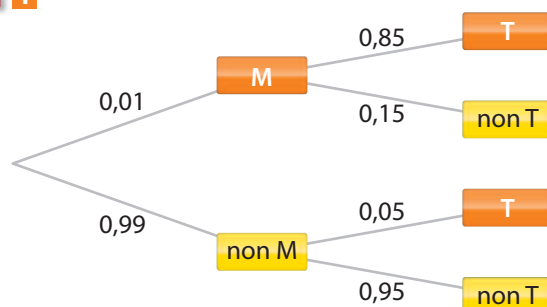
2 b. $\lambda = \ln 2$ ou $\lambda = \ln \frac{4}{\sqrt{13} - 1}$.

B. b. et c.

C. 1 c.

2 b.

79 1



2 a. $P(M \cap T) = 0,0085$.

b. $p = P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$
 $= 0,0085 + 0,0495 = 0,058$.

3 $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = 0,1466$.

4 a. Une loi binomiale $\mathcal{B}(5; p)$.

b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^5 \approx 0,26$.

5 a. D'après le théorème de Moivre-Laplace,
 $\frac{Y - 1200 \times p}{\sqrt{1200 \times p(1 - p)}}$ peut être approximé par une
variable de loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

Donc la loi de Y peut être approximée par une loi
normale $\mathcal{N}(69,6; 65,6)$.

b. $P(50 < Y < 70) \approx 0,51$.

Exercices d'entraînement

80 1 a. $F(d) - F(c) = P([c; d]) = k(d - c)$.

où k est le coefficient de proportionnalité indiqué dans
la caractérisation de P .

b. Prenons h tel que $(x_0 + h) \in [a; b]$.

$F(x_0 + h) - F(x_0) = k \times h$, donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = k = F'(x_0),$$

pour tout x_0 de $[a; b]$.

F est donc dérivable, de dérivée constante sur $[a; b]$ égale
à k , donc, pour tout réel x de $[a; b]$, $F'(x) = f(x) = k$.

2 a. $\int_a^b k \, dt = 1 \Leftrightarrow k(b - a) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{b - a}$.

b. $P([c; d])$ est l'aire du rectangle de base $[c; d]$ de
hauteur $\frac{1}{b - a}$.

3 a. $p = \frac{1}{5}$; **b.** $p' = \frac{0,61}{1} = 0,61$.

81 Partie A

1 $\mu = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$.

2 a. Si X prend la valeur t , alors Y prend la valeur $(t - \mu)^2$.

b. C'est l'aire d'un rectangle de largeur infinitésimale dt
et de hauteur 1, par suite l'espérance de Y qui généralise
la formule dans le cas discret $\sum y_i \times P(Y = y_i)$ est :

$$E(Y) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt.$$

3 $E(Y) = \left[\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12} = E[(X - \mu)^2] = V(X)$.

Partie B

1 La densité est la fonction $t \mapsto \frac{1}{b - a}$ définie sur
 $[a; b]$ et $\mu = E(X) = \frac{a + b}{2}$.

2 a. $V(X) = \frac{(b - \mu)^3 - (a - \mu)^3}{3(b - a)}$
 $= \frac{(b - \mu)^2 + (b - \mu)(a - \mu) + (a - \mu)^2}{3}$.

b. $V(X) = \frac{\left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b - a}{2}\right)\left(\frac{a - b}{2}\right) + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2}{3}$
 $= \frac{(b - a)^2}{4 \times 3} = \frac{(b - a)^2}{12}$.

3 a. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \frac{2\sigma}{b - a}$
 $= \frac{2(b - a)}{(b - a)\sqrt{12}}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$.

b. Cette valeur ne dépend donc pas de l'intervalle $[a; b]$
choisi.

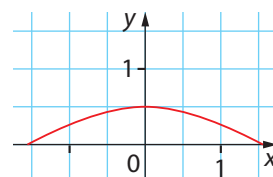
c. Si Z suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, on a :

$$P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 0,683.$$

Il y a une plus grande « dispersion des valeurs » pour la
loi uniforme que pour la loi normale.

82 a. On a :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k \cos t \, dt = 2k.$$



Il faut donc $k = \frac{1}{2}$.

b. $P\left(X > -\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{3}{4}$;

$P\left(-\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. On veut $\sin(a) - \sin(-a) = 1$. D'où $\sin(a) = \frac{1}{2}$.

Donc $a = \frac{\pi}{3}$.

d. Une primitive de $2t \cos t$ est : $F(t) = 2t \sin t + 2 \cos t$.

D'où $E(X) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \pi = 0$, ce qui est
normal puisque la fonction à intégrer est impaire.

83 1 f est positive, continue donc intégrable sur
 $[0; A]$, pour tout réel A positif et :

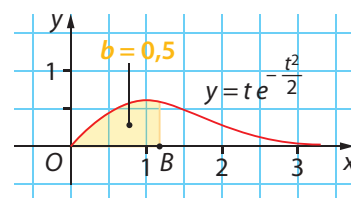
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} = 1.$$

2 $P(X \leq x) = \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$

et $P([0; 1]) = P(X \leq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,39$.

3 $P([0; a]) = P(a; +\infty[) \Leftrightarrow P(a; +\infty[) = 0,5$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2 \ln 2}.$$



84 1 $P(X = 16) = 0,128$ et $P(13 \leq X \leq 15) = 0,312$.

2 a. On peut approximer X par une variable Y qui suit une
loi normale $\mathcal{N}(40 \times 0,4; 40 \times 0,4 \times 0,6)$, d'où le résultat.

b. On obtient $P(Y = 16) = 0$ et $P(13 \leq Y \leq 15) = 0,207$.
On remarque des différences notables, qui sont dues au
fait que la loi normale est une loi continue, contrairement
à la loi binomiale.

3 On obtient :

$$P(15,5 \leq Y \leq 16,5) = 0,128$$

$$\text{et } P(12,5 \leq Y \leq 15,5) = 0,307.$$

Les résultats sont bien plus proches des résultats exacts.

85 1 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,05)$.

2 a. $P(X = 1) = 0,32$;

b. $P(X \geq 1) = 0,40$.

3 a. Z suit une loi $\mathcal{N}(200 \times 0,05 ; 200 \times 0,05 \times 0,95)$, soit une loi $\mathcal{N}(10 ; 9,5)$.

b. $P(Z \leq 9) = 0,37$ et $P(Z \geq 15) = 0,05$.

c. $P(9,5 \leq Z \leq 10,5) = 0,13$, qui est égal à la vraie valeur, à la précision de 0,01.

86 1 a. $P(50 \leq D \leq 100) = 0,248$.

b. $P(D \geq 300) = 0,026$.

2 $P_{D \geq 350}(D \geq 375) = P(D \geq 25) = 0,737$.

3 $E(D) = \frac{1}{\lambda} = 82$: c'est en moyenne la distance que l'autocar peut parcourir avant qu'un incident ne survienne.

4 a. La probabilité pour un autocar de ne pas avoir subi d'incident après avoir parcouru d kilomètres, événement que l'on qualifie de « succès » est $P(D \geq d) = e^{-\lambda d}$. Comme les autocars circulent de manière indépendante, mais avec les mêmes données relatives aux incidents, la variable aléatoire X_d qui compte le nombre de « succès » suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N_0 ; e^{-\lambda d})$.

b. Le nombre moyen de tels autocars est l'espérance de la variable aléatoire X_d et vaut $N_0 e^{-\lambda d}$.

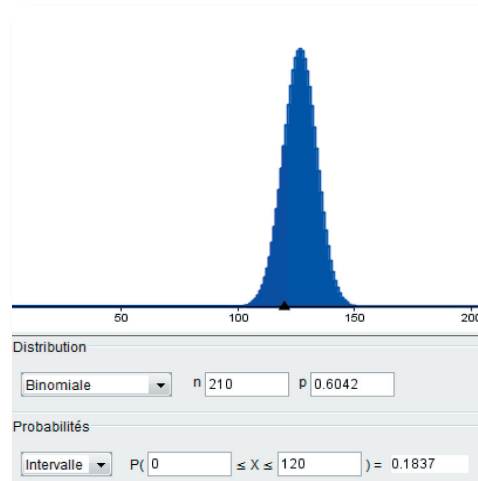
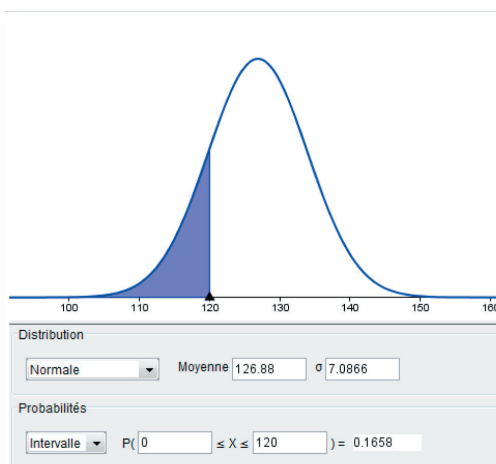
5 a. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(210 ; q)$, donc :

$$E(Y) = 210q = 210\left(1 - e^{-\frac{76}{82}}\right) \approx 126,88$$

$$\text{et } V(Y) = 210\left(1 - e^{-\frac{76}{82}}\right) \times e^{-\frac{76}{82}} \approx 50,22.$$

b. Comme $n = 210 > 30$, $nq > 5$ et $n(1 - q) > 5$, les conditions sont remplies pour effectuer l'approximation de Y par une loi normale de mêmes paramètres : $\mathcal{N}(126,88 ; 50,22)$.

c. On obtient avec l'approximation : $P(Y \leq 120) \approx 0,166$ et par le calcul direct de la loi binomiale : $P(Y \leq 120) \approx 0,184$.



87 1 a. La loi suivie par x est la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

b. $P(x \in [0,1 ; 0,2]) = 0,2 - 0,1 = 0,1$;

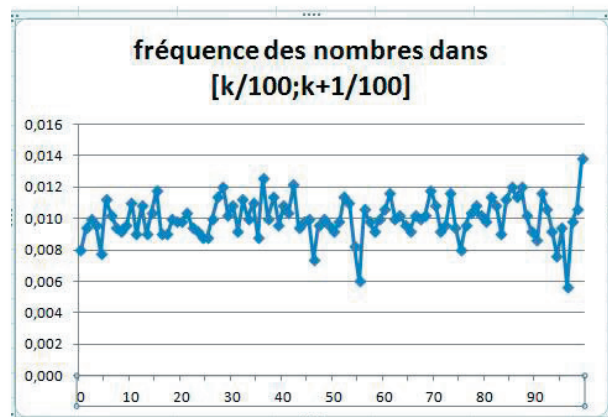
$$P(x \in [0,56 ; 0,57]) = 0,01.$$

2 On constate que les fréquences de chacun des 10 chiffres (des dixièmes) des nombres aléatoires tirés sont toutes voisines de 10 %, allant de 9 % à 11 %.

C1 fx =NB.SI(A\$1:A\$5000;B1)			
A	B	C	D
6	0	510	10%
3	1	523	10%
3	2	523	10%
1	3	514	10%
1	4	495	10%
0	5	471	9%
6	6	484	10%
7	7	490	10%
0	8	478	10%
4	9	512	10%
0			
8			
0		5000	
9			

3 On constate que les fréquences de chacun des nombres formés par les 2 premières décimales des nombres aléatoires tirés sont toutes voisines de 1 %, avec une fluctuation allant de 0,6 % à 1,4 %.

Le tirage aléatoire semble donc bien respecter une répartition uniforme des nombres dans les 10 intervalles $[0 ; 0,1[$, ... $[0,9 ; 1[$ et dans les 100 intervalles $[0 ; 0,01[$... $[0,99 ; 1[$.

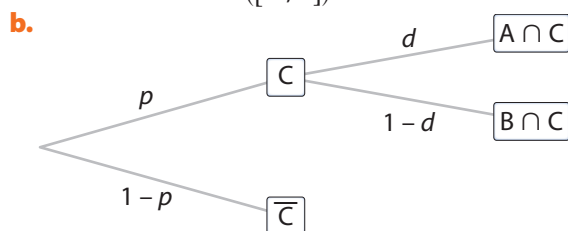


88 a. $P_C(A)$ est la probabilité que la crevasse (dont on connaît l'existence) se trouve entre le départ et le refuge. Du fait de la répartition uniforme, c'est donc :

$$P([0; d]) = d.$$

$P_C(B)$ est la probabilité que la crevasse se trouve entre le refuge et l'arrivée, soit :

$$P([d; 1]) = 1 - d.$$



$$P(A) = P(A \cap C) = P_C(A) \times P(C) = d \times p;$$

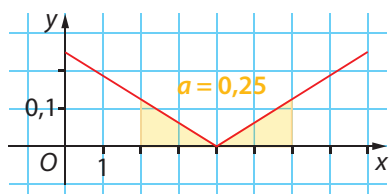
$$P(B) = P(B \cap C) = P_C(B) \times P(C) = (1 - d) \times p.$$

c. Il s'agit de :

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)}{1 - P(A)} = \frac{(1 - d)p}{1 - dp}.$$

Si $p = 1$, $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1 - d}{1 - d} = 1$, autrement dit, si la crevasse existe bien et si le skieur ne l'a pas rencontrée avant le refuge, il est sûr de la rencontrer après... s'il arrive au bout de la traversée !

89 1 $k = \frac{1}{\int_0^8 |x - 4| dx} = \frac{1}{16}.$



2 $P(|T - 4| \leq 2) = P(2 \leq T \leq 6)$
 $= \frac{1}{16} \int_2^6 |x - 4| dx = \frac{2}{16} \times 2 = \frac{1}{4}.$

$P_{|T-4|>2}(T > 6) = P_{|T-4|>2}(T < 2)$ est vrai : on voit que le rapport des aires est le même, puisque $P(T > 6) = P(T < 2)$ et il vaut 0,5.

On cherche $a \in]0; 4[$ tel que :

$$\frac{1}{16} \int_{4-a}^{4+a} |x - 4| dx = \frac{1}{8} \times 2a \Leftrightarrow \frac{1}{16} \times a^2 = \frac{1}{4} a$$

$\Leftrightarrow a(a - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 4$: un tel réel a n'existe donc pas.

On peut aussi raisonner géométriquement en voyant déjà qu'il faut avoir $a > 2$, et qu'il faut arriver à compenser le « creux » dont l'aire vaut $\frac{1}{4}$ et que ceci n'est obtenu que pour $a = 4$.

➔ Problèmes

90 1 a. $D = A - C$ mesurant la différence entre les deux heures d'arrivées choisies par Alice et le Chapelier, l'algorithme rend compte exactement de l'énoncé et permet de savoir si le rendez-vous a lieu ou pas.

b. ALGO

```
n=input(«nombre de simulations n =»)
s=0;
for i=1:n
    a=rand();
    b=rand();
    if (b-a)<=0.25 & (b-a)>=-0.25 then
        s=s+1
        x(i)=a;
        y(i)=b;
    end
end
disp(s/n,«la frequence des RDV reussis est»)
clf; plot(x,y,«*r»)
```

Résultats :

▶ avec $N = 500$ on observe des fréquences variables : 0,458, 0,402, 0,414 ;

▶ avec $N = 1000$ c'est encore assez fluctuant ;

▶ avec $N = 5000$, on observe un resserrement de l'intervalle : 0,438, 0,437, 0,442.

2 a. Un rendez-vous réussi correspond à un couple de réels $(x; y)$ tels que $x \in [17; 18]$, $y \in [17; 18]$ et $|x - y| \leq \frac{1}{4}$, ce qui conduit au système donné, puisque :

$$|x - y| \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4}.$$

b. On trace les droites d'équation :

$$y = x - \frac{1}{4} \text{ et } y = x + \frac{1}{4}.$$

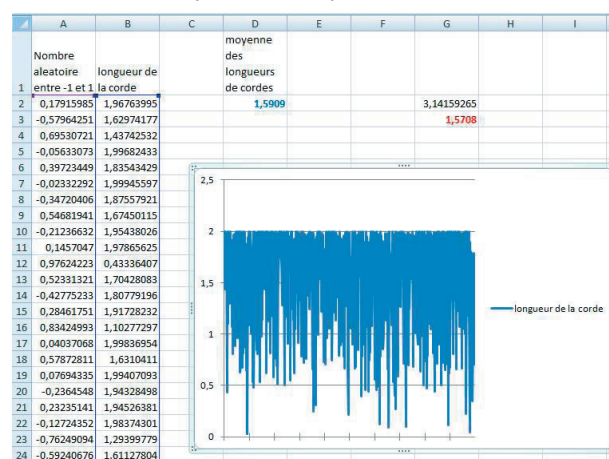
À x constant, y doit se trouver entre les deux points d'abscisse x sur chaque droite. En définitive, les couples solutions correspondent aux coordonnées des points situés dans la bande de plan comprise entre ces deux droites, à l'intérieur du carré $[17; 18] \times [17; 18]$.

c. L'aire est égale $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0,4375$. La probabilité qu'un rendez-vous soit réussi est 0,4375.

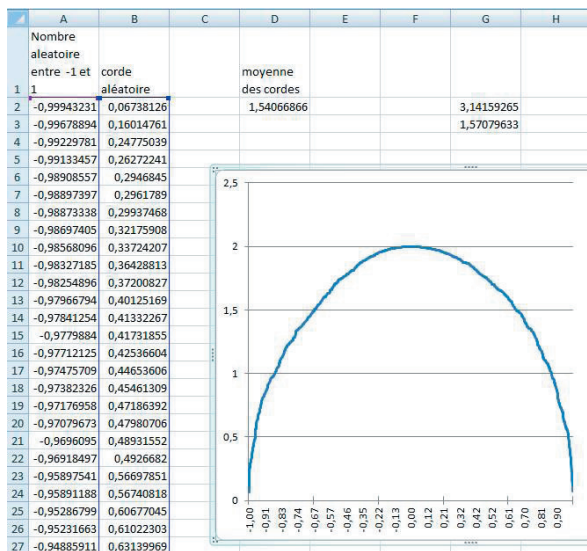
91 A. Première méthode

1 $L = 2MH = 2\sqrt{OM^2 - OH^2} = 2\sqrt{1 - X^2}.$

2 Voir le tableau (méthode A)



Le graphique a un intérêt si on trie par ordre croissant les colonnes A et B, les points prenant à peu près la disposition de la courbe d'équation $y = 2\sqrt{1 - x^2}$.



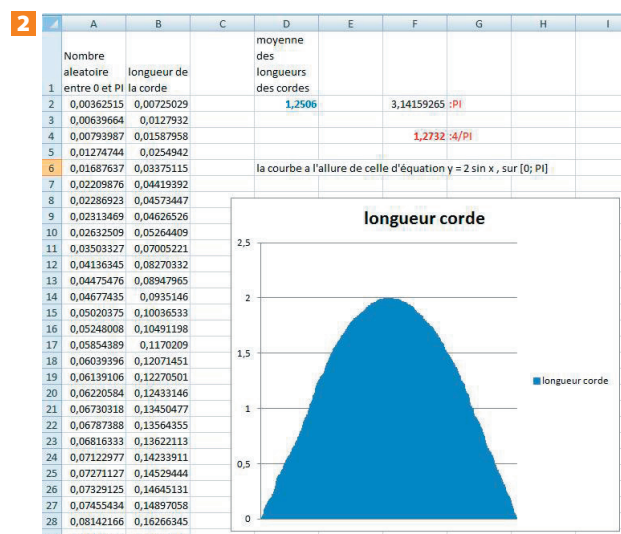
3 Comme le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geq 0$, on en déduit qu'une équation équivalente est $y = \sqrt{1 - x^2}$. Par suite, l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ s'écrit aussi $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ et comme on sait que cette aire est la moitié de celle du disque, soit $\frac{\pi}{2}$; on obtient : $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ et la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1; 1]$ est $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 2\sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. On obtient alors l'espérance de L qui généralise la formule $\sum L_i \times P(L = L_i)$:

$\int_{-1}^1 2\sqrt{1 - x^2} \times \frac{1}{2} dx =$ valeur moyenne de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1; 1]$, soit $\frac{\pi}{2}$.

On constate que la moyenne de L_i donnée par le tableur en est proche.

B. Deuxième méthode

1 Par définition $MH = \sin T$, donc $L' = 2MH = 2 \sin T$.

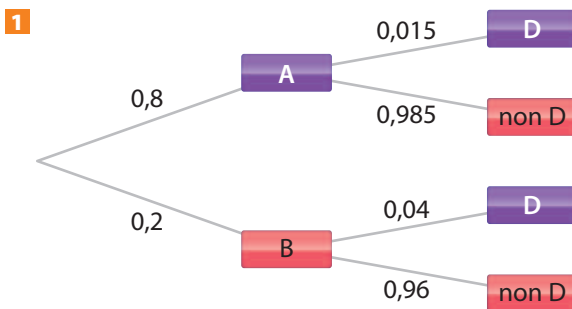


3 $\int_0^\pi 2 \sin t dt = 2[-\cos t]_0^\pi = 4$. La valeur moyenne de la fonction $t \mapsto 2 \sin t$ sur $[0; \pi]$ est donc $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin t dt = \frac{4}{\pi}$.

L'espérance de L' est donc $\frac{4}{\pi} \approx 1,27$.

Épilogue : on aura $E(\Lambda) = 1$.

92 Partie A



2 $P(D) = 0,8 \times 0,015 + 0,2 \times 0,04 = 0,02$.

3 $P_D(A) = \frac{0,8 \times 0,015}{0,02} = 0,6$.

Partie B

1 Les tirages sont identiques et indépendants. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(150; 0,02)$.

2 $E(X) = 150 \times 0,02 = 3$

et $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{150 \times 0,02 \times 0,98} \approx 1,715$.

3 $P(X = 4) \approx 0,170$.

Partie C

1 La variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30; 30 \times 0,98) = \mathcal{B}(30; 29,4)$.

On peut donc appliquer le théorème de Moivre-Laplace et l'approximer par une variable Z suivant une loi normale $\mathcal{N}(30; 5,42^2)$.

2 $P(Z \leq 20,5) \approx 0,040$.

3 $P(24,5 \leq Z \leq 35,5) \approx 0,690$.

On obtient une approximation de la probabilité que le nombre de composants défectueux se situe au sens large entre 25 et 35.

93 1 Cela revient à calculer $P(X > 12) = 0,023$.

2 Si on détruit trois billettes : $P(X > 18) = 0$: trois billettes suffisent.

94 1 a. $\frac{a}{k} \left(\frac{1}{x_{\min}^k} - \frac{1}{y^k} \right)$.

b. La limite de la quantité trouvée au a. en $+\infty$ est $\frac{a}{k} \times \frac{1}{x_{\min}^k}$. Il faut donc que $a = k x_{\min}^k$.

On a alors $f(x) = \frac{k x_{\min}^k}{x^{k+1}}$.

2 a. $P(X \leq 60) = 100 \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{3600} \right) = 0,972$.

b. $E(X) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{10}^y \frac{200}{x^3} \times x dx$
 $= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{200}{10} - \frac{200}{y} = 20$.

3 a. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{x_{\min}^k}{x^k} \right)$.

b. $P(X > m) = 0,5 \Leftrightarrow m = x_{\min} \sqrt[2]{2}$.

4 a. $P(X > x_0) = 0,2 \Leftrightarrow x_0 = x_{\min} \sqrt[3]{1,25}$.

b. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^y \frac{k x_{\min}^k}{x^{k+1}} \times x dx = \frac{k}{k-1} \times \frac{x_{\min}^k}{(x_0)^{k-1}}$
 $= x_{\min} \frac{2}{\sqrt[3]{1,25}}$.

c. On applique ce résultat pour les hypothèses du 2 :
On a $E(X) = 20$ et la richesse possédée par les 20 % les plus riches correspond à $x_{\min} \frac{2}{\sqrt{1,25}} = \frac{20}{\sqrt{1,25}}$, soit une fraction de la richesse totale de $\frac{1}{\sqrt{1,25}} \approx 89\%$.

95 1 Wechsler : [85 ; 115] ; Stanford : [84 ; 116] ; Catell : [76 ; 124].

2 Wechsler : 125 ; Stanford : 126 ; Catell : 139.

96 1 a. On utilise l'intervalle :
 $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma] = [0,9 ; 1,1]$.

D'où $\sigma = 0,05$.

b. $P(X < 0,9) = 0,023$. La probabilité que tous les pains pèsent moins de 0,9 g, si on considère qu'une période de 6 mois compte 182 jours, est de $0,023^{182} = 6 \times 10^{-299}$.

2 $P(X > 1) = 0,5$. La probabilité que tous les pains pèsent moins de 0,9 g, si on considère qu'une période de 6 mois compte 182 jours, est de $0,5^{182} = 1,2 \times 10^{-55}$.

3 On obtient cette fois $\sigma = 0,1$.

$P(X < 0,9) = 0,16$. La probabilité que tous les pains pèsent moins de 0,9 g, si on considère qu'une période de 6 mois compte 182 jours, est de $0,16^{182} = 1,4 \times 10^{-145}$.
Le deuxième calcul reste inchangé. Le boulanger peut toujours être fortement soupçonné de tricherie !

97 Partie A

1 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0,02)$. $P(X = 2) = 0,2$.

2 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,98^{50} = 0,64$.

3 $E(X) = 50 \times 0,02 = 1$.

Partie B

1 a. $e^{-1000\lambda_1} = 0,61$.

b. $e^{-1000\lambda_2} = 0,90$.

2 Si on appelle D l'événement : le composant est défectueux, on a :

$$P(T \geq t) = 0,02 P_D(T \geq t) + 0,98 P_{\bar{D}}(T \geq t).$$

D'où le résultat.

$$3 P_{T \geq 1000}(D) = \frac{0,02 \times 0,61}{0,02 \times 0,61 + 0,98 \times 0,90} = 0,01.$$

98 Partie A

1 La probabilité que le joueur gagne 30 € est :

$$p = P(X \leq 25) = \int_0^{25} 0,01 e^{-0,01t} dt \approx 0,221.$$

2 La variable aléatoire Y qui compte le nombre de fois où le joueur gagne sur les 3 parties suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0,221)$.

La probabilité que le joueur gagne au moins une fois est :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - p)^3 \approx 0,527.$$

3 On peut envisager d'utiliser le calcul des probabilités conditionnelles, autrement dit :

$$p_2 = P_{(X > 25)}(X \leq 50) = P_{(X > 25)}(X \leq 25 + 25) = P(X \leq 25) = p \approx 0,221.$$

Ou bien, on peut se dire qu'au début de la deuxième partie l'urne contient 10 blanches et 965 rouges ; la probabilité de tirer une blanche est donc d'environ

$\frac{10}{975}$ et alors le nombre X' de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche suit la loi exponentielle :

$$P(X' \leq k) = \int_0^k \frac{10}{975} e^{-\frac{10}{975}t} dt ;$$

$$\text{d'où } p'_2 = \int_0^{25} \frac{10}{975} e^{-\frac{10}{975}t} dt \approx 0,226.$$

Partie B

1 On applique le principe multiplicatif, puisque l'on peut considérer ces 25 tirages comme indépendants (la probabilité de tirer une boule blanche étant supposée constante pour ces 25 tirages). A_n étant l'événement : « les $(n - 1)$ premiers tirages ont amené une rouge (chacun de probabilité $1 - p$) et le n -ième apporte une blanche (de probabilité p) », on obtient :

$$P(A_n) = p(1 - p)^{n-1}.$$

2 La probabilité de gagner une partie est la somme :

$$\sum_{i=1}^{25} P(A_i).$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{25} p(1-p)^{i-1} &= p[(1-p)^0 + (1-p)^1 + \dots + (1-p)^{24}] \\ &= p \times \frac{1 - (1-p)^{25}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{25}. \end{aligned}$$

3 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$; par suite, pour p proche de 0, on a

$$\frac{e^{-p} - 1}{-p} \approx 1 ; \text{ soit } e^{-p} - 1 \approx -p \text{ et } e^{-p} \approx 1 - p.$$

4 On a $p = 0,01$, donc $e^{-25p} \approx 0,7788$ et $(1 - p)^{25} = 0,7778$ à 0,0001 près par défaut.

L'erreur commise au A, par rapport au calcul du B, est donc de l'ordre de 0,001.

5 On tient compte du changement du contenu de l'urne après chaque tirage pour la probabilité de $P(A_n)$ grâce à la formule apparente dans l'énoncé pour la case B₄. (voir le tableur)

On fait la somme des nombres de la colonne B et on obtient le résultat annoncé :

25	24	0,00810192	977	967	
26	25	0,00802721	976	966	
27					
28	probabilité				
28	de gagner:	0,22457141			0,77880078
29		0,0034	c'est l'erreur commise par rapport au calcul en A1:		0,22119922
30					

99 1 F_λ est la primitive d'une fonction continue, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée : $e^{-\lambda x^2}$.

On a donc, pour tout réel :

$$F'_1(\sqrt{\lambda} x) = e^{-1 \times \lambda x^2} = F'_\lambda(x).$$

2 La fonction $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ est paire, donc F_λ est impaire.

3 F_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4 a. Pour $t \geq \frac{1}{\lambda}$, on a $\lambda t^2 \geq t$, d'où $-\lambda t^2 \leq -t$, d'où le résultat par croissance de l'exponentielle.

b. $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^x e^{-\lambda t^2} dt$. Or, pour $t \geq \frac{1}{\lambda}$, on a $e^{-\lambda t^2} \leq e^{-t}$. D'où le résultat par croissance de l'intégrale.

$$c. F_{\lambda}(x) - F_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \int_{\frac{1}{\lambda}}^x e^{-t} dt = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

D'où le résultat.

$$a. F_{\lambda}(n+1) - F_{\lambda}(n) = \int_n^{n+1} e^{-\lambda t^2} dt > 0$$

et $F_{\lambda}(n) \leq F_{\lambda}\left(\frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{1}{n}} \leq F_{\lambda}(1) + 1$ par croissance de F_{λ} et de l'exponentielle.

b. Une suite croissante majorée converge, d'où le résultat.

6 a. En utilisant la densité de la loi normale, on obtient $L_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

b. On a, d'après le 2 :

$$F_{\lambda}(x) - F_{\lambda}(0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(F_1(x) - F_1(0)).$$

$$\text{D'où } F_{\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}F_1(x). \text{ D'où } L_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}L_1.$$

$$\text{En particulier } L_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}L_1. \text{ D'où } L_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{D'où } L_{\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

100 1 a. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(410; 0,92)$.

b. Par le théorème de Moivre-Laplace :

$$\frac{X - 410 \times 0,92}{\sqrt{410 \times 0,92 \times 0,08}} \text{ peut être approché par une}$$

variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Donc X peut être approché par une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(377,2; 30,176)$.

c. $P(X > 400) = 1,6 \times 10^{-5}$. Il n'y a donc quasiment aucune chance pour qu'il y ait un passager sans place dans l'avion.

2 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,92)$, qui peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(0,92n; 0,0736n)$.

En utilisant le seuil établi dans le cours, on veut que la borne supérieure de l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$, soit égale à 400. D'où : $0,92n + \sqrt{0,0736n} = 400$.

$$\text{D'où : } \sqrt{0,0736n} = 400 - 0,92n.$$

b. En élevant au carré, on obtient une équation du second degré, que l'on résout. On arrondit par défaut et on trouve 428 places.

101 Partie A

1 φ est la composée d'une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, avec l'exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est elle-même somme et produit de telles fonctions, elle est donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a : $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$

$$\text{et } \varphi''(x) = -\varphi(x) + x^2\varphi(x) = (x^2 - 1)\varphi(x).$$

2 $\varphi''(x)$ a le signe de $x^2 - 1$, puisque $\varphi(x) > 0$ pour tout réel x .

On obtient donc le tableau des variations de φ' :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ'	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0

Pour la limite en $+\infty$, on écrit :

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x} \times \frac{x^2}{2} \times e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{et avec } X = \frac{x^2}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{2X}} X e^{-X} = 0.$$

Même résultat en $-\infty$, puisque φ' est impaire.

La dérivée φ'' de φ' s'annule deux fois en changeant de signe : φ' présente donc deux extrema relatifs en -1 et en 1 . Le calcul des limites en $\pm\infty$ qui donne 0 , montre que ces extrema sont globaux :

– maximum atteint en -1 , valant $e^{-\frac{1}{2}}$.

– minimum atteint en 1 , valant $-e^{-\frac{1}{2}}$.

$$3 a. T_1 : y = -e^{-\frac{1}{2}}(x-1) + e^{-\frac{1}{2}}.$$

b. On étudie le signe de :

$$d(x) = \varphi(x) - [\varphi'(1)(x-1) + \varphi(1)].$$

pour tout réel x , $d'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(1) \geq 0$ d'après 2.

d est donc strictement croissante, s'annulant en 1 : elle est négative sur $]-\infty; 1]$, positive sur $[1; +\infty[$.

La courbe Γ est en dessous de T_1 sur $]-\infty; 1]$, au-dessus de T_1 sur $[1; +\infty[$.

c. La fonction φ étant paire, la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et par suite : la courbe Γ est au-dessus de T_{-1} sur $]-\infty; -1]$, et en dessous de T_{-1} sur $[-1; +\infty[$.

Partie B

1 On remarque que :

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \varphi \circ u, \text{ où } u : x \mapsto \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

$$\text{On obtient donc : } f' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sigma} \times \varphi' \circ u$$

$$\text{et } f'' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sigma^2} \times \varphi'' \circ u$$

c'est-à-dire, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \times f(x).$$

2 $f''(x)$ a le signe du trinôme $\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 - 1$ qui s'annule et change de signe en $\mu - \sigma$ et en $\mu + \sigma$.

f' admet donc deux extrema en $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.

Comme dans la partie A., on montre que la fonction différence :

$$x \mapsto \delta(x) = f(x) - [f'(\mu + \sigma)(x - \mu - \sigma) + f(\mu + \sigma)]$$

qui a une dérivée $\delta' = f' - f'(\mu + \sigma)$, positive sur $\mathbb{R}$, s'annulant en $\mu + \sigma$, est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme δ s'annule en $\mu + \sigma$, elle est donc négative sur $]-\infty; \mu + \sigma]$, positive sur $[\mu + \sigma; +\infty[$: la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente au point d'abscisse $\mu + \sigma$.

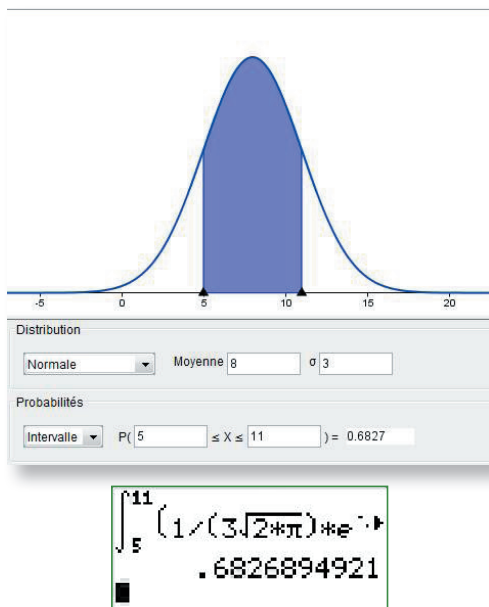
On vérifie aisément que pour tout réel a :

$$f(\mu + a) = f(\mu - a),$$

ce qui montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

Par symétrie, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse donc aussi sa tangente au point d'abscisse $\mu - \sigma$. Elle a donc deux points d'inflexion d'abscisses respectives $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.

3 a. On lit $\mu = 8$ et $\sigma = 3$.



On obtient la valeur annoncée $\approx 0,683$ à 0,001 près.

- 102 1 $P(T \leq 0,55) = 0,7088$.
 2 $P(T > 0,42) = 1 - 0,6628 = 0,3372$.
 3 $P(0,15 \leq T \leq 0,68) = P(T \leq 0,68) - P(T \leq 0,15)$
 $= 0,7517 - 0,5596 = 0,1921$.
 4 a. $P(T \geq -t) = \pi(t)$ et $P(T \leq -t) = 1 - \pi(t)$.
 b. $P(T \leq -0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$.

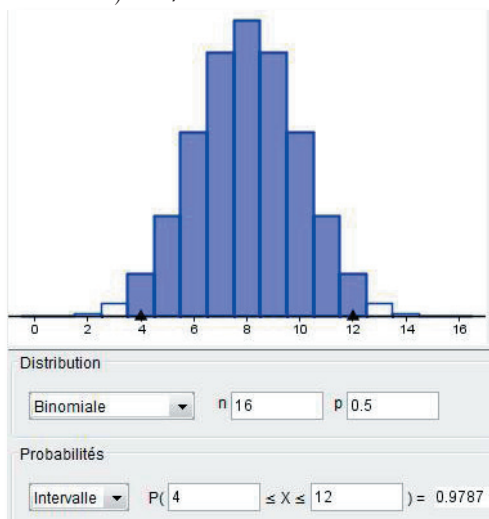
- 103 1 b. 2 a. 3 a.

- 104 1 a. b. et c. 2 b. et d. 3 a. et d. 4 b.

➔ Pistes pour l'accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

- 105 1 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(16; \frac{1}{2})$.
 2 $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}$;
 $P(X = 8) = \binom{16}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{16} \approx 0,196$.
 3 $P(4 \leq X \leq 12) \approx 0,979$.



4 $E(X) = 16 \times 0,5 = 8$; $V(X) = 4$.

- 106 1 c. 2 c. 3 a. et c.

Les savoir-faire du chapitre

107 a. $K = 10$.

b. $P(X < 6) = \int_5^6 \frac{10}{t^2} dt = \frac{1}{3}$.

c. $a = \frac{20}{3}$.

d. $10 \ln 2$.

108 1 f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, de plus :

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} 0 = 0$$

et $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} (1 - a e^{-a} - e^{-a}) = 1$,
 donc f est une densité sur $\mathbb{R}$.

Remarque : en se reportant à la démonstration du cours page 368, on obtient en prenant $\lambda = 1$, que la fonction $x \mapsto (-x - 1)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$ d'où l'égalité précédente.

2 Si $x \leq 0$, $P(X \leq x) = 0$.

Si $x \geq 0$, $P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - x e^{-x} - e^{-x}$ en utilisant la remarque ci-dessus.

On peut alors calculer la valeur exacte si on a la formule ci-dessus, ou bien une valeur approchée grâce à la calculatrice :

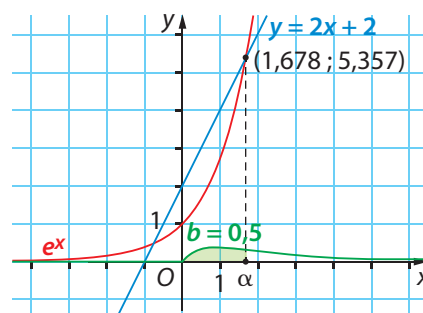
$$P(X \leq 1) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264 ;$$

$$P_{X>1}(X \geq 2) = \frac{3e^{-2}}{2e^{-1}} = \frac{3}{2e} \approx 0,552.$$

3 Le problème équivaut à :

$$P([0; a]) = P([a; +\infty]) \Leftrightarrow 1 - (a+1)e^{-a} = (a+1)e^{-a} \Leftrightarrow 2(a+1) = e^a$$

On obtient graphiquement ou bien à la calculatrice une valeur approchée de $a \approx 0,1678$.



- 109 1 b. 2 b. 3 b. 4 a. et b. et c.

- 110 1 c. 2 a. et c. 3 a. et b.

111 1 On peut approcher X par la loi normale $\mathcal{N}(24; 16)$.

2 a. Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

b. $P(X \leq 28) = P(Y \leq 1) \approx 0,8413$

et $P(X \geq 36) = P(Y \geq 3) \approx 0,0013$ à 0,0001 près.

```
normalcdf(-10^99,
.8413447404
```

```
pdf(-10^99,1,0,1)
```

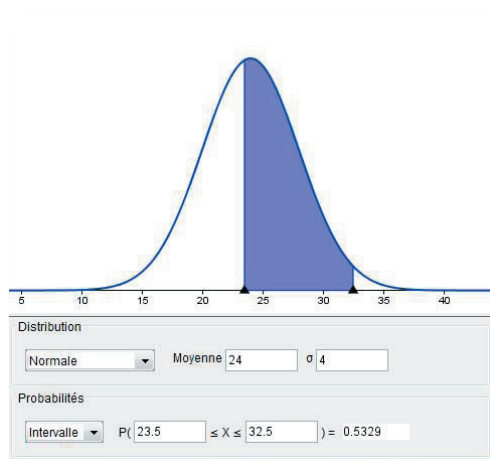
écran complété

```
normalcdf(3,10^99,
.0013499672
```

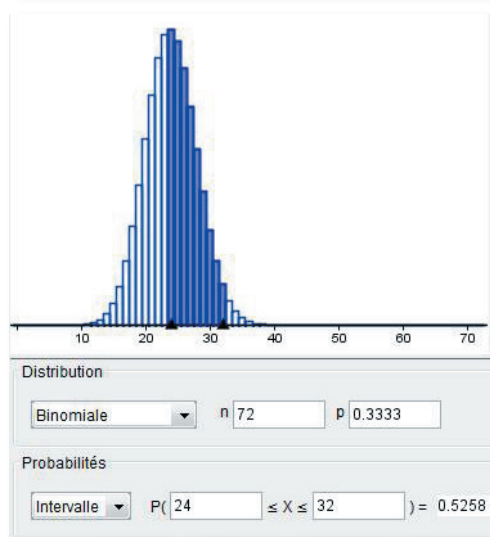
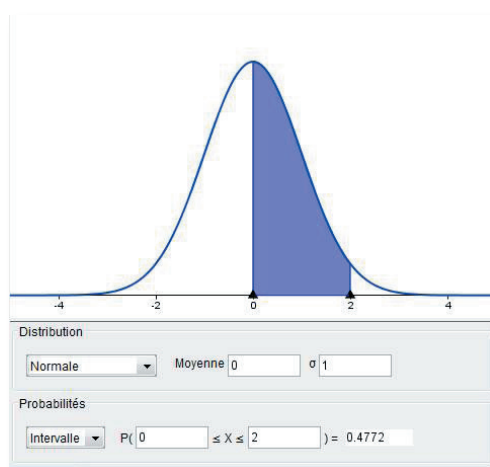
```
pdf(3,-10^99,0,1)
```

écran complété

Pour $P(24 \leq X \leq 32) = P(0 \leq Y \leq 2)$, on utilise la correction de continuité en calculant $P(23,5 \leq X \leq 32,5) \approx 0,5329$. On peut comparer avec la valeur calculée par la loi binomiale (0,5258) et visualiser grâce au logiciel de calcul de probabilités de Geogebra. L'erreur commise est de l'ordre de 0,008.



Avec correction de continuité.



112 1 $2a \times \frac{1}{8} = 0,99 \Leftrightarrow a = 3,96$.

2 a. Z prend ses valeurs dans $]-\infty; +\infty[$.

b. Le cours permet d'identifier le u cherché comme $u_{0,01}$. C'est 2,576.

```
invNorm(0.995,0,
2.575829303
```

Approfondissement

113 1 a. Elle est égale au rapport des deux aires : $\frac{\pi}{4}$.

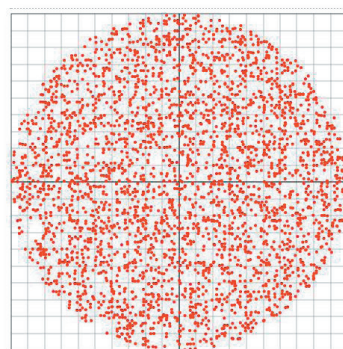
b. Le couple $(x; y)$ est représenté par un point situé à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1.

2 a.

```
VARIABLES
R EST_DU_TYPE NOMBRE
J EST_DU_TYPE NOMBRE
D EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
F EST_DU_TYPE NOMBRE
M EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME
S PREND_LA_VALEUR 0
AFFICHER "donner le nombre M de simulations : "
LIRE M
AFFICHER M
POUR N ALLANT_DE 1 A M
  DEBUT_POUR
  R PREND_LA_VALEUR -1+2*random()
  J PREND_LA_VALEUR -1+2*random()
  D PREND_LA_VALEUR pow(R,2)+pow(J,2)
  SI (D<=1) ALORS
    DEBUT_SI
    S PREND_LA_VALEUR S+1
    TRACER_POINT (J,R)
  FIN_SI
  FIN_POUR
F PREND_LA_VALEUR 4*S/M
AFFICHER "le nombre de points dans le disque est : "
AFFICHER S
AFFICHER "la valeur approchée de PI est "
```

Graphique



Résultats

```
***Algorithme lancé***
donner le nombre M de simulations : 4000
le nombre de points dans le disque est : 3157
la valeur approchée de PI est 3.157
***Algorithme terminé***
```

3 a. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Si n dépasse 30, comme np et $n(1 - p)$ dépassent 5, on peut approcher la loi de X par la loi normale d'espérance np et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$.

b. Il s'agit de $u_{0,05} \approx 1,96$.

c. On a donc $P(-1,96 \leq Y \leq 1,96) \geq 0,95$,

donc $P\left(-\frac{1,96\sigma}{n} \leq \frac{X}{n} - p \leq \frac{1,96\sigma}{n}\right) \geq 0,95$.

Avec $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ (maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0;1]$), on a $\sigma \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$ et par suite l'événement $\left(-\frac{1,96\sigma}{n} \leq \frac{X}{n} - p \leq \frac{1,96\sigma}{n}\right)$ inclus dans l'événement $\left(-\frac{0,98}{\sqrt{n}} \leq \frac{X}{n} - p \leq \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right)$ dont la probabilité est alors supérieure à 0,95.

d. Avec 40 000, donc $\sqrt{n} = 200$, on est sûr à 95 % que :

$$\frac{X}{n} - 0,0049 \leq p \leq \frac{X}{n} + 0,0049,$$

où $\frac{X}{n}$ est la fréquence donnée par le programme : 0,784 775.

D'où : $0,779\,875 \leq p \leq 0,789\,675$
et $3,1195 \leq \pi \leq 3,1587$.

On est donc sûr à 95 % de la première décimale de π , mais pas de la deuxième.

Ce résultat illustre la lente vitesse de convergence de cette « méthode Monte-Carlo ».

114

1 φ est la composée d'une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, et de l'exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a :

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x).$$

Ainsi φ est donc solution de l'équation différentielle :

$$\varphi' + x\varphi = 0.$$

2 a. On peut écrire : $g = \frac{f}{\varphi}$ puisque φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas.

b. f solution de (E) $\Leftrightarrow (\varphi'g + \varphi g') + x\varphi g = 0$

$$\Leftrightarrow -x\varphi g + \varphi g' + x\varphi g = 0 \Leftrightarrow \varphi g' = 0$$

$$\stackrel{\varphi > 0}{\Leftrightarrow} g' = 0.$$

c. $g' = 0 \Leftrightarrow g = c, c \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $c \times \varphi$, avec $c \in \mathbb{R}$.

3 f solution de (E) et $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi$.

Échantillonnage et estimation

➔ Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de fluctuation	■ Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$, alors, pour tout α dans $]0, 1[$ on a, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \in I_n) = 1 - \alpha$ où I_n désigne l'intervalle : $p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ • Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ où p désigne la proportion dans la population.	La démonstration ci-contre donne l'expression d'un intervalle de fluctuation asymptotique(*) au seuil $1 - \alpha$ de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence obtenue f. Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. En majorant $1,96 p(1-p)$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de Seconde. La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique.
Estimation Intervalle de confiance(*). Niveau de confiance.	• Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.	Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines. ■ Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle $F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95. On énonce alors que p est élément de l'intervalle $f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n. Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage.

Plusieurs démonstration, ayant valeur de modèle, sont repérées par le signe ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

(*) Avec les notations précédentes :

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil $1 - \alpha$ est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand.

Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1 - \alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \alpha$, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire fréquence F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence.

Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f .

2. Intentions des auteurs

Ce chapitre se présente comme un développement du chapitre 11, centré autour des applications de la loi normale et du théorème de Moivre-Laplace. Il permet de reprendre et clarifier les notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance qui ont été introduites en Seconde, et Première, et de les unifier à l'aide des théorèmes de Terminale.

➔ Partir d'un bon pied

Objectif

Les activités de cette page ont été conçues pour réactiver les connaissances concernant la loi binomiale (A), le calcul intégral lié aux aires (B). La partie C permet de préparer le terrain pour l'approche graphique de la loi de Moivre-Laplace proposée dans l'activité 3.

A 1 c. 2 a. 3 a. 4 c.

B 1 `normalcdf(0.5, 1.5, 1, 2)`
1.974125487
`normalcdf(1, 10^(9), 1, 2)`
.4999999995

Le deuxième résultat doit être arrondi à 0,5, qui est la valeur exacte.

2 `invNorm(0.9, 505, 101)`
634.4367082

C 1 $E(X) = 8$ et $V(X) = 20 \times 0,4 \times 0,6 = 4,8$.

2 a. `binomPdf(20, 0.4, 20)` 1.099511628E-8 b. `Binomial C.D`
P=0.01596116

3 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6^{20}$.

D 1 a. $k_1 = 5$. b. $k_2 = 12$.

2 On observe une fréquence de 0,21. L'intervalle de fluctuation de la loi binomiale est d'après le 1 de $\frac{5}{20}; \frac{12}{20}$, soit $[0,25; 0,6]$. La fréquence étant en dehors de cet intervalle, on peut penser que le dé est truqué.

➔ Découvrir

Activité 1 Échantillonnage, décision et estimation

Objectif : On propose une activité permettant de réactiver la notion de fluctuation d'échantillonnage et d'intervalle de fluctuation, et de préparer celle d'intervalle de confiance.

1 On s'aperçoit qu'avec 50 tirages, même s'il y a fluctuation, on peut la plupart du temps deviner de quelle proportion il s'agit (on verra que les deux intervalles de fluctuations à 95 % sont disjoints).

Mais ce chapitre se veut surtout une illustration de la puissance de modélisation de la loi normale et de la variété des situations où la prise de décision nécessite de s'y référer.

2 Il s'agit cette fois d'amener à la notion d'intervalle de confiance, avec la contrainte suivante : plus l'intervalle est petit, plus on a de chances d'avoir des tirages qui n'appartiennent pas à cet intervalle.

Activité 2 Loi binomiale et intervalle de fluctuation

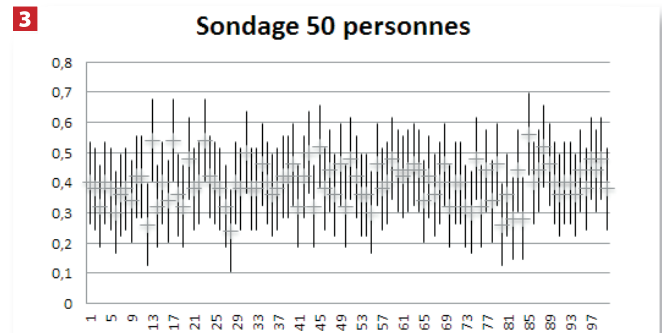
Objectif : Il s'agit ici de présenter la formule permettant de définir l'intervalle de fluctuation à 95% et d'entester la validité par des simulations à l'aide du tableur.

1, 2, 3 et **4** a.

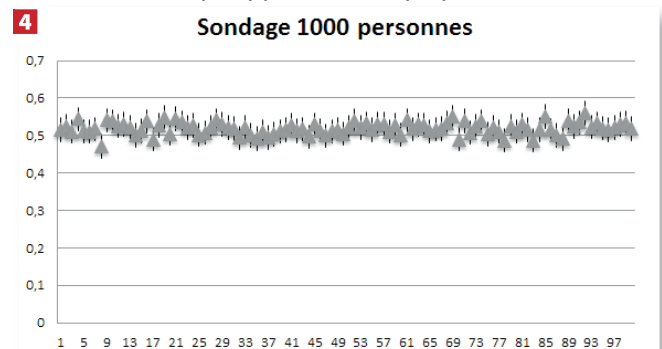
$$c. a = p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{50}} \text{ et } b = p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{50}}.$$

Activité 3 Sondages et fourchettes

Objectif : Il s'agit ici de sensibiliser les élèves à la notion de précision d'un sondage, des sondages d'un même échantillon pouvant amener à des intervalles de confiance sensiblement différents.



On s'aperçoit que les intervalles de confiance varient beaucoup. Il n'est pas possible de garantir que la valeur de p est inférieure à 0,5, qui appartient à la plupart des intervalles.



On peut cette fois dire que la majorité des électeurs comptent voter oui.

Exercices d'application

➔ Savoir faire Mobiliser les acquis antérieurs sur l'échantillonnage

1 La fréquence observée est de $f = \frac{255}{500} = 0,51$.
Par la méthode de Seconde :

$$I = 0,45 - \frac{1}{\sqrt{500}}; 0,45 + \frac{1}{\sqrt{500}} = [0,405; 0,495].$$

Par la méthode vue en Première :

$$I = \frac{203}{500}; \frac{247}{500} = [0,406; 0,494].$$

Dans les deux cas, l'hypothèse est rejetée.

➔ Savoir faire Utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique pour une prise de décision

2 Pour que les hypothèses de validité soient vérifiées, il faut : $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$.
Or $p = 0,7$. D'où $n \geq 30$.

L'intervalle de fluctuation est égal à :

$$I = 0,7 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,7 \times 0,3}}{\sqrt{n}}; 0,7 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,7 \times 0,3}}{\sqrt{n}}.$$

Par hypothèse, on a donc : $0,7 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,7 \times 0,3}}{\sqrt{n}} \leq 0,6$.

$$\text{D'où } 1,96 \times \frac{\sqrt{0,7 \times 0,3}}{\sqrt{n}} \geq 0,1.$$

$$\text{D'où } \sqrt{n} \leq 1,96 \times \frac{\sqrt{0,7 \times 0,3}}{0,1}.$$

$$\text{D'où } n \leq 1,96 \times \frac{\sqrt{0,7 \times 0,3}}{0,1}^2 = 80,6.$$

On a donc interrogé au maximum 81 clients.

➔ Savoir faire Utiliser un intervalle de confiance

3 On détermine les intervalles de confiance pour chacun des candidats à partir du sondage :

- Pierre : $[0,138; 0,202]$;
- Paul : $[0,113; 0,177]$;
- Jacques : $[0,163; 0,227]$.

Les résultats sont donc compatibles avec les résultats du sondage.

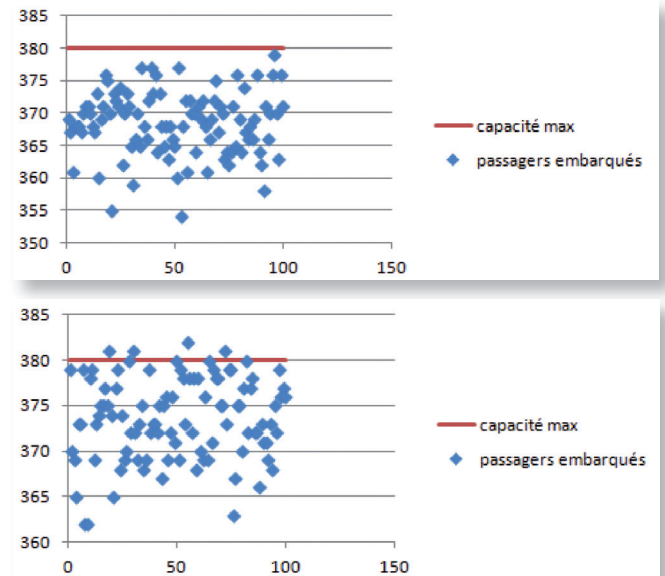
➔ Travaux pratiques

4 Surréservation

► Se faire une idée du résultat

Pour $n = 380$, la compagnie perd de l'argent dans toutes les simulations, le nombre de passagers embarqués étant systématiquement inférieur à 375.

Voici deux simulations réalisées pour $n = 393$ et $n = 397$.



On peut conjecturer que la valeur optimale se situe entre ces deux valeurs.

► Valider la conjecture formulée

1 X_n suit une loi $\mathcal{B}(n; 0,4)$.

2 $p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$, avec $p = 0,94$.

3 a. Il n'y a pas surréservation si le nombre de passagers se présentant effectivement est inférieur ou égal à la capacité maximale de l'avion.

b. On cherche le plus grand entier tel que $\frac{X_n}{n} \leq \frac{380}{n}$.

On veut donc que la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% soit inférieure à $\frac{380}{n}$.

$$\text{D'où } p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{380}{n} \Leftrightarrow 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{380}{n} - p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,96^2 p(1-p)}{n} \leq \frac{380^2}{n^2} + p - \frac{760p}{n}.$$

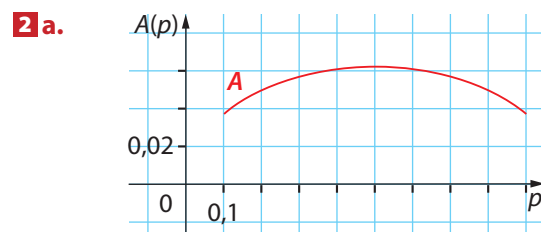
$$\Leftrightarrow p^2 n^2 - (760p + 1,96^2 p(1-p))n + 380 \geq 0.$$

Soit, après étude de l'inéquation : $n < 395$. On trouve $n = 394$.

5 Influence de p sur la longueur de l'intervalle de fluctuation

1 a. $p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

b. $A(p) = 3,92 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{1000}}$.



b. On s'aperçoit que plus on s'éloigne de $p = 0,5$, plus l'amplitude de l'intervalle diminue.

3 On veut que $3,92 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,01$.

D'où $n = 392^2 p(1-p)$.

Pour $p = 0,1 : n = 13\,830$.

Pour $p = 0,4 : n = 36\,879$.

Pour $p = 0,9 : n = 13\,830$.

Plus la probabilité se rapproche de 0,5, plus la taille de l'échantillon doit être grande pour avoir une amplitude de 0,01. On remarque également que ces tailles d'échantillon sont très grandes, de l'ordre de 10 à 30 fois les ordres de grandeur des sondages électoraux.

6 Taille de l'échantillon et intervalle de fluctuation

1 a. Immédiat en utilisant que $F_n = \frac{x_n}{n}$.

2 b.

ALGO

Entrer un réel p compris entre 0,34 et 0,43

$n := 150 ; a := 0 ; b := 1 ;$

TantQue $b - a \geq 0,95$ Faire

$b := \text{binom}_{\text{cdf}}(n, p, np + \text{racine}(n)) ;$

$a := \text{binom}_{\text{cdf}}(n, p, np - \text{racine}(n)) ;$

$n := n + 1$

FinTantQue

$N_0 := n + 2 ;$

Afficher $N_0 ;$

Fin

3 b. On s'aperçoit que la valeur de n varie beaucoup, même pour des probabilités assez proches.

➔ Faire le point

11 1 Vrai.

2 Vrai.

3 a. Faux.

b. Vrai.

c. Vrai.

4 Faux.

12 1 a. Oui.

b. Oui.

2 a. Non.

3 a. Oui.

b. Oui.

4 a. Oui.

b. Non.

➔ Exercices d'application

1 Décider à l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique

13 1 b.

2 c.

3 a.

14 1 b.

2 b.

3 a.

15 1 a.

2 a.

3 b.

16 1 a. [0,33 ; 0,47]. **b.** [0,31 ; 0,49].

2 La fréquence observée est 0,37.

a. Oui.

b. Oui.

17 1 a. $p = 0,5$. **b.** [0,44 ; 0,56].

c. $n_0 = 169$ ou 168, suivant l'arrondi effectué au **1**.

2 a. $p = 0,25$.

b. [0,20 ; 0,30].

c. $n_0 = 120$.

18 1 $p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

2 a. $f(p) = -p^2 + p$. Le maximum est donc atteint pour $p = 0,5$. Il vaut : $f(0,5) = 0,25$.

b. $1,96 \sqrt{p(1-p)} = 1,96 f(p) \leq 1,96 \times \sqrt{0,25}$.

D'où le résultat puisque $\sqrt{0,25} = 0,5$ et $1,96 < 2$.

c. L'intervalle vu en Terminale est toujours inclus dans l'intervalle vu en Seconde.

21 1 L'intervalle de fluctuation est donc de [0,1475 ; 0,3125]. La fréquence observée n'est donc pas en dehors de l'intervalle. Aucune investigation ne sera amenée.

2 Il faudrait que $0,29 > 0,23 + 1,96 \frac{\sqrt{0,23 \times 0,77}}{\sqrt{n}}$.

D'où : $\frac{1,96 \sqrt{0,23 \times 0,77}}{\sqrt{n}} < 0,06$.

D'où : $n > \frac{1,96^2 \times 0,23 \times 0,77}{0,06^2}$. $n \geq 189$.

22 1 Pour 0,6 : [0,504 ; 0,696] ; pour 0,5 : [0,402 ; 0,598].

2 a. On a observé une fréquence de 0,45. On peut donc penser qu'il s'agit d'un sac de fausses pierres.

b. Cette fois, la fréquence observée appartient aux deux intervalles de confiance, on ne peut pas conclure.

3 Il faut que :

$0,5 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{n}} < 0,6 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,6(1-0,6)}}{\sqrt{n}}$.

On peut résoudre l'inéquation ou utiliser la calculatrice. On trouve $n \geq 378$.

23 1 [0,0064 ; 0,0536].

2 a. On a $n = 200$, $np = 6$, $n(1-p) = 194$.

Donc les conditions sont bien réunies.

3 La fréquence observée est de 0,07. Elle est en dehors de l'intervalle de fluctuation. On peut donc penser qu'il y a eu recrudescence des excès de vitesse, et donc ne pas enlever le panneau.

4 a. [0,015 ; 0,045].

b. Dans l'intervalle de fluctuation défini au **a**.

24 1 [0,0025 ; 0,0215].

2 $n = 500$; $np = 6$; $n(1-p) = 494$.

Les conditions sont donc réunies.

3 La fréquence observée est de 0,02. A priori, on reste dans l'intervalle de fluctuation et il n'y a pas lieu de régler la machine.

4 b.

A73	f_{sc}	720				
	A	B	C	D		
1	n	inf intervalle	sup intervalle	décision		
70	690	0,003875426	0,020124574	NON réglage		
71	700	0,003933667	0,020066333	NON réglage		
72	710	0,003990674	0,020009326	NON réglage		
73	720	0,004046488	0,019953512	Réglage		
74	730	0,004101152	0,019898848	Réglage		
75	740	0,004154704	0,019845296	Réglage		
76	750	0,004207182	0,019792818	Réglage		

Il faut que $n \geq 720$.

2 Estimer à l'aide d'un intervalle de confiance

25 1 Vrai. 2 Faux. 3 Faux. 4 Vrai. 5 Vrai.

26 1 a. Intervalle de confiance : $[0,445\ 3 ; 0,534\ 7]$.

b. Non, il est fort possible que plus de 50 % d'électeurs aient choisi Louis Victorien.

2 Il faudrait que :

$$0,49 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,50 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,01} \Leftrightarrow n > 10\ 000.$$

27 1 Il s'agit de déterminer deux intervalles de fluctuation :

- pour 5 000 candidats : $[0,846\ 3 ; 0,865\ 7]$;
- pour 2 000 candidats : $[0,840\ 6 ; 0,871\ 4]$.

Aucun des taux obtenus n'est donc compatible avec l'hypothèse d'un taux commun de 85,6 %.

2 Pour la ville A : $[0,785\ 9 ; 0,814\ 1]$ centré en 0,8.

Pour la ville B : $[0,877\ 6 ; 0,922\ 4]$ centré en 0,9.

Les deux intervalles sont disjoints, il est donc très improbable que la valeur de p soit la même pour les deux villes.

28 1 a. $[0,55 ; 0,75]$. b. $[0,46 ; 0,66]$.

c. Les deux intervalles de confiance ne sont pas disjoints, on ne peut donc pas écarter l'hypothèse d'une absence d'effet propre.

3 Il faudrait que :

$$0,56 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,65 - \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{2}{0,09} \Leftrightarrow n \geq 494.$$

29 1 a. $[0,829\ 3 ; 0,970\ 7]$.

b. $[0,65 ; 0,75]$.

3 On peut donc considérer que les taux de germination sont différents.

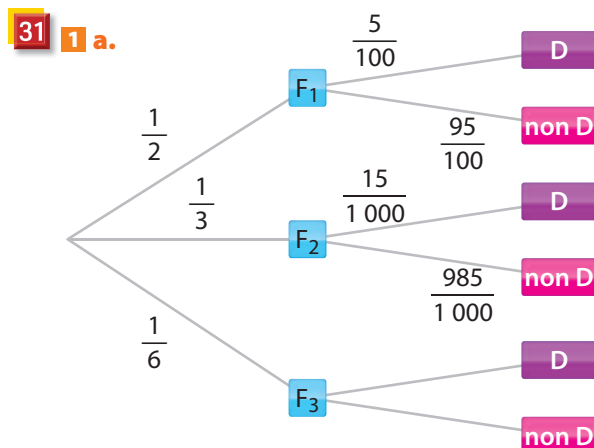
30 Avec nitrate : $[0,379\ 3 ; 0,520\ 7]$.

Sans nitrate : $[0,239\ 3 ; 0,380\ 7]$.

Les deux intervalles ont une intersection non vide. On ne peut donc pas donner de réponse affirmative.

➔ Prépa Bac

Exercices guidés



b. $P(F_1 \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} = \frac{5}{200}.$

c. $P(F_2 \cap D) = \frac{5}{1\ 000}.$

Donc $P(F_3 \cap D) = \frac{35}{1\ 000} - \frac{5}{1\ 000} - \frac{5}{200} = \frac{5}{1\ 000}.$

d. $P_{F_3}(D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(F_3)} = \frac{3}{100}.$

2 a. $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$, où X est le nombre de paires de chaussettes présentant un défaut.
 $P(X \leq 1) = 0,9833.$

b. On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $[0,017 ; 0,035]$.
 La fréquence observée étant de 0,05, elle est donc dans l'intervalle de fluctuation, il n'y a donc pas d'anomalie.

32 1 Toutes les probabilités sont entre 0 et 1, et leur somme est égale à : $\frac{4+5+6+7+8+9}{39} = 1.$

2 a. $p(A) = \frac{21}{39}$; $p(B) = \frac{30}{39}$; $p(C) = \frac{13}{39}$. b. $\frac{16}{21}.$

c. $p(A \cap B) = \frac{16}{39} \neq p(A) \times p(B)$;

$p(A \cap C) = \frac{7}{39} = p(A) \times p(C).$

Donc A et B ne sont pas indépendants, mais A et C le sont.

3 Le nombre X de parties gagnées suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(60 ; \frac{21}{39}\right)$. Donc le gain est égal à $X - (60 - X)$, d'espérance :
 $2E(X) - 60 = 2 \times 60 \times \frac{21}{39} - 60 \approx 4,65.$

4 a. On a obtenu 33 fois un résultat pair, soit un gain de 6 euros.

b. On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $[0,412\ 3 ; 0,664\ 6]$. La fréquence observée étant de $\frac{33}{60} = 0,55$, elle est compatible avec les résultats obtenus.

33 1 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(5\ 000 ; 0,008)$, car il s'agit du nombre de succès dans une série d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

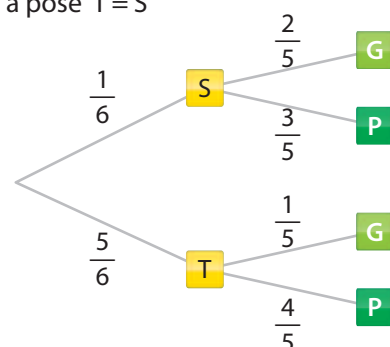
2 $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1.$

3 a. $[0,0055 ; 0,0105]$. La fréquence observée est de 0,012. On est en dehors de l'intervalle de fluctuation, le lot est donc d'une qualité plus mauvaise que ce qui est prévu.

34 1 a. $P(X \geq 9,95) = 0,95$. b. 0,05.

2 $[0,055\ 4 ; 0,069\ 6]$.

35 1 On a posé $T = \bar{S}$ et $P = \bar{G}$.



2 On applique la formule des probabilités totales :

$$P(G) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{30}.$$

3 Il s'agit d'une probabilité conditionnelle :

$$P_G(S) = \frac{P(G \cap S)}{P(G)} = \frac{2}{7}.$$

4 a. On vérifie que les conditions d'application de l'intervalle de fluctuation sont réunies, puis on détermine cet intervalle : $I = [0,212 ; 0,255]$.

La fréquence observée étant de $f = \frac{330}{1500} = 0,22$, on se

trouve à l'intérieur de l'intervalle de confiance.

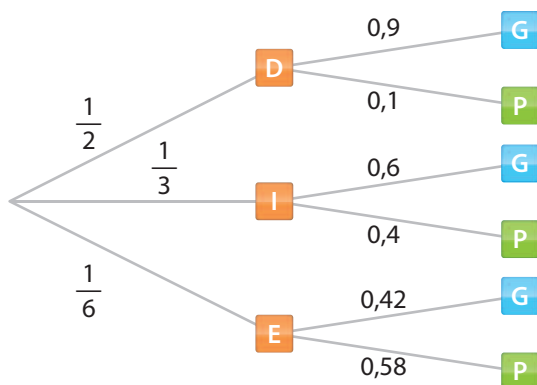
b. Il aurait fallu que la borne inférieure dépasse 0,22, soit :

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} > 0,22 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1,96 \sqrt{p(1-p)}}{p - 0,22}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1,96 \sqrt{p(1-p)}}{p - 0,22}^2 \approx 3865,6.$$

Il faut donc au moins 3 867 parties.

36 1 et 3 d. On note P l'événement : la partie est perdue. Voici l'arbre entièrement complété :



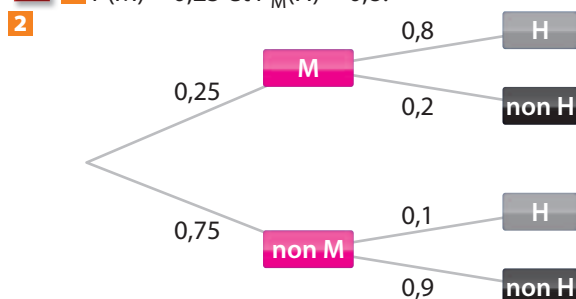
2 $D \cap G$: la partie de niveau débutant a été gagnée.
 $P(D \cap G) = 0,5 \times 0,9 = 0,45$.

a. $[0,67 ; 0,77]$. b. $P(E \cap G) = 0,72 - 0,45 - 0,2 = 0,07$.

c. $P_E(G) = \frac{0,07}{1/6} = 0,42$.

e. $P_G(D) = \frac{0,05}{0,28} = 0,179$.

37 1 $P(M) = 0,25$ et $P_M(H) = 0,8$.



3 $P(M \cap H) = 0,25 \times 0,8 = 0,2$.

4 $P(H) = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,1 = 0,275$.

5 $P_M(H) = 0,8$ et $P(H) = 0,275$. Donc les deux événements ne sont pas indépendants.

6 On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $[0,2497 ; 0,3003]$. La fréquence observée étant de 0,17, on peut considérer que la chorale du lycée n'est pas représentative.

Problèmes

38 1 X suit une loi $\mathcal{B}(50 ; \frac{1}{3})$.

2 a. On a $E(X) = \frac{50}{3}$ et $V(X) = \frac{100}{9}$. D'après Moivre-

Laplace, la loi de la variable $\frac{X - \frac{50}{3}}{\sqrt{\frac{100}{9}}}$ peut être approchée

par une loi normale centrée réduite. Donc la loi de X peut être approchée par une loi normale de moyenne $\frac{50}{3}$ et d'écart-type $\frac{10}{3}$.

b. On pratique une correction de continuité, car 18 est un entier.

c. $P(Y > 17,5) \approx 0,40$.

d. $P(14,5 < X < 17,5) \approx 0,34$.

39 1 On a alors $np \geq 6$; $n(1-p) \geq 24$.

2 $p_i = 0,2 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2 \times 0,8}}{\sqrt{n}} = 0,2 - \frac{0,784}{\sqrt{n}}$;

$p_s = 0,2 + \frac{0,784}{\sqrt{n}}$.

3 $p_s = 0,2 + \frac{0,784}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{p_s - 0,2}{0,784} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow n = \frac{0,784^2}{p_s - 0,2}$.

4 a. $f'(x) = 0,784^2 \times \frac{-2}{(x - 0,2)^3} < 0$.

b. $n \approx 60$.

5 a. $[0,0988 ; 0,3012]$.

b. La fréquence observée est de 0,35, donc en dehors de l'intervalle de confiance. On peut au contraire penser à un renforcement de l'offre.

40 Partie A

1 X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0,02)$.

2 $P(X = 0) = 0,36$; $P(X = 1) = 0,37$.

3 $P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0,27$.

Partie B

1 0,95.

2 $0,95^2 \approx 0,90$.

Partie C

1 $[0,9084 ; 0,9716]$.

41 1 $[0,304 ; 0,496]$.

2 $n = 100$; $np = 40$; $n(1-p) = 60$.

On est bien dans les conditions d'application.

3 La fréquence observée se situe dans l'intervalle de confiance, il n'y a donc pas a priori de problème spécifique.

4 a. $[0,3785 ; 0,4215]$.

5 b. On peut cette fois considérer qu'il y a un problème spécifique de surpoids, la valeur observée étant en dehors de l'intervalle de fluctuation.

42 Partie A

ALGO

Écrire « donner un entier naturel n supérieur ou égal à 2) ;

Lire(n) ;

$n_1 := 0$; $x_1 := 1$;

Pour $k := 1$ to n Faire

hasard := aleaentrebornes(1, n) + 1 ;

Si hasard = 1 Alors

$x_1 := 0$; $n_1 := n_1 - 1$;

FinSi ;

FinPour ;

Afficher(x_1 , n_1) ;

Fin

Partie B

1 L'événement ($X_i = 1$) correspond au fait qu'on n'a jamais tiré l'urne numéro i . Or la probabilité de tirer l'urne numéro i est de $\frac{1}{n}$. D'où le résultat, les tirages étant indépendants.

2 a. On a : $P(X_1 = 1) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 0,366$.

D'où l'intervalle de fluctuation : [0,271 6 ; 0,460 4].

3 0,2 n'appartient pas à l'intervalle, il y a donc incompatibilité.

43 1	Moins de 15 ans	37,3
	15 – 19 ans	12,1
	20 – 24 ans	12,7
	25 – 39 ans	37,9
	Total	100

2 On a indiqué à chaque fois l'intervalle de confiance et la fréquence observée. L'échantillon est bien représentatif.

Moins de 15 ans	[0,342 ; 0,404]	0,383
15 – 19 ans	[0,100 ; 0,142]	0,123
20 – 24 ans	[0,106 ; 0,148]	0,128
25 – 39 ans	[0,348 ; 0,410]	0,366

44 1 a. [0,495 ; 0,586].

b. Fréquence observée : 0,56.

c. [0,163 ; 0,237].

d. Fréquence observée : 0,235.

e. L'échantillon est donc bien représentatif.

2 [0,248 ; 0,342].

Pistes pour l'accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

45 1 a. 0,479 6 ;

b. 0,218 6 ;

c. 0,420 7.

2 L'espérance est de 2 et l'écart-type de 1.

46 1 $P(X = 8) \approx 0,179 71$.

2 $P(10 \leq X \leq 15) \approx 0,244 3$.

3 a. $k_1 = 7$.

b. $k_2 = 11$.

c. $P(X \in [k_1 ; k_2]) = 0,95$. L'intervalle $[k_1 ; k_2]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

47 1 Il s'agit de l'aire du domaine sous la courbe compris entre $x = u_\alpha$ et $x = -u_\alpha$.

2 D'après le cours $u_{0,05} = 1,96$ et $u_{0,05} = 2,28$.

Les savoir-faire du chapitre

48 1 $I_n = p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

$P \frac{X_n}{n} I_n$ converge vers $1 - \alpha$.

2 $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$.

3	n	10	100
	p	0,04	0,3
	Intervalle	[-0,08 ; 0,16]	[-0,185 ; 0,615]
	Validité	Non	Non
	n	100	100
	p	0,04	0,3
	Intervalle	[0,001 6 ; 0,078 4]	[-0,210 2 ; 0,389 8]
	Validité	Non	Oui

49 1 0,0053.

2 a. [0,013 ; 0,002 7].

b. $n = 15 000$; $np = 30$; $n(1-p) = 14 970$; les conditions sont donc réunies.

c. Non, car la fréquence observée est en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique.

En lien avec les sciences

50 1 Il faut que l'échantillon de poissons corresponde à un tirage avec remise. Si on pêche tous les poissons au même endroit, on peut tomber par exemple sur un banc de brochets, ce qui fausserait le résultat.

2 a. [0,39 ; 0,57].

b. Non, car 0,5 appartient à l'intervalle de confiance.

c. Il aurait fallu que $2 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$.

D'où $n \geq 400$.

Vers le supérieur

51 1 [0,481 1 ; 0,578 9].

2 Non.

3 Il aurait fallu : $f - 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} > 0,5$.

D'où : $n > \frac{1,96^2}{0,03 \sqrt{f(1-f)}} = 1 063,3$.

Il faut donc interroger au moins 1 064 électeurs.

52 1 $X: [0,0113 ; 0,0287] ;$

$Y: [0,3696 ; 0,4304] ;$

$Z: [0,5494 ; 0,6106].$

2 $X: 0,0174 ; Y: 0,0608 ; Z: 0,062.$

3 Il faut que $2 \times 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{n}} \leq 0,002.$

Soit $n \geq (1\,960 \sqrt{0,02 \times 0,98})^2 = 75\,295,4.$

Il faut interroger au moins 75 296 personnes, ce qui est difficilement faisable en pratique !

53 1 a. $P(A \cap B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002$, car les deux événements sont indépendants.

b. $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$
 $= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$
 $= 0,9702.$

c. $P(A \cup B) = 0,0298.$

2 a. $\mathcal{B}(100 ; 0,3).$

b. $P(X = 3) \approx 0,227.$

3 $P(189 \leq Z \leq 252) \approx 0,960.$

Divisibilité et congruences



Introduction

1. Programme

Les problèmes étudiés peuvent notamment être issus de la cryptographie ou relever directement de questions mathématiques, par exemple, à propos de nombres premiers.

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du RIB, code INSEE).	• Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. • Division euclidienne. • Congruences dans $\mathbb{Z}$.
Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill).	• PGCD de deux entiers. • Entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss.
Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichael).	• Nombres premiers. • Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.
Sensibilisation au système cryptographique RSA.	

2. Intentions des auteurs

L'enseignement de Spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Cette phrase du programme a motivé un changement de maquette par rapport aux chapitres précédents :

- la page « Partir d'un bon pied » est remplacée par une page comportant quelques aspects historiques liés aux notions qui seront traitées ;
- les deux pages « Découvrir » sont remplacées par trois pages « Du problème vers les notions » qui abordent des problèmes proposés par le programme, avec une reprise éventuelle en Travaux Pratiques ou Exercices après l'étude du cours, et une page « Activités de découvertes » plus proche des pages « Découvrir ».

La répartition des notions étudiées entre les deux chapitres d'arithmétique a été pensée pour pouvoir approcher les problèmes de codage dans l'un et de chiffrement dans l'autre. Le questionnement sur les nombres premiers est présent dans les deux chapitres.

Du point de vue mathématique :

Le chapitre 13 introduit la divisibilité, les nombres premiers, la division euclidienne et la notion de congruences.

Les exercices d'application sont majoritairement simples pour une bonne assimilation des notions nouvelles.

Les problèmes sont de difficultés hétérogènes, avec quelques énoncés assez difficiles pour que chacun y trouve son compte.

Du problème vers les notions

Activité 1 Les codes-barres et les codes ISBN

Objectif : Décrire les notions de clés pour les codes-barres et ISBN ; on reprend contact à cette occasion avec la division euclidienne vue au collège.

Partie A

1 b. Pour le code **a** : $A = 15$; $B = 18$; $S = 69$; $R = 9$; $C = 1$.

Pour le code **b** : $A = 15$; $B = 15$; $S = 60$; $R = 0$; $C = 0$.

Pour le code de la page 439 : $A = 30$; $B = 18$; $S = 84$; $R = 4$; $C = 6$.

2 a. $R' = R \Leftrightarrow S' - 10q' = S - 10q$

$$\Leftrightarrow \alpha - a_{2k+1} = 10(q' - q).$$

$$0 \leq \alpha \leq 9 \text{ et } -9 \leq -a_{2k+1} \leq 0,$$

$$\text{donc } -9 \leq \alpha - a_{2k+1} \leq 9.$$

Le seul multiple de 10 compris entre -9 et 9 étant 0, il est impossible d'avoir $\begin{cases} \alpha \neq a_{2k+1} \\ R' = R \end{cases}$ et l'erreur est détectée.

$$\text{b. } S' = S + 3\alpha - 3a_{2k}$$

$$R' = R \Leftrightarrow S' - 10q' = S - 10q$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha - a_{2k+1}) = 10(q' - q).$$

$$-27 \leq 3(\alpha - a_{2k+1}) \leq 27 ;$$

donc $3(\alpha - a_{2k+1}) \in \{-20; -10; 0; 10; 20\}$; le seul multiple de 3 de cette liste étant 0, il est impossible

d'avoir $\begin{cases} \alpha \neq a_{2k} \\ R' = R \end{cases}$ et l'erreur est détectée.

$$\text{3 a. } S' = S + 2a_{2k-1} - 2a_{2k}.$$

$$\text{b. } R' = R \Leftrightarrow S' - 10q' = S - 10q$$

$$\Leftrightarrow 2(a_{2k-1} - a_{2k}) = 10(q' - q)$$

$$\Leftrightarrow (a_{2k-1} - a_{2k}) = 5(q' - q).$$

$$\text{c. } -9 \leq a_{2k-1} - a_{2k} \leq 9,$$

donc $a_{2k-1} - a_{2k} \in \{-5; 0; 5\}$; l'erreur ne sera donc pas détectée si $a_{2k-1} - a_{2k} = \pm 5$.

Partie B

$$\text{1 } 2 \times 10 + 0 \times 9 + 1 \times 8 + 1 \times 7 + 3 \times 6 + 5 \times 5 + 5 \times 4 + 7 \times 3 + 0 \times 2 = 119 ;$$

$119 = 11 \times 10 + 9$; $11 - 9 = 2$. Le numéro aurait donc été : 2011355702.

$$\text{2 a. } 2 \times 10 + 0 \times 9 + 1 \times 8 + 1 \times 7 + 3 \times 6 + 5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 = 107 ;$$

$107 = 11 \times 9 + 8$; $11 - 8 = 3$. Le dernier chiffre est donc 3.

b. On calcule cette fois la clé comme pour un code-barres : $A = 26$; $B = 19$; $S = 83$; $R = 3$; $C = 7$.

Le nouveau code ISBN est donc : 9782011354327.

Activité 2 Ruban de Pascal et critères de divisibilité

Objectif

Étudier les critères de divisibilité d'une façon générale et historique ; on renvoie la dernière question après l'étude du cours sur les congruences.

1 a. 10^4 a même reste que 60, soit 4 ; 10^5 a même reste que 40, soit 5 ; 10^6 a même reste que 50, soit 1.

b. Avec 10^6 , on a retrouvé le premier reste 1, donc pour 10^7 on va retrouver le second reste 3 et ainsi de suite.

2 a. Le ruban de 3 est : 1 ; 1 ; 1 ; 1... ; le nombre N' est donc égal à la somme des chiffres de N .

Le ruban de 11 est : 1 ; 10 ; 1 ; 10 ; 1 ; 10...

b. $1 + 4 + 5 + 1 + 0 + 1 = 12$ est un multiple de 3, donc 101 541 aussi.

$1 + 4 \times 10 + 5 + 1 \times 10 + 0 + 1 \times 10 = 66$ est un multiple de 11, donc 101 541 aussi.

3 Le tableur donne le ruban de 13 : 1 ; 10 ; 9 ; 12 ; 3 ; 4 ; 1... , puis $N' = 507$ qui est un multiple de 13, donc l'entier proposé aussi.

$$\text{4 } N \equiv a_0 + a_1 \times r_1 + \dots + a_n \times r_n (d) ;$$

c'est-à-dire $N \equiv N' (d)$.

Activités de découverte

Activité 3 Diviseurs et nombres parfaits

Objectif

Revoir la notion de diviseurs en abordant les nombres parfaits et disposer d'un programme, qui pourra être réutilisé dans les deux chapitres.

1 2 Ce programme donne les diviseurs positifs d'un entier naturel.

3 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 31 ; 62 ; 124 ; 248 ; 496 et leurs opposés.

4 $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

5 Pour 6, $p = 2$. Pour 28, $p = 3$. Pour 496, $p = 5$.

Activité 4 Notion de plus petit élément

Objectif

Introduire la notion de plus petit élément qui n'est pas explicitement inscrite dans le programme, mais qui est indispensable pour l'existence de la division euclidienne.

1 a. De par la définition, un plus petit élément est aussi un minorant.

b. L'intervalle $]0 ; +\infty[$ est minoré par 0, mais n'admet pas de plus petit élément.

2 a. Oui : 0. **b.** Oui : 1. **c.** Non, à cause des multiples négatifs. **d.** Oui : 1. **e.** Non, car A est vide.

Exercices d'application

Savoir faire Utiliser les propriétés de la divisibilité

1 1 k divise $(5n + 21) - 5(n + 4)$, donc k divise 1, donc $k = \pm 1$.

2 $(5n + 21)$ et $(n + 4)$ n'ayant pas de diviseur commun autre que -1 et 1 , la fraction est irréductible.

2 **1** $4a^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b)$.

2 $27 = 1 \times 27 = 3 \times 9$ et $2a - b \leq 2a + b$; d'où les deux systèmes possibles.

3 Les solutions des systèmes sont : $\begin{cases} a = 7 \\ b = 13 \end{cases}$ et $a = b = 3$.

Comme dans l'équation initiale, a et b n'interviennent que par leurs carrés, $S = \{(-7; -13); (-7; 13); (7; -13); (7; 13); (-3; -3); (-3; 3); (3; -3); (3; 3)\}$.

3 **1** Si on note n le plus petit des trois entiers, leur somme vaut $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$ qui est un multiple de 3, car $(n + 1)$ est un entier.

2 L'un des deux est pair, donc le produit aussi.

4 **1** Supposons qu'il existe deux entiers a et b tels que $26a - 54b = 2013$, alors on aurait :

$2(13a - 27b) = 2013$. Or, $2(13a - 27b)$ est pair et 2013 est impair, c'est impossible.

Conclusion : il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $26a - 54b = 2013$.

2 Soit n un entier naturel qui soit simultanément un diviseur de $100\,000$ et un multiple de 24 .

Alors il existerait deux entiers naturels k et k' tels que : $100\,000 = kn$ et $n = 24k'$.

On aurait donc $100\,000 = 24kk' \Leftrightarrow 12\,500 = 3kk'$. Or, $3kk'$ est un multiple de 3 et $12\,500$ n'est pas un multiple de 3. C'est donc impossible.

Conclusion : il n'existe pas d'entier naturel n à la fois multiple de 24 et diviseur de $100\,000$.

5 **1** Les diviseurs propres de 284 sont : $1; 2; 4; 71; 142$ et leur somme est égale à 220 .

2 Les diviseurs propres de 220 sont : $1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110$ et leur somme est 284 .

On constate que la somme des diviseurs propres de chacun d'eux est égale à l'autre.

⇒ **Savoir faire** Obtenir et utiliser une décomposition en produit de facteurs premiers

6 $117 = 3^2 \times 13$; $665 = 5 \times 7 \times 19$;
 $16\,184 = 2^3 \times 7 \times 17^2$; $4\,554 = 2 \times 3^2 \times 11 \times 23$;
 $19\,343 = 23 \times 29^2$.

7 Pour $117 : 1; 3; 9; 13; 39; 117$.
 Pour $665 : 1; 5; 7; 19; 35; 95; 133; 665$.
 Pour $16\,184 : 1; 2; 4; 7; 8; 14; 17; 28; 34; 56; 68; 119; 136; 238; 289; 476; 578; 952; 1\,156; 2\,023; 2312; 4\,046; 8\,092; 16\,184$.
 Pour $4\,554 : 1; 2; 3; 6; 9; 11; 18; 22; 23; 33; 46; 66; 69; 99; 138; 198; 207; 253; 414; 506; 759; 1\,518; 2\,277; 4\,554$.
 Pour $19\,343 : 1; 23; 29; 667; 841; 19\,343$.

8 La calculatrice affiche : « 83 est premier » ; « 7 divise 91 » ; « 17 divise 731 » ; « 983 est premier » ; « 89 divise 8 633 » ; « 73 divise 10 001 » ; « 19 973 est premier ».

⇒ **Savoir faire** Utiliser les résultats sur la division euclidienne

9 $n = 13q + 9$ et $p = 13q' + 8$,
 donc $n + p = 13(q + q' + 1) + 4$; le reste de la division euclidienne de $n + p$ par 13 est 4.

10 **1** Si n est pair : $n = 2p$, donc $n^2 = 4p^2$.

▶ Si p est pair, p^2 aussi, donc 8 divise n^2 et le reste vaut 0.

▶ Si p est impair, p^2 aussi, donc $p^2 = 2k + 1$, donc $n^2 = 8k + 4$ et le reste vaut 4.

Si n est impair : $n = 2p + 1$, donc $n^2 = 4(p^2 + p) + 1$.

▶ Si p est pair, $p^2 + p$ aussi, donc $p^2 + p = 2k$, donc $n^2 = 8k + 1$ et le reste vaut 1.

▶ Si p est impair, p^2 aussi, donc $p^2 + p$ est pair, donc $p^2 + p = 2k$, donc $n^2 = 8k + 1$ et le reste vaut 1.

2 Voir ci-dessus.

11 La division euclidienne de n par 4 et 5 nous assure l'existence d'un entier q tel que :

$n = 4q + 3$ et $n = 5(q - 1) + 4$. On obtient donc $4q + 3 = 5(q - 1) + 4$; d'où $q = 4$.

Finalement, on a $n = 19$.

12 $1512 = 17b + r$ avec $0 \leq r < b$

et $1512 = 17 \times 88 + 16$, donc $b \leq 88$ et les possibilités sont :

$$\begin{cases} b = 88 \\ r = 16 \end{cases} ; \begin{cases} b = 87 \\ r = 33 \end{cases} ; \begin{cases} b = 86 \\ r = 50 \end{cases} ; \begin{cases} b = 85 \\ r = 67 \end{cases}.$$

13 **1** Les restes possibles sont 1 et 3.

2 Si $n = 2p + 1$,
 $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 2p(2p + 2) = 4p(p + 1)$;
 comme p ou $(p + 1)$ est pair, $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

⇒ **Savoir faire** Utiliser les congruences pour trouver des propriétés de divisibilité

14 **1** $2a \equiv 6(7)$ et $b^2 \equiv 1(7)$, donc $2a + b^2 \equiv 7(7)$,
 donc $2a + b^2 \equiv 0(7)$.

2 $a^2 \equiv 4(5)$ et $2b^2 \equiv 18 \equiv -2(5)$,
 donc $a^2 + 2b^2 \equiv 2(5)$: le reste est 2.

15 Soit n entier quelconque, les cinq restes possibles dans la division par 5 sont 0, 1, 2, 3 et 4, donc on a les cinq possibilités suivantes : $n \equiv 0(5)$; $n \equiv 1(5)$; $n \equiv 2(5)$; $n \equiv 3(5)$; $n \equiv 4(5)$.

1 On aura pour n^2 :
 $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0(5)$ ou $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1(5)$ ou $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4(5)$
 ou $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 4(5)$ ou $n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1(5)$. Les restes possibles dans la division de n^2 par 5 sont 0, 1 et 4.

2 On aura pour n^3 :

$n^3 \equiv 0^3 \equiv 0 (5)$ ou $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1 (5)$ ou $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 3 (5)$
ou $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 2 (5)$ ou $n^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 4 (5)$. Les
cinq restes possibles sont, comme pour n , 0, 1, 2, 3 et 4.

16 **1** Le reste est 12.

2 $1000 \equiv 12 \equiv -1 (13)$, donc $10^{3n} \equiv (-1)^n (13)$, donc
le reste est 1 si n est pair et 12 si n est impair.

3 Parmi les entiers n et $n+1$, l'un est pair et l'autre
impair, donc, avec la question **2** :

$$10^{3n+3} + 10^{3n} \equiv 1 + 12 \equiv 0 (13).$$

17 $35 \equiv 1 (17)$ et $84 \equiv 16 \equiv -1 (17)$,
donc $35^{228} + 84^{501} \equiv 1 - 1 \equiv 0 (17)$.

➔ Travaux pratiques

18 Le crible de Matijasevitch

1 Les entiers non traversés par les segments semblent
être les nombres premiers.

2 Les points A et B ne peuvent pas avoir la même
abscisse, donc la droite (AB) ne peut pas être parallèle à
l'axe des ordonnées.

$$m = \frac{b^2 - a^2}{-b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{-(b + a)} = a - b.$$

La droite (AB) a pour équation réduite $y = (a - b)x + p$;
or, A appartient à cette droite, donc $a^2 = (a - b)a + p$,
donc $p = ab$.

Les droites (AB) coupent l'axe des ordonnées aux points
de coordonnées $(0 ; ab)$.

Il existe une droite passant par P si, et seulement si,
 $p = ab$ avec a et b des entiers supérieurs ou égaux à 2,
c'est-à-dire p est composé ou non premier.

Conclusion : aucune droite (AB) ne passe par P si, et
seulement si, p est premier.

19 La clé d'un RIB et le code INSEE

Partie A

1 a. $100 \equiv 3 (97)$; $10^8 = 100^4 \equiv 3^4 \equiv 81 (97)$;
 $10^{13} = 10^8 \times 10^4 \times 10 \equiv 81 \times 9 \times 10 \equiv 15 (97)$;
 $10^{18} = 10^{13} \times 10^4 \times 10 \equiv 15 \times 9 \times 10 \equiv 89 (97)$.

Donc $100 \times S \equiv 89B + 15G + 81C_1 + 3C_2 (97)$.

b. $B = 30\,003$; $G = 1835$; $C_1 = 50$; $C_2 = 406\,322$,
donc :

$$100 \times S \equiv 89 \times 30\,003 + 15 \times 1835 + 81 \times 50 \\ + 3 \times 406\,322 \equiv 89 \times 30 + 15 \times 89 + 81 \times 50 + 3 \times 86 \\ \equiv 8\,313 \equiv 68 (97). \text{ Et } 97 - 68 = 29.$$

c. $B = 14\,506$; $G = 17$; $C_1 = 72\,815$; $C_2 = 523\,831$,
donc :

$$100 \times S \equiv 89 \times 14\,506 + 15 \times 17 + 81 \times 72\,815 \\ + 3 \times 523\,831 \equiv 89 \times 53 + 15 \times 17 + 81 \times 65 + 3 \times 31 \\ \equiv 10\,330 \equiv 48 (97). \text{ Et } 97 - 48 = 49. \text{ La clé est } 49.$$

2 a. $S = a_1 + 10 \times a_2 + \dots + 10^{k-1} \times a_k + \dots$
 $+ 10^{20} \times a_{21}$ et

$$S' = a_1 + 10 \times a_2 + \dots + 10^{k-1} \times \alpha + \dots + 10^{20} \times a_{21} ;$$

$$\text{donc } 100 \times S' \equiv 100 \times S + 10^{k+1} (\alpha - a_k).$$

b. Erreur non détectée $\Leftrightarrow 100 \times S' \equiv 100 \times S (97)$
 $\Leftrightarrow 10^{k+1} (\alpha - a_k) \equiv 0 (97) \Leftrightarrow 97 \text{ divise } 10^{k+1} (\alpha - a_k)$
 $\Leftrightarrow 97 \text{ divise } (\alpha - a_k)$, car 97 est premier et non présent
dans la décomposition de 10^{k+1} .

Comme $-9 \leq \alpha - a_k \leq 9$, si $\alpha - a_k \neq 0$, 97 ne divise pas
 $\alpha - a_k$ et l'erreur est détectée.

$$\mathbf{3} \quad S = a_1 + 10 \times a_2 + \dots + 10^{k-1} \times a_k + 10^k \times a_{k+1} \\ + \dots + 10^{20} \times a_{21} \text{ et}$$

$$S' = a_1 + 10 \times a_2 + \dots + 10^{k-1} \times a_{k+1} + 10^k \times a_{k+1} \\ + \dots + 10^{20} \times a_{21} ;$$

$$\text{donc : } 100 \times S' = 100 \times S - 10^{k+1} \times a_k - 10^{k+2} \\ \times a_{k+1} + 10^{k+1} \times a_{k+1} + 10^{k+2} \times a_k$$

$$= 100 \times S + 10^{k+1} (-a_k - 10a_{k+1} + a_{k+1} + 10a_k)$$

$$= 100 \times S + 9 \times 10^{k+1} (a_k - a_{k+1}).$$

De même que dans la question **2**, l'erreur est non
détectée si, et seulement si, 97 divise $(a_k - a_{k+1})$, car 97
ne figure pas dans la décomposition de $9 \times 10^{k+1}$.

Comme $-9 \leq a_k - a_{k+1} \leq 9$, si $a_k - a_{k+1} \neq 0$, 97 ne
divise pas $a_k - a_{k+1}$ et l'erreur est détectée.

Partie B

b. Pour utiliser la partie **A**, on peut écrire
 $A = 15\,907 \times 10^8 + 421\,871 \times 10^2 + 18$.

$$\text{D'où } A \equiv 15\,907 \times 81 + 421\,871 \times 3 + 18$$

$$\equiv 96 \times 81 + 18 \times 3 + 18 \equiv 7\,848 \equiv 88 (97).$$

La clé est donc $97 - 88 = 09$.

➔ Faire le point

23 **1** a. et c. **2** b. et c. **3** a. et c.
4 b. et c. **5** b. et c.

24 **1** a. **2** c. **3** b. **4** c. **5** a.

25 **1** Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Vrai. **6** Faux.

➔ Exercices d'application

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

26 **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

27 **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai. **5** Vrai.

28 **1** c. **2** a. et c. **3** b. et c.

29 **1** $s = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72$.

2 $t = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 14 + 20 + 28 + 35$
 $+ 70 + 140 = 336$.

$$\mathbf{3} \quad \frac{s}{t} = \frac{72}{336} = \frac{3}{14} = \frac{30}{140}.$$

30 $s = 1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 27 + 45 + 135 = 240$;

$$t = 1 + 3 + 7 + 9 + 13 + 21 + 39 + 63 + 91 + 117 + 273 + 819 = 1456 ;$$

$$\frac{s}{t} = \frac{240}{1456} = \frac{15}{91} = \frac{135}{819}.$$

31 $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs parmi lesquels il y a exactement un multiple de 3 et au moins un multiple de 2 ; ce produit est donc un multiple de 6.

32 $(2a + 5b) + (5a + 2b) = 7(a + b)$, donc :
si 7 divise $(2a + 5b)$,
alors 7 divise $7(a + b) - (2a + 5b) = (5a + 2b)$
et si 7 divise $(5a + 2b)$,
alors 7 divise $7(a + b) - (5a + 2b) = (2a + 5b)$.

33 $n \mid n + 8 \Leftrightarrow n \mid 8$, donc les solutions sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 et leurs opposés.

34 **1** Si 13 divise $7n + 4$,
alors 13 divise $2(7n + 4) - 13(n + 1) = n - 5$.
2 La réciproque est vraie : si 13 divise $n - 5$, alors 13 divise $7(n - 5) + 3 \times 13 = 7n + 4$.

35 **1** a divise $3(5b + 31) - 5(3b + 12) = 33$.
2 Les valeurs possibles de a sont donc 1 ; 3 ; 11 et 33.

36 **1** Si d divise a_n et b_n , alors d divise $9a_n - 2b_n$, c'est-à-dire d divise 125.

2 L'ensemble des diviseurs communs éventuels de a_n et b_n est inclus dans l'ensemble $\{-125, -25, -5, 1, 5, 25, 125\}$.

3 On remarque qu'avec $n = 501$ on a $a_{501} = 1013$ et $b_{501} = 4496$.
Or, ces deux entiers ne sont pas divisibles par 5, donc leurs seuls diviseurs communs sont -1 et 1 .

37 **1** d divise $2b_n - 9a_n = 17$.
2 Les diviseurs communs éventuels à a_n et b_n sont donc 1 ; 17 et leurs opposés.

3 $5117 = a_{2559}$ et $23035 = b_{2559}$;
par ailleurs, $5117 = 17 \times 301$ et $23035 = 17 \times 1355$.
Donc, avec la question **2**, les diviseurs communs à 5117 et 23035 sont 1, 17 et leurs opposés, donc leur PGCD est 17.

38 $\frac{11n-6}{3n+1}$ est un entier si, et seulement si, $(3n+1)$ divise $(11n-6)$.
Si $(3n+1)$ divise $(11n-6)$, alors $(3n+1)$ divise $11(3n+1) - 3(11n-6) = 29$; donc $3n+1 = 1$ ou $3n+1 = 29$; donc $n = 0$.

Réciproquement, si $n = 0$, $\frac{11n-6}{3n+1} = -6$ est un entier.
L'unique solution est donc $n = 0$.

39 **1 a.** 1 et b étant positifs, k aussi d'après la règle des signes. De plus, $k \neq 0$ sinon $k \times b = 0$.
b. $b \geq 2$, donc, k étant positif, $k \times b \geq 2k$;
comme $k \geq 1$, $2k \geq 2$. Finalement, $k \times b \geq 2$.

c. Comme $k \times b = 1$, d'après la question **b.**, $b < 2$; or, $b > 0$, donc $b = 1$.

d. 1 est donc le seul diviseur positif de 1 et par conséquent, les diviseurs de 1 sont 1 et -1 .

2 $a = 1 \times a$ et $a = (-1) \times (-a)$.

40 On raisonne par récurrence sur n entier naturel non nul.

Initialisation : le résultat est évident pour $n = 1$ et (on en aura besoin pour l'hérédité) a été prouvé dans le cours pour $n = 2$.

Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$; on suppose que l'entier a divise les entiers $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ et on considère des entiers $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$; par hypothèse de récurrence, a divise $B = (b_1 c_1 + \dots + b_n c_n)$.
La propriété est vraie pour $n = 2$, donc a divise :

$$B \times 1 + b_{n+1} c_{n+1} = (b_1 c_1 + \dots + b_n c_n + b_{n+1} c_{n+1}).$$

41 $\frac{13n-21}{3n+4}$ est un entier si, et seulement si, $(3n+4)$ divise $(13n-21)$.

Si $(3n+4)$ divise $(13n-21)$, alors $(3n+4)$ divise $13(3n+4) - 3(13n-21) = 115$; les diviseurs positifs de 115 étant 1 ; 5 ; 23 et 115, et n étant entier naturel, on obtient $n = 37$.

Réciproquement, $\frac{13 \times 37 - 21}{3 \times 37 + 4} = \frac{460}{115} = 4$.

L'unique solution est donc $n = 37$.

42 **1** Pour x et y non nuls,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5(x+y) = xy$$

$$\text{et } (x-5)(y-5) = 25 \Leftrightarrow xy = 5(x+y).$$

2 $25 = 1 \times 25 = 5 \times 5$,

$$\text{donc } (x-5)(y-5) = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 1 \\ y-5 = 25 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x-5 = 25 \\ y-5 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-5 = 5 \\ y-5 = 5 \end{cases}.$$

On obtient les couples solutions $(6; 30)$; $(30; 6)$; $(10; 10)$.

43 Initialisation : pour $n = 0$, $n^3 + 5n = 0$ et 6 divise 0.
Hérédité : on suppose que, pour un entier naturel n , 6 divise $n^3 + 5n$.

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6.$$

Le produit de deux entiers consécutifs est pair, donc $3n(n+1)$ est un multiple de 6 ; ainsi $(n+1)^3 + 5(n+1)$ est la somme de trois multiples de 6, donc un multiple de 6 lui-même.

Par récurrence, on conclut : pour tout entier naturel n , 6 divise $n^3 + 5n$.

44 $n^3 + 5n \equiv n^3 - n(6)$ et $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs parmi lesquels il y a exactement un multiple de 3 et au moins un multiple de 2 ; ce produit est donc un multiple de 6.

45 Initialisation : pour $n = 0$, $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7$ est un multiple de 7.

Hérédité : on suppose que, pour un entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.
 $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$
 $= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2})$
est la somme de deux multiples de 7, donc un multiple de 7.

2 Nombres premiers

- 46 1 Faux (2). 2 Faux (9). 3 Vrai.
4 Faux (2). 5 Faux (12 et 18).

- 47 1 c. 2 a. 3 b.

- 48 1 Vrai. 2 Vrai. 3 Faux (5).
4 Vrai. 5 Vrai. 6 Faux (16).

49

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- 50 1 Sont premiers 97, 271, 743.
2 $451 = 11 \times 41$; $537 = 2 \times 179$; $893 = 19 \times 47$;
 $11111 = 41 \times 271$.

- 51 $228 = 2^2 \times 3 \times 19$; $1210 = 2 \times 5 \times 11^2$;
 $3\,267 = 3^3 \times 11^2$; $14\,800 = 2^4 \times 5^2 \times 37$;
 $884\,058 = 2 \times 3 \times 7^2 \times 31 \times 97$.

- 52 1 $28 = 2^2 \times 7$; $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.
2 $28^2 = 2^4 \times 7^2$; $28 \times 126 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$;
 $126^3 = 2^3 \times 3^6 \times 7^3$; $2\,828 = 28 \times 101 = 2^2 \times 7 \times 101$.

- 53 Tous les exposants de la décomposition sont égaux à 1.

- 54 Tous les exposants de la décomposition sont des multiples de 3.

- 55 1 Sa décomposition est une puissance de 3.
2 $n = 3^4$.

- 56 1 a. « $n \% d = 0$ » signifie que n divise d .
b. On obtient à l'affichage 2, 2 et 7.
c. Ce programme donne les facteurs premiers d'un entier naturel quelconque n .

2

```
PROGRAM: FACPREM
: Prompt N
: 2 → D
: While D ≤ N
:   If fPart(N/D) = 0
:   Then
:     Disp D
:     N/D → D
:   Else
:     D + 1 → D
:   End
: End
```

- 57 1 Si p divise d alors p divise n , donc p est un des facteurs premiers de n .
2 Si $p_i^{\beta_i}$ est dans la décomposition de d il divise n , donc $\beta_i \leq \alpha_i$.
3 β_i peut être nul, car p_i peut ne pas figurer dans la décomposition de d .
4 Il y a $(\alpha_i + 1)$ choix possibles de l'exposant β_i pour tout entier i compris entre 1 et m .

- 58 Les carrés de nombres premiers ; p^2 avec p premier admet pour diviseurs positifs : 1, p et p^2 .
Remarque : un produit pq de deux nombres premiers distincts admet 4 diviseurs positifs : (1, p , q , pq).

- 59 Si $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ est premier, alors
 $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = a^2 - b^2 \end{cases}$; la première équation montre que a et b sont nécessairement consécutifs.

La réciproque est bien entendu fausse : par exemple, $a = 8$ et $b = 7$; $a^2 - b^2 = 15$ n'est pas premier.

- 60 1 $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ est un multiple de 4, car p est impair, donc $(p - 1)$ et $(p + 1)$ sont pairs.
2 Comme $p \geq 5$, p n'est pas un multiple de 3 ; or, $(p - 1)$, p , $(p + 1)$ sont trois entiers consécutifs, donc $(p - 1)$ ou $(p + 1)$ est un multiple de 3.
Avec la question 1, $(p - 1)(p + 1)$ est un multiple de 12, car 2^2 et 3 figurent dans sa décomposition.

- 61 1 $n = 2 \times 3$.
2 $n = 2^2 \times 3$ ou $n = 2 \times 3^2$.
3 $n = 2 \times 3^8$ ou $n = 2^2 \times 3^5$ ou $n = 2^5 \times 3^2$ ou $n = 2^8 \times 3$.

- 62 $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$;
on utilise les facteurs premiers les plus petits possibles, donc 2 et 3.
Après quelques essais, le plus petit est $2^6 \times 3^3 = 1728$.

- 63 1 Si n est un carré parfait, les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ intervenant dans sa décomposition en facteurs premiers sont tous pairs ; il s'en suit que les facteurs $(\alpha_1 + 1), (\alpha_2 + 1), \dots, (\alpha_m + 1)$ sont tous impairs. Leur produit, qui est le nombre de diviseurs de n (voir exercice 57) est donc impair.

2 La réciproque est vraie :

en effet, si $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$ est impair, alors tous les facteurs $(\alpha_1 + 1), (\alpha_2 + 1), \dots, (\alpha_m + 1)$ sont impairs, donc tous les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sont pairs.

64 1 L'instruction $\text{irem}(n, j)$ donne le reste de la division euclidienne de n par j .

2 Ce programme calcule dans $\mathbb{N}$ la somme des diviseurs positifs stricts d'un entier, il permet donc de savoir si un nombre est parfait (lorsque le résultat affiché est égal au nombre du départ).

3 Si le résultat est 1, le nombre est premier.

2	prgm(10)	
		8
3	prgm(7)	
		1
4	prgm(6)	
		6

65 1 Les diviseurs positifs de n sont 1 et n et $n > \sqrt{n}$, car $n \geq 2$.

2 a. Si m n'était pas premier, il aurait un diviseur m' tel que $1 < m' < m$.

Ainsi, m' serait un diviseur de n strictement inférieur à m et différent de 1, ce qui est en contradiction avec la définition de m .

b. m divise n , donc il existe un entier k tel que $n = mk$. Par définition de m , on a $1 < m \leq k < n$.

c. $m \leq k$, donc, en multipliant par m , $m^2 \leq n$ et par suite, $m \leq \sqrt{n}$.

Ceci contredit l'hypothèse initiale, donc, sous cette hypothèse, n est nécessairement premier.

66 1 Comme m n'est pas premier, il admet un diviseur k tel que $1 < k < m$. Il existe alors un entier q tel que $m = qk$ avec $1 < q < m$.

2 Par définition de m , q et k sont soit premiers, soit produits de nombres premiers.

3 Alors $m = qk$ est aussi produit de nombres premiers, d'où la contradiction.

67 1 Si p divise u_k , alors p divise $2^k \times u_k$, c'est-à-dire p divise v_k .

Réciproquement, si p divise v_k , alors soit $p = 2$ et, dans ce cas, il divise u_k , soit $p > 2$ et, dans ce cas, il figure dans la décomposition de u_k , donc il divise u_k .

2 a. $(u_k + 1)^2 = (2^k - 1)^2 = 2^{2k} - 2^{2k+1} + 1$
 $= 2^k(2^k - 2) + 1 = v_k + 1$.

b. Si p divise $u_k + 1$, alors p divise $(u_k + 1)^2$, c'est-à-dire, p divise $v_k + 1$.

Réciproquement, si p divise $v_k + 1$, il est présent dans la décomposition en facteurs premiers de $(u_k + 1)^2$, donc dans celle de $(u_k + 1)$, donc p divise $u_k + 1$.

3 Division euclidienne

68 1 Faux. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

69 1 b. et c. **2** a. et b.

70 1 $q = 29 ; r = 3$.

2 $q = 3 ; r = 65$.

3 $q = 9 ; r = 4$.

4 $q = 5 ; r = 5$.

5 $q = 41 ; r = 3$.

71 1 $q = -5 ; r = 1$.

2 $q = -33 ; r = 1$.

3 $q = -51 ; r = 11$.

4 $q = 51 ; r = 9$.

5 $q = -33 ; r = 22$.

72 1 $q = 23 ; r = 35$.

2 $q = 52 ; r = 12$, car $35 = 23 + 12$.

73 1 $256 = 15b + r$ avec $0 \leq r < b$.

$r < b$, donc $256 < 16b$, donc $b > 16$ et $r \geq 0$,

donc $b < \frac{256}{15}$.

Finalement, la seule possibilité est $b = 17$ et $r = 1$.

2 $12\,130 = 97b + r$ avec $0 \leq r < b$.

$r < b$, donc $12\,130 < 98b$, donc $b > \frac{12\,130}{98}$ et $r \geq 0$,

donc $b < \frac{12\,130}{97}$.

Les valeurs possibles de b sont 124 et 125 ; si $b = 124$, $r = 102$ et si $b = 125$, $r = 5$.

74 1 On note r' et q' le reste et le quotient cherchés.

Si $r = 0$, $-a = b \times (-q)$, donc $q' = -q$ et $r' = 0$.

Si $r \neq 0$, $-a = -bq - r = b(-q - 1) + b - r$

avec $0 < b - r < b$, donc $q' = -q - 1$ et $r' = b - r$.

2 On note r' et q' le reste et le quotient cherchés.

Si $r = 0$, $-a = -b \times q$, donc $q' = q$ et $r' = 0$.

Si $r \neq 0$, $-a = -bq - r = -b(q + 1) + b - r$

avec $0 < b - r < b$, donc $q' = q + 1$ et $r' = b - r$.

75 1	Eucl(13,5)	
		(2, 3)
5	Eucl(14,2)	
		(7, 0)
6	Eucl(25,7)	
		(3, 4)

2 Ce programme calcule le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b .


```

76 euclid(a,b) := {
  local q;
  q:=0
  si a>0 alors
    tantque b*q<=a faire q:=q+1; ftantque
    q:=q-1; r:=a-b*q; afficher q,r
  sinon
    a:=-a;
    tantque b*q<=a faire q:=q+1; ftantque
    r:=-a+b*q; q:=-q; afficher q,r
  fsi
}

```

4	euclid(20,9)	(2, 2)
5	euclid(-15,4)	(-4, 1)
6	euclid(-45,11)	(-5, 10)

4 Congruences dans $\mathbb{Z}$

77 1 Faux. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Faux. 5 Vrai.

78 1 Vrai. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Faux.
5 Faux (ex. : $a = 7$).

79 1 Vrai. 2 Faux. 3 Vrai. 4 Vrai.

80 1 a. et b. 2 b. et c. 3 a. et b. 4 c.

81 Il existe des entiers k et k' tels que $a - b = kn$ et $c - d = k'n$, donc
 $(a + c) - (b + d) = (a - b) - (c - d) = (k + k')n$
 et $ac - bd = a(c - d) + d(a - b) = (ak' + dk)n$.
 D'où $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ et $ac \equiv bd \pmod{n}$.

82 On raisonne par récurrence sur l'entier $p \geq 1$.
 Initialisation évidente.

Hérédité : on suppose que, pour un entier naturel $p \geq 1$,
 $a^p \equiv b^p \pmod{n}$; comme $a \equiv b \pmod{n}$ la propriété de compati-
 bilité avec la multiplication donne $a^p \times a \equiv b^p \times b \pmod{n}$,
 c'est-à-dire $a^{p+1} \equiv b^{p+1} \pmod{n}$.

83 1 $25a + 8b \equiv 25 \times 2 + 8 \times 5 \equiv 90 \equiv 0 \pmod{9}$.

2 $a^2 - b^2 \equiv 4 - 25 \equiv -21 \equiv -3 \pmod{9}$.

Donc il existe un entier k tel que $a^2 - b^2 + 3 = 9k$.
 Alors $a^2 - b^2 = 3(3k - 1)$ est un multiple de 3.

84 1 2 On conjecture que 6 semble diviser $P(x)$ pour
 tout entier x .

3 $P(x) = x(x^2 + 3x + 2)$; $x^2 + 3x + 2$ a pour racines
 -2 et -1 , donc $P(x) = x(x + 1)(x + 2)$.

4 $x(x + 1)(x + 2)$ est le produit de trois entiers consé-
 cutifs parmi lesquels il y a exactement un multiple de 3
 et au moins un multiple de 2 ; ce produit est donc un
 multiple de 6.

85 1 Pour a le reste est 3, pour b le reste est 2 et pour
 c le reste est 4.

2 Pour a le reste est 1, pour b le reste est 8 et pour c le
 reste est 9.

86 $10 \equiv 1 \pmod{3}$ et $10 \equiv 1 \pmod{9}$, donc, pour tout entier
 $n \geq 1$, $10^n \equiv 1 \pmod{3}$ et $10^n \equiv 1 \pmod{9}$; d'où les critères de
 divisibilité par 3 et par 9.

87 En utilisant les congruences :

$9 \equiv 2 \pmod{7}$, donc :

$$2 \times 9^n - 9 \times 2^n \equiv 2 \times 2^n - 2 \times 2^n \equiv 0 \pmod{7}.$$

En utilisant un raisonnement par récurrence :

initialisation : si $n = 0$, $2 \times 9^n - 9 \times 2^n = 2 - 9 = -7$
 est divisible par 7 ;

hérédité : on suppose que, pour un entier naturel n ,
 $2 \times 9^n - 9 \times 2^n$ est divisible par 7 ;

$$2 \times 9^{n+1} - 9 \times 2^{n+1} = 2 \times 9 \times 9^n - 9 \times 2 \times 2^n$$

$= 2(2 \times 9^n - 9 \times 2^n) + 7 \times 2 \times 9^n$ est la somme de deux
 multiples de 7, donc est divisible par 7.

88 1	A	B
	n	An
	0	2
	1	10
	2	52
	3	280
	4	1552
	5	8800
	6	50752
	7	296320
	8	1745152
	9	10339840

On conjecture que A_n semble divisible par 5 lorsque n
 est impair.

2 $6 \equiv 1 \pmod{5}$ et $4 \equiv -1 \pmod{5}$, donc $A_n \equiv 1 + (-1)^n \pmod{5}$;

si n est pair, $1 + (-1)^n = 2$ et si n est impair,
 $1 + (-1)^n = 0$, d'où le résultat.

89 1 $5^3 \equiv 125 \equiv 6 \pmod{17}$, donc $5^{3n} \equiv 6^n \pmod{17}$,
 donc $5^{3n} - 6^n \equiv 0 \pmod{17}$: le reste est 0.

2 $39 \equiv 4 \pmod{7}$, donc $39^{60} \equiv 4^{60} \pmod{7}$; $4^{60} \equiv 16^{30}$
 et $16^{30} \equiv 2^{30} \pmod{7}$; $2^{30} = 8^{10}$ et $8^{10} \equiv 1^{10} \pmod{7}$.

Finalement, $39^{60} \equiv 1 \pmod{7}$: le reste est 1.

3 $2012^{2012} \equiv 10^{2012} \pmod{11}$; $10^{2012} = 100^{1006}$
 et $100^{1006} \equiv 1^{1006} \pmod{11}$.

Finalement, $2012^{2012} \equiv 1 \pmod{11}$: le reste est 1.

90 1 Par 5 le reste est 1, par 9 le reste est 7 et par 11 le
 reste est 1.

2 Par 5 et 11, le reste est 1 ; par 9, le reste est 4, car :

$$7^8 = 49^4 \equiv 4^4 \equiv 16^2 \equiv 7^2 \equiv 4 \pmod{9}.$$

91 1 $n^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{7}$, donc $n^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ et
 $n^{3p} - 1 \equiv 1^p - 1 \equiv 0 \pmod{7}$: pour tout entier naturel p , le
 reste de la division euclidienne de $n^{3p} + 1$ par 7 est 0.

2 $n^3 \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv -1 \pmod{7}$, donc $n^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ et
 $n^{3p} + 1 \equiv (-1)^p + 1 \pmod{7}$: pour tout entier naturel pair p ,

le reste de la division euclidienne de $n^{3p} + 1$ par 7 est 2 et pour tout entier naturel impair p , le reste de la division euclidienne de $n^{3p} + 1$ par 7 est 0.

92 **1** Il semble que 1, 2, 4, 5, 10 et 20 sont les seules valeurs telles que k divise N_k .

2 Première solution :

$$\frac{N_k}{k} = k + 1 + \frac{20}{k}, \text{ donc } k \mid N_k \Leftrightarrow k \mid 20.$$

Seconde solution :

$$k \mid N_k \Leftrightarrow N_k \equiv 0(k) \Leftrightarrow 20 \equiv 0(k) \Leftrightarrow k \mid 20.$$

93 **1** Les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2 En multipliant par 3, on obtient comme restes possibles 0, 3, 6, 2, 5, 1 et 4 (au final les mêmes restes que pour x).

3 D'après les calculs de la question **2** :

$3x \equiv 5(7) \Leftrightarrow x \equiv 4(7)$; les solutions sont donc les entiers de la forme $7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

94 **1** Les restes possibles sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

2 Les restes possibles sont 0, 1, 4 et 7.

3 $x^2 + 2 \equiv 0(9) \Leftrightarrow x^2 \equiv 7(9)$ et, d'après la question **1**, $x^2 \equiv 7(9) \Leftrightarrow x \equiv 4(9)$ ou $x \equiv 5(9)$.

95 **1** $7y^2 \equiv 0(7)$, donc, si le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution, alors $x^2 \equiv 3(7)$.

2 Les restes possibles sont 0, 1, 2 et 4.

3 3 n'étant pas un des restes possibles, l'équation n'a pas de solution.

➔ Prépa Bac

Exercices guidés

96 **1** Par 2 : aucun ; par 3 : 111, 111 111, 111 111 111 ; par 5 : aucun ; par 9 : 111 111 111.

2 Un rep-unit étant impair, il n'est pas divisible par 2 et se terminant par le chiffre 1 n'est pas divisible par 5.

3 Il semble que N_k est divisible par 3 si, et seulement si, k est divisible par 3 et que N_k est divisible par 9 si, et seulement si, k est divisible par 9.

Preuve : k est la somme des chiffres de N_k , donc les critères de divisibilité par 3 et par 9 justifient ces conjectures.

4 a.

Dernier chiffre de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b. $(10p + 1)^2 = 100p^2 + 20p + 1 \equiv 1(20)$

et $(10p - 1)^2 = 100p^2 - 20p + 1 \equiv 1(20)$.

c. On peut utiliser la piste de résolution ou raisonner ainsi :

si $k > 2$, $N_k = 11 + 100 \times N_{k-2} \equiv 11(20)$,

car $100 \equiv 0(20)$ et $N_2 = 11 \equiv 11(20)$. Le reste est donc 11.

d. Si $N_k = n^2$, alors, d'après la question **4 a.**, le chiffre des unités de n est 1 ou 9.

Alors, d'après la question **4 b.**, $N_k \equiv 1(20)$.

Alors, d'après la question **4 c.**, la seule possibilité est $k = 1$, qui convient, car $N_1 = 1 = 1^2$.

97 **1** Voir exercice **83**.

2 a. $3^0 = 1 \equiv 1(7)$; $3^1 = 3 \equiv 3(7)$; $3^2 = 9 \equiv 2(7)$;

$3^3 = 3^2 \times 3 \equiv 6(7)$; $3^4 = 3^2 \times 3^2 \equiv 4(7)$;

$3^5 = 3 \times 3^4 \equiv 12 \equiv 5(7)$;

$3^6 = 3 \times 3^5 \equiv 15 \equiv 1(7)$.

b. $3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1) \equiv 3^n(1 - 1) \equiv 0(7)$.

Donc $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

On en déduit que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division par 7.

c. $3^{2012} = 3^{335 \times 6 + 2} \equiv 3^2 \equiv 2(7)$; le reste est 2.

3 $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$; $7 \mid u_n \Leftrightarrow 7 \mid 2u_n$ (l'implication est évidente dans un sens et, pour l'autre sens on utilise le fait que, si 7 est dans la décomposition en facteurs premiers de $2u_n$, alors il est dans celle de u_n).

Ainsi : $7 \mid u_n \Leftrightarrow 7 \mid (3^n - 1) \Leftrightarrow 3^n \equiv 1(7) \Leftrightarrow n$ est un multiple de 6.

98 **1** Si $n = 2k + 1$ avec k entier,

$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$; k ou $(k + 1)$ est pair, donc $4k(k + 1)$ est un multiple de 8, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1(8)$.

2 Si n est pair, alors $n = 2k$ avec k entier, donc $n^2 = 4k^2$. Si k est pair, k^2 aussi, donc $n^2 \equiv 0(8)$.

Si k est impair, $k^2 \equiv 1(8)$ d'après la question **1**, donc $n^2 \equiv 4(8)$.

3 a. D'après la question **1** $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 + 1 + 1(8)$, donc le reste est 3.

b. D'après les questions **1** et **2**, le reste dans la division euclidienne par 8 d'un carré est 1, 0 ou 4. Donc, avec le résultat de la question **3 a.** $a^2 + b^2 + c^2$ ne peut pas être un carré.

Exercices d'entraînement

99 **1** Vrai :

Reste de la division euclidienne de a^2 par 4	0	1	2	3
Reste de la division euclidienne de a par 4	0	1	0	1

2 Faux :

Reste de la division euclidienne de x par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de x^2 par 5	0	1	4	4	1
Reste de la division euclidienne de $x^2 + x + 3$ par 5	3	0	4	0	3

3 Vrai :

401 est premier, donc :

$$(x - y)(x + y) = 401 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 401 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 201 \\ y = 200 \end{cases}$$

100 **1** $67 = 15 \times 4 + 7$.

2 $7^0 = 1 \equiv 1(15)$; $7^1 = 7 \equiv 7(15)$; $7^2 = 49 \equiv 4(15)$;

$$7^3 \equiv 7 \times 4 \equiv 13(15); 7^4 \equiv 4 \times 4 \equiv 1(15).$$

Le reste de la division euclidienne de 7^n par 15 est donc 1 si $n = 4k$, 7 si $n = 4k + 1$, 4 si $n = 4k + 2$ et 13 si $n = 4k + 3$, avec $k \in \mathbb{N}$.

3 $67 \equiv 7(15)$, donc $67^n - 1 \equiv 7^n - 1(15)$. D'après la question **1**, $67^n - 1$ est divisible par 15 si, et seulement si, $n = 4k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

101 **1** $u_n = 23 + 13n$; un tableau de valeurs de $\frac{u_n}{6}$ donne un résultat entier pour $n = 1; 7; 13; 19; \dots$

On conjecture donc que u_n semble divisible par 6 si, et seulement si, $n \equiv 1(6)$.

2 $23 \equiv -1(6)$ et $13 \equiv 1(6)$, donc :

$$u_n \equiv 0(6) \Leftrightarrow -1 + n \equiv 0(6) \Leftrightarrow n \equiv 1(6).$$

102 **1** $v_n = 13 \times 5^n$ et $13 \times 5^n \equiv 1 \times 1^n \equiv 1(4)$; le reste est donc 1.

2 a. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 25u_n - 36$,
or, $25u_n - 36 \equiv 1u_n - 0 \equiv u_n(4)$.

b. On raisonne par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, $2u_n = 28$

et $5^{n+2} + 3 = 25 + 3 = 28$.

Hérédité : on suppose que, pour un entier naturel n ,

$$2u_n = 5^{n+2} + 3;$$

$$2u_{n+1} = 10u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 3.$$

Par récurrence on conclut : pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

c. Si 3 divisait u_n , alors 3 diviserait aussi $2u_n - 3$; or, $2u_n - 3 = 5^{n+2}$ n'est pas divisible par 3.

Conclusion : aucun terme de la suite (u_n) n'est divisible par 3.

103 **1 a.** Supposons a pair, alors $9 = 2^n - a^2$ est impossible, car la différence de deux entiers pairs est paire.

D'où, si a existe, a est impair.

b. Il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$, donc si a est solution, on aura : $9 + 1 + 4k + 4k^2 = 2^n$, c'est-à-dire $4k^2 + 4k + 10 = 2^n$.

Or, $4k^2 + 4k + 10 \equiv 2(4)$ et $2^n \equiv 0(4)$ puisque $n \geq 4$, donc l'équation n'a pas de solution.

2 a. $3 \equiv -1(4)$, donc $3^n \equiv (-1)^n(4)$.

Si n est pair, on aura $3^n \equiv 1(4)$; si n est impair, on aura $3^n \equiv -1(4)$ ce qui équivaut à $3^n \equiv 3(4)$.

b. Si a est impair, son carré est impair et comme 9 est impair, on aura $9 + a^2$ pair. C'est impossible, car 3^n est impair.

Donc a est pair, il existe un entier k tel que $a = 2k$.

On a alors $9 + a^2 = 9 + 4k^2 \equiv 1(4)$.

Si l'équation a une solution, on doit avoir $3^n \equiv 1(4)$ ce qui est le cas n pair d'après la question précédente.

$$\mathbf{c.} \quad 3^n - a^2 = 9 \Leftrightarrow (3^p)^2 - a^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (3^p + a)(3^p - a) = 9.$$

Comme les diviseurs positifs de 9 sont 1, 3 et 9 et que les deux facteurs sont distincts, la seule possibilité est $3^p - a = 1$ et $3^p + a = 9$, donc en sommant, $2 \times 3^p = 10$ ou bien $3^p = 5$, ce qui est impossible. Pas de solution dans ce cas.

3 a. Si n est impair, alors on a $n = 2k + 1$, donc $5^n = 5 \times 5^{2k}$.

Or, $5^2 \equiv 1(3)$, donc $5^{2k} \equiv 1(3)$ et finalement $5^n \equiv 5(3)$, donc $5^n \equiv 2(3)$.

L'entier a est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, donc a^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3 avec 9 congru à 0 modulo 3.

D'où $9 + a^2$ est congru à 0 ou 1 modulo 3. Impossible d'avoir $9 + a^2 = 5^n$.

$$\mathbf{b.} \quad 5^n - a^2 = 9 \Leftrightarrow (5^p)^2 - a^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (5^p + a)(5^p - a) = 9.$$

La seule possibilité est $5^p - a = 1$ et $5^p + a = 9$, donc, en sommant, $2 \times 5^p = 10$ ou bien $5^p = 5$ ce qui est possible pour $p = 1$. Donc $n = 2$ et $a = 4$; c'est la seule solution dans ce cas.

104 Partie A

1 $34 + 43 = 77 = 7 \times 11$; $57 + 75 = 132 = 12 \times 11$;
 $93 + 39 = 132 = 12 \times 11$.

2 $x + y = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$.

3 $x = d + 10c + 100b + 1000a$; comme $10 \equiv -1(11)$,
 $x \equiv d - c + b - a(11)$.

4 $-a + b - b + a = 0 \equiv 0(11)$.

Partie B

1 $10 \equiv -1(11)$, donc, si k est pair $10^k \equiv 1(11)$ et si k est impair $10^k \equiv -1(11)$; d'où le résultat.

2 $6 - 1 + 8 - 6 + 2 - 9 + 6 - 7 + 8 - 4 + 7 - 3$
 $+ 5 - 1 = 11$,

donc, selon le critère établi en question **1**, cet entier est divisible par 11.

3 On cherche n sous la forme $n = \overline{abcd}$ avec $a \neq 0$ tel que $\begin{cases} d - c + b - a \text{ multiple de } 11 \\ a + b + c + d = 11 \end{cases}$; la première condition s'écrit $d - c + b - a \in \{-11; 0; 11\}$.

$\begin{cases} d - c + b - a = -11 \\ a + b + c + d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d = 0 \\ a + c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = d = 0 \\ a + c = 11 \end{cases}$;
d'où les solutions 2 090 ; 3 080 ; 4 070 ; 5 060 ; 6 050 ; 7 040 ; 8 030 ; 9 020.

$\begin{cases} d - c + b - a = 0 \\ a + b + c + d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(b + d) = 11 \\ 2(a + c) = 11 \end{cases}$; impossible.

$\begin{cases} d - c + b - a = 11 \\ a + b + c + d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d = 11 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d = 11 \\ a = c = 0 \end{cases}$; impossible, car $a \neq 0$.

105 **1** $n = 100a + 10b + c \equiv 2a + 3b + c(7)$,

car $100 = 7 \times 14 + 2 \equiv 2(7)$.

2 $m = 10a + b - 2c \equiv 3a + b - 2c(7)$.

3 $n - 3m \equiv 2a + 3b + c - 3(3a + b - 2c)(7)$

$$\equiv -7a + 7c \equiv 0(7).$$

$$m + 2n \equiv 3a + b - 2c + 2(2a + 3b + c)(7)$$

$$\equiv 7a + 7b \equiv 0(7).$$

4 Si $m \equiv 0(7)$, comme $n \equiv 3m(7)$, $n \equiv 0(7)$;

réciroquement, si $n \equiv 0(7)$, comme $m \equiv -2n(7)$, $m \equiv 0(7)$.

5 Le résultat de la question **4** prouve le critère énoncé.

Reste de la division euclidienne de x par 6	0	1	2	3	4	5
Reste de la division euclidienne de x^2 par 6	0	1	4	3	4	1
Reste de la division euclidienne de $x^2 + x + 1$ par 6	1	3	1	1	3	1

Il n'y a pas de solution.

107

1 Initialisation : le point de coordonnées $(1; 8)$ appartient à la droite d'équation $5x - y + 3 = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , le point $(x_n; y_n)$ appartient à la droite et on montre que le point de coordonnées $(x_{n+1}; y_{n+1})$ appartient à la droite.

$$\begin{aligned} 5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 &= 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \frac{20}{3}x_n - \frac{8}{3}y_n - 5 + 3 \\ &= 5x_n - y_n + 3 = 0. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a montré que tous les points $(x_n; y_n)$ appartiennent à la droite d'équation $5x - y + 3 = 0$.

$$x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \text{ or } y_n = 5x_n + 3, \text{ donc :}$$

$$x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}(5x_n + 3) + 1 = 4x_n + 2.$$

2 a. Initialisation : $x_0 = 1$ est un entier.

Hérédité : supposons pour un entier naturel n , arbitrairement choisi, que x_n est un entier, montrons que x_{n+1} est un entier.

4 et 2 sont des entiers, et x_n est un entier, donc $4x_n + 2$ est un entier, c'est-à-dire x_{n+1} est un entier.

Par récurrence, on a montré que tous les x_n sont des entiers.

b. Comme $y_n = 5x_n + 3$ et x_n entier, on a également y_n entier.

3 a. Si x_n est divisible par 3, alors $5x_n + 3 \equiv 0(3)$, donc $y_n \equiv 0(3)$.

Si $y_n \equiv 0(3)$, alors $5x_n \equiv 0(3)$, donc x_n est divisible par 3.

b. Si un entier premier p divise x_n et y_n , alors p divise $y_n - 5x_n$, c'est-à-dire $p \mid 3$, donc $p = 3$.

4 a. Initialisation : $x_0 = 1$ la propriété est vraie.

Hérédité : supposons pour un entier naturel n , arbitrairement choisi que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$ et montrons que $x_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2)$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4x_n + 2 = \frac{4}{3}(4^n \times 5 - 2) + 2 \\ &= \frac{1}{3} \times 4^{n+1} \times 5 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4^{n+1} \times 5 - 2). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a montré la propriété pour tout entier naturel n .

b. Comme x_n est un entier, l'entier $4^n \times 5 - 2$ est divisible par 3.

108

Partie A

1 $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 \equiv -1(4)$.

2 a. $n = 3$.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

b. La somme de trois carrés peut donc être congrue modulo 8 à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mais jamais à 7, donc on ne peut avoir dans ce cas $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(8)$.

Partie B

1 Si $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(2^n)$, alors il existe k tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n k - 1$ ce qui est un entier naturel impair.

Si x, y et z sont pairs, leurs carrés également et $x^2 + y^2 + z^2$ sera pair.

Si deux sont pairs et un impair, la parité des carrés étant la même, on aura $x^2 + y^2 + z^2$ impair.

Si l'un est pair et les deux autres impairs, on aura $x^2 + y^2 + z^2$ pair.

Si les trois sont impairs, alors $x^2 + y^2 + z^2$ sera impair.

2 a. On suppose x et y pairs, z impair.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4c + 1 \equiv 1(4).$$

b. On a donc $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(2^n)$

$$\text{et } x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1(4),$$

$$\text{c'est-à-dire } x^2 + y^2 + z^2 = 2^n k - 1 = 4k' + 1,$$

avec k et k' entiers naturels. Comme $n \geq 3$, la somme des carrés s'écrit sous la forme $4K - 1$ et sous la forme $4k' + 1$. C'est impossible, car alors on aurait $2(K - k') = 1$ avec K et k' entiers.

Il n'y a pas de solution dans ce cas.

3 On suppose que x, y et z sont impairs, et on pose $x = 2a + 1, y = 2b + 1, z = 2c + 1$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 + 4c^2 + 4c + 1 \\ &= 4[(a^2 + a) + (b^2 + b) + (c^2 + c)] + 3. \end{aligned}$$

Or, les entiers $(a^2 + a); (b^2 + b); (c^2 + c)$ sont pairs puisque ce sont les produits de deux entiers consécutifs, par exemple, $a^2 + a = a(a + 1)$. Donc $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 3$.

Comme on a également $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(2^n)$, on a aussi $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n k' - 1 = 8K' - 1$ puisque $n \geq 3$. Ainsi, on doit avoir $8k + 3 = 8K' - 1$ ce qui équivaut à $2(K' - k) = 1$ ce qui est impossible. Il n'y a pas de solution dans ce cas.

109

1 Les nombres de Mersenne qui sont premiers sont : 3, 7, 31, 127, 8191.

2 a. $1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1}$ pour a distinct de 1.

$$\text{D'où } a^k - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}), \text{ donc } (a - 1) \mid (a^k - 1).$$

b. Si $d \mid n$, alors il existe un entier k tel que $n = kd$.

D'après la question précédente, $(2^d - 1) \mid ((2^d)^k - 1)$ ce qui signifie $(2^d - 1) \mid (2^{kd} - 1)$ ou bien $(2^d - 1) \mid M_n$.

3 Si n est non premier, alors il existe $k \geq 2$ et $d \geq 2$ tels que $n = kd$ et le nombre M_n est divisible par $(2^d - 1)$, différent de 1 et M_n , donc n'est pas premier. Par contraposée, si M_n est premier, alors n est premier.

La réciproque est fautive, car 11 est premier ;

or, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas premier.

110 **1** Comme n n'est pas premier, il existe des entiers k et d tels que $n = kd$; $1 < k < n$; $1 < d < n$. De plus n étant impair, k et d sont impairs (sinon kd serait pair).

2 a. $a_{i,1} = 4 + 3(i-1) = 3i + 1$.

b. La raison est $r_i = 3 + 2(i-1) = 2i + 1$.

c. $a_{i,j} = a_{i,1} + (j-1) \times r_i = 3i + 1 + (j-1)(2i+1)$
 $= 3i + 1 + 2ij + j - 2i - 1 = i + j + 2ij$.

d. $(2i+1)(2j+1) = 4ij + 2i + 2j + 1 = 2a_{i,j} + 1$.

e. Si k figure dans le tableau, le résultat précédent montre clairement que $2k+1$ n'est pas premier.

Réciproquement, si k ne figure pas dans le tableau, alors $2k+1$ est premier sinon, d'après la question **1** $2k+1$ serait le produit de deux entiers impairs autres que 1 et $2k+1$; ces deux entiers impairs seraient de la forme $2i+1$ et $2j+1$ avec $i \geq 1$ et $j \geq 1$, donc $k = a_{i,j}$ serait dans le tableau.

➔ Problèmes

111 **1 a.** $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ et $284 = 2^2 \times 71$ sont de la forme A et B avec $n = 2$.

b. Les diviseurs positifs de 1 184 sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 37 ; 74 ; 148 ; 296 ; 592 ; 1 184 et leur somme est 2 394.

Les diviseurs positifs de 1 210 sont 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 11 ; 22 ; 55 ; 110 ; 121 ; 242 ; 605 ; 1 210 et leur somme est 2 394.

Donc 1 184 et 1 210 sont amiables.

$1184 = 2^5 \times 37$ et $1210 = 2 \times 5 \times 11^2$, donc ils ne sont pas de la forme A et B .

c. Pour $n = 4$, on a $a = 23$; $b = 47$; $c = 1151$ qui sont premiers et donnent la paire de nombres amiables $A = 17\,296$; $B = 18\,416$.

d. Pour $n = 7$, on a $a = 191$; $b = 383$; $c = 73\,727$ qui sont premiers et donnent la paire de nombres amiables $A = 9\,363\,584$; $B = 9\,437\,056$.

2 a. Le nombre de diviseurs positifs de B est $(n+1) \times 2$ et les diviseurs proposés sont distincts et au nombre de $2(n+1)$.

b. A possède $(n+1) \times 2 \times 2 = 4(n+1)$ diviseurs positifs ; ce sont les entiers :

$1 ; 2 ; 2^2 ; \dots ; 2^n ; a ; 2a ; 2^2a ; \dots ; 2^na ; b ; 2b ; 2^2b ; \dots ; 2^nb ; ab ; 2ab ; 2^2ab ; \dots ; 2^nab$.

c. $S_B = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)(1 + c)$
 $= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}(1 + c) = (2^{n+1} - 1)(1 + c)$.

d. $S_A = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)(1 + a + b + ab)$
 $= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}(1 + a + b + ab)$
 $= (2^{n+1} - 1)(1 + a + b + ab)$.

e. $1 + a + b + ab = 1 + 3 \times 2^{n-1} - 1 + 3 \times 2^n - 1$
 $+ (3 \times 2^{n-1} - 1)(3 \times 2^n - 1)$
 $= 3 \times 2^{n-1} + 3 \times 2^n - 1 + 9 \times 2^{2n-1} - 3 \times 2^{n-1}$
 $- 3 \times 2^n + 1$
 $= 9 \times 2^{2n-1} = c + 1$.

Ainsi, $S_A = S_B$ et A et B sont amiables.

112 **1 a.** Notons $q = 2^p - 1$; on suppose que q est premier, donc $2^{p-1} \times q$ est la décomposition en facteurs premiers de N , donc N admet $p \times 2$ diviseurs : 1 ; 2 ; 2² ; ... ; 2^{p-1} et $q ; 2q ; 2^2q ; \dots ; 2^{p-1}q$.

b. La somme des diviseurs positifs de N autres que lui-même est :

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1} + q + 2q + 2^2q + \dots + 2^{p-2}q$$

$$= \frac{2^p - 1}{2 - 1} + q \times \frac{2^{p-1} - 1}{2 - 1} = 2^p - 1 + (2^p - 1)(2^{p-1} - 1)$$

$$= (2^p - 1) \times 2^{p-1} = N. \text{ Donc } N \text{ est parfait.}$$

2 a. Les diviseurs de N sont 1 ; 2 ; 2² ; ... ; 2ⁿ et, pour tout diviseur $d \neq 1$ de q ; $d ; 2d ; 2^2d ; \dots ; 2^nd$; donc $s(N) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) \times s(q)$.

Comme $s(N) = 2N$ et $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, $2N = (2^{n+1} - 1) \times s(q)$.

b. $2N = (2^{n+1} - 1) \times s(q)$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1}q = (2^{n+1} - 1) \times (\sigma + q)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (2^{n+1} - 1)\sigma - q \Leftrightarrow q = \sigma(2^{n+1} - 1).$$

c. D'après la question précédente, σ divise q et $\sigma < q$ (car $n \geq 1$), donc σ est un des termes de la somme égale à σ , donc σ est le seul terme de cette somme, donc $\sigma = 1$. Alors, les diviseurs de q sont 1 et q , donc q est premier.

L'égalité de la question **2 b.** s'écrit : $q = (2^{n+1} - 1)$. D'où $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

Conclusion : tous les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $2^p - 1$ premier.

113 **1** Les valeurs supérieures à 3 non traversées par la droite $\mathcal{D}$ semblent correspondre aux entiers premiers (autres que 2).

2 $A\left(a ; \frac{k}{a}\right)$ et $B\left(-b ; -\frac{k}{b}\right)$.

3 $\overrightarrow{AB}\left(\begin{matrix} -b \\ -\frac{k}{b} \end{matrix} ; \begin{matrix} -a \\ -\frac{k}{a} \end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix} 1 \\ \alpha \end{matrix}\right)$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow 1(-b - a) + \alpha\left(-\frac{k}{b} - \frac{k}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{a + b}{-\frac{k}{b} - \frac{k}{a}} = (a + b) \times \frac{ab}{-k(a + b)} = -\frac{ab}{k}.$$

4 $\vec{v}\left(\begin{matrix} 1 \\ \alpha \end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur $-\frac{ab}{k}$; alors l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $y = -\frac{ab}{k}x + p$; $P(k ; 0)$ appartient à $\mathcal{D}$, donc $p = ab$; d'où $\mathcal{D} : y = -\frac{ab}{k}x + ab$.

5 $\mathcal{D}$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; ab)$.

Tout entier non premier supérieur à 3 s'écrit sous la forme ab avec a et b deux entiers tels que $2 \leq a$ et $2 \leq b$ et tout entier premier ne s'écrit pas sous cette forme, donc les ordonnées non traversées par la droite $\mathcal{D}$ sont exactement les nombres premiers supérieurs à 3.

114 En attribuant l'exposant zéro aux nombres premiers qui ne figurent pas dans sa décomposition, n aura une écriture de la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_A^{\alpha_A}$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A$ sont des entiers naturels éventuellement nuls.

$$2 \quad n = p_1^{2a_1 + b_1} \times p_2^{2a_2 + b_2} \times \dots \times p_A^{2a_A + b_A} \\ = k^2 \times p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_A^{b_A} \text{ en posant } k = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_A^{a_A}.$$

3 a. $k^2 \leq n \leq N$.

b. On a deux choix possibles pour chaque b_i (0 ou 1), donc il y a 2^A écritures possibles pour $p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_A^{b_A}$.

c. $k \leq \sqrt{N}$, donc, pour écrire n , il y a au plus $\sqrt{N}$ choix possibles pour k .

Le nombre d'écritures possibles de n est donc inférieur ou égal à $\sqrt{N} \times 2^A$.

Or, par définition de n , n peut prendre N valeurs (1 ; 2 ; ... ; N).

Ainsi, $N \leq \sqrt{N} \times 2^A$, ou encore $\sqrt{N} \times 2^A$, ou encore $N \leq 2^{2A}$.

4 On vient de montrer que s'il y avait un nombre fini d'entiers naturels premiers, alors il y aurait un nombre fini d'entiers naturels !

115 **1** Si $n = p_1^{2a_1} \times p_2^{2a_2} \times \dots \times p_k^{2a_k}$,

alors $n = (p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k})^2$; donc, si n n'est pas un carré parfait, dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers il existe un nombre premier p dont l'exposant est impair.

2 a. L'exposant de p est impair dans la décomposition de n et paire (éventuellement nulle) dans celle de b^2 ; donc, comme lors du produit les exposants s'additionnent, l'exposant de p est impair dans la décomposition de nb^2 .

b. Ils sont tous pairs.

c. D'après les questions **a.** et **b.**, l'égalité $nb^2 = a^2$ est impossible, donc l'égalité $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ également.

3 Si l'entier n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

116 **1 a.** Soit la décomposition en facteurs premiers : $a = q_1^{\alpha_1} \times \dots \times q_k^{\alpha_k}$. Le nombre pa admet comme décomposition en facteurs premiers $p \times q_1^{\alpha_1} \times \dots \times q_k^{\alpha_k}$, où p est distinct de tous les q_i . Si on appelle N le nombre de diviseurs de a , d'après l'exercice **57**, le nombre de diviseurs de pa est égal à $(1 + 1)N = 2N$.

b. Les diviseurs de pa sont $d_1 ; \dots ; d_m ; pd_1 ; \dots ; pd_m$.

c. $S_{pa} = d_1 + \dots + d_m + pd_1 + \dots + pd_m = S_a + pS_a \\ = (1 + p)S_a$.

2 Si a et b sont amis, alors $\frac{a}{b} = \frac{S_a}{S_b}$; or, $S_{pa} = (1 + p)S_a$

et $S_{pb} = (1 + p)S_b$, donc $\frac{pa}{pb} = \frac{a}{b} = \frac{S_a}{S_b} = \frac{S_{pa}}{S_{pb}}$, donc pa et pb sont amis.

3 a. Il suffit de multiplier les deux nombres amis par un nombre premier p qui n'intervient dans aucune décomposition en facteurs premiers des deux nombres. Comme les facteurs premiers communs sont en nombre fini et qu'il y a une infinité de nombres premiers, il y a une infinité de choix possibles pour p .

b. $\{11 \times 30 ; 11 \times 140\} ; \{13 \times 30 ; 13 \times 140\} ; \{17 \times 30 ; 17 \times 140\}$ sont des paires de nombres amis.

117 **1** Entre le 1^{er} janvier 2012 et le 1^{er} janvier 2062 il y aura 13 années bissextiles, donc $(50 \times 365 + 13)$ jours.

$50 \times 365 + 13 \equiv 1 \times 1 - 1 \equiv 0 (7)$; le 1^{er} janvier 2062 sera donc un dimanche.

2 On regarde le 5 octobre de l'année scolaire en cours et on procède comme dans la question **1**.

Cédric Villani est né un vendredi.

118 **1 a.** Tant que le quotient q_k n'est pas nul, on a $q_{k-1} - q_k = 2q_k + r_k - q_k = q_k + r_k > 0$, car q_k non nul. Donc la suite (q_n) est strictement décroissante.

b. Il y a un nombre fini d'entiers entre q_0 et 0.

c. $a = 2q_0 + r_0 = 2(2q_1 + r_1) + r_0$

$$= 2^2 q_1 + 2r_1 + r_0 = \dots$$

$$= 2^m q_{m-1} + 2^{m-1} r_{m-1} + \dots + 2r_1 + r_0.$$

Comme $q_m = 0$, $q_{m-1} = r_m$; d'où l'écriture finale.

2 a. $2 = \overline{10}^2$; $10 = \overline{1010}^2$;

$$26 = \overline{11010}^2$$
 ; $111 = \overline{1101111}^2$.

b. $\overline{10}^2 = 2$; $\overline{111}^2 = 7$;

$$\overline{10101}^2 = 21$$
 ; $\overline{110010101}^2 = 405$.

3 a. Pour TI :

```
:End
:Disp 1
```

Pour Casio, il suffit de rajouter « STOP ».

b. $8 = 2^3$; $12 = 2^3 + 2^2$; $19 = 2^4 + 2 + 1$.

119 **1** 252 possède $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs positifs qui sont :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 9 ; 12 ; 14 ; 18 ; 21 ; 28 ; 36 ; 42 ; 63 ; 84 ; 126 ; 252.

2 $496 = 2^4 \times 31$ possède $5 \times 2 = 10$ diviseurs positifs qui sont :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 31 ; 62 ; 124 ; 248 ; 496.

3 $\sigma(252) = 728 \neq 2 \times 252$, donc 252 n'est pas parfait.

$\sigma(496) = 992 = 2 \times 496$, donc 252 est parfait.

4 $(1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2)(1 + 7) = 7 \times 13 \times 8$

$$= 728 = \sigma(252).$$

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 31) = 31 \times 32$$

$$= 992 = \sigma(496).$$

5 On conjecture que :

$$\sigma(n) = (1 + p + \dots + p^\alpha)(1 + q + \dots + q^\beta)(1 + r + \dots + r^\gamma).$$

6 a. Le nombre de diviseurs positifs de n est $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

b. Chaque terme du développement est de la forme $p^a q^b r^c$ avec $0 \leq a \leq \alpha$; $0 \leq b \leq \beta$; $0 \leq c \leq \gamma$; comme p^a divise p^α , p^b divise p^β et p^c divise p^γ , $p^a q^b r^c$ divise $p^\alpha q^\beta r^\gamma$.

c. Le nombre de termes du développement est $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

d. D'après les questions précédentes, ce développement est la somme de tous les diviseurs positifs de n .

120 **1** $\frac{24}{5} = 3^1 \times \frac{8}{5}$, donc $v_3\left(\frac{24}{5}\right) = 1$;

$$\frac{24}{5} = 5^{-1} \times \frac{24}{1}$$
, donc $v_5\left(\frac{24}{5}\right) = -1$;

$$\frac{24}{5} = 7^0 \times \frac{24}{5}$$
, donc $v_7\left(\frac{24}{5}\right) = 0$.

$$2 \quad \frac{100}{3} = 5^2 \times \frac{4}{3}, \text{ donc } v_5\left(\frac{100}{3}\right) = 2;$$

$$\frac{405}{12} = \frac{135}{4} = 3^3 \times \frac{5}{4}, \text{ donc } v_3\left(\frac{405}{12}\right) = 3;$$

$$\frac{49}{20} = 7^2 \times \frac{1}{20}, \text{ donc } v_7\left(\frac{49}{20}\right) = 2.$$

$$75 = 3^1 \times \frac{25}{1}, \text{ donc } v_3(75) = 1;$$

$$3^6 = 3^6 \times \frac{1}{1}, \text{ donc } v_3(3^6) = 6;$$

$$\frac{25}{16} = 7^0 \times \frac{25}{16}, \text{ donc } v_7\left(\frac{25}{16}\right) = 0.$$

$$3 \quad p^k = p^k \times \frac{1}{1}, \text{ donc } v_p(p^k) = k.$$

4 $xy = p^{k+1} \frac{ac}{bd}$ avec ac et bd non multiples de p . On a $v_p(x) = k$ et $v_p(y) = \ell$ et on a bien $v_p(xy) = k + \ell$.

$$5 \quad v_p(x) = v_p\left(\frac{x}{y} \times y\right) = v_p\left(\frac{x}{y}\right) + v_p(y),$$

$$\text{donc on déduit } v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y).$$

6 a. Ce programme calcule la valuation 2-adique d'un entier naturel.

```

3 Prog Edit Ajouter 3 nxt OK (F9) Save
val(n,p) := {
j:=0;
tantque (n%(p^j) == 0) faire
j:=j+1;
ftantque
j:=j-1
}
::
// Parsing val
// Warning: j, declared as global variable(s) compiling val
Done
4 val(8,3)
0
5 val(121,11)
2
6 val(48,2)
4
7 val(119,7)
1

```

121 1 $\{0; 1; 2; 4; 5; 8; 9\} \subset S$.

2 Si le cercle de rayon r passe par un point à coordonnées entières, alors $r^2 \in S$.

3 Soit n un entier naturel, alors $n^2 = n^2 + 0^2$ et $n^2 + 1 = n^2 + 1^2$; donc $n^2 \in S$ et $n^2 + 1 \in S$.

4 a. $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$.

b. Supposons que n et m sont deux éléments de S , alors $n = a^2 + b^2$; $m = c^2 + d^2$.

On obtient :

$$nm = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \in S.$$

c. S n'est pas stable pour l'addition, car 1 et 2 sont dans S , mais pas 3.

5

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
pair	pair	pair	pair	pair
impair	impair	impair	impair	pair
pair	impair	pair	impair	impair

6 a. On suppose N pair, donc d'après le tableau ci-dessus, a et b ont même parité.

Si a et b sont pairs, $a + b$ et $a - b$ sont pairs et donc $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ sont des entiers.

$$b. \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{N}{2}.$$

c. L'entier $\frac{N}{2}$ est somme de deux carrés, donc $\frac{N}{2} \in S$.

7 a. D'après le tableau du 5, si N est impair, les entiers a et b sont de parités différentes.

b. $a^2 + b^2 = 4u^2 + 4v^2 + 4v + 1$

$$= 4(u^2 + v^2 + v) + 1 = 4k + 1 \text{ avec } k \text{ entier.}$$

Si N est impair et appartient à S , alors N est de la forme $4k + 1$ avec k entier.

c. $21 = 4 \times 5 + 1$; or, 21 n'est pas somme de deux carrés, donc la réciproque est fausse.

d. $8\,055 \notin S$, car il est impair et pas de la forme $4k + 1$ avec k entier : $8\,055 = 4 \times 2\,013 + 3$.

122 1 k divise $(n! + k)$.

2 Il suffit de prendre $n = 6$: $6! = 720$, donc, d'après la question 1, 722, 723, 724, 725, 726 sont cinq entiers consécutifs non premiers.

3 Oui, il suffit de prendre n égal à cent milliards plus un, et d'appliquer le résultat de la question 1.

123 $300 \times \left(1 - \frac{a}{100}\right) \times \left(1 - \frac{b}{100}\right) \times \left(1 - \frac{c}{100}\right)$
 $= 222,87 \Leftrightarrow (100 - a)(100 - b)(100 - c)$
 $= \frac{222,87}{300} \times 100^3 = 742\,900.$

$$742\,900 = 2^2 \times 5^2 \times 17 \times 19 \times 23.$$

Le seul produit de trois entiers naturels inférieurs à 100 égal à 742 900 est alors $(2^2 \times 23) \times (5 \times 17) \times (5 \times 19)$. $2^2 \times 23 = 92$; $5 \times 17 = 85$; $5 \times 19 = 95$, donc les remises sont (dans n'importe quel ordre) de 8 %, 15 % et 5 %.

PGCD et nombres premiers entre eux

➔ Introduction

1. Programme

Arithmétique

Les problèmes étudiés peuvent notamment être issus de la cryptographie ou relever directement de questions mathématiques, par exemple, à propos des nombres premiers.

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du RIB, code INSEE).	• Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. • Division euclidienne. • Congruences dans $\mathbb{Z}$.
Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill).	• PGCD de deux entiers. • Entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout.
Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichael).	• Théorème de Gauss. • Nombres premiers. • Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.
Sensibilisation au système cryptographique RSA.	

2. Intentions des auteurs

L'enseignement de Spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Cette phrase du programme a motivé un changement de maquette par rapport aux chapitres précédents :

- la page « Partir d'un bon pied » est remplacée par une page comportant quelques aspects historiques liés aux notions qui seront traitées ;
- les deux pages « Découvrir » sont remplacées par trois pages « Du problème vers les notions » qui abordent des problèmes proposés par le programme, avec une reprise éventuelle en Travaux Pratiques ou Exercices après l'étude du cours, et une page « Activités de découvertes » plus proche des pages « Découvrir ».

La répartition des notions étudiées entre les deux chapitres d'arithmétique a été pensée pour pouvoir approcher les problèmes de codage dans l'un et de chiffrement dans l'autre. Le questionnement sur les nombres premiers est présent dans les deux chapitres.

Du point de vue mathématique :

le chapitre 14 traite des notions de PGCD et d'entiers premiers entre eux.

Les exercices d'application sont majoritairement simples pour une bonne assimilation des notions nouvelles. Les problèmes sont de difficultés hétérogènes, avec quelques énoncés assez difficiles pour que chacun y trouve son compte.

➔ Du problème vers les notions

Les activités 1, 2 et 3 présentent des méthodes de chiffrement dans un ordre chronologique.

Activité 1 Le chiffrement affine : codage par substitution mono-alphabétique

Objectif

Décrire le chiffrement affine ; la question du déchiffrement renvoie aux exercices, après l'étude du cours.

1 Principe

Si a ou/et b sont supérieurs ou égaux à 26, ils peuvent être remplacés par le reste dans leur division euclidienne par 26.

2 Exemple

a. $a = 11$; $b = 8$.

b. 10-8-21-6-21-17-13-8-9-18-2-20-0-25-8-15-8-21-24-0.

c.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
2	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	1	3	clé(2,5)
3	6	10	14	18	22	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22	0	4	8	12	16	20	24	2	clé(4,6)
4	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	clé(13,3)

Ces clés ne sont pas satisfaisantes, car des lettres différentes ont le même codage.

3 $1 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, donc on peut concevoir $25 \times 26 = 650$ clés différentes, mais certaines ne sont pas satisfaisantes comme nous l'avons vu dans la question précédente.

Activité 2 Le chiffrement de Vigenère : codage par substitution poly-alphabétique

Objectif

Décrire le chiffrement de Vigenère explicitement cité par le programme.

3 a. L E K V D Q R H H U L S R

b. Une même lettre ne reçoit pas toujours le même code : par exemple, dans la question a., la lettre M est codée une fois L et une seconde fois Q.

c. I AM VERY HAPPY

Activité 3 Le système cryptographique R.S.A.

Objectif

Décrire le système RSA ; les justifications renvoient à un TP après l'étude du cours.

3 a. $n = 13 \times 29 = 377$; $1 \leq d < 336$ et $5d \equiv 1(336)$ donne $d = 269$.

b. 67 est le code ASCII de la lettre C et 266 est son code, c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de 67^5 par 377.

c. Alice doit calculer le reste de la division euclidienne de 266^{269} par 377 ; elle va obtenir 67.

➔ Activités de découverte

Activité 4 Recherche du PGCD : algorithme d'Euclide

Objectif

Justifier la recherche du PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide vu en Troisième.

1 Si b divise a , le PGCD de a et b est b .

2 Il existe un entier q tel que $a = bq + r$.

a. Si d divise a et b alors d divise $a - bq$, c'est-à-dire d divise r .

b. Si d divise r et b alors d divise $b + rq$, c'est-à-dire d divise a .

c. Les couples (a, b) et (b, r) ont les mêmes ensembles de diviseurs communs, donc ils ont le même PGCD.

3 a. Si $r_1 = 0$, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_0) = r_0$.

Sinon, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_0) = \text{PGCD}(r_0, r_1)$ et on écrit la division euclidienne de r_0 par r_1 .

b. La suite des restes étant strictement décroissante et minorée par zéro, on aura un reste nul au bout d'un nombre fini d'étapes.

c. D'après 2 c., le dernier reste non nul est le PGCD de a et b .

4

ALGO

Variables :

a, b, r : entiers ;

Début

Entrer a et b

$r \leftarrow 1$

Tant que $r > 0$

$r \leftarrow a - b \times \text{Ent}\left(\frac{a}{b}\right)$

$a \leftarrow b$

$b \leftarrow r$

Fin tant que ;

Afficher « PGCD(a, b) = », a ;

Fin.

Programme calculatrice :

```
PROGRAM:EUCLIDE
:Promt A
:Promt B
:1→R
:While R>0
:A-B*int(A/B)→R
:B→A
:R→B
:End
:Disp "PGCD(A:B)
=",A
```

Test :

```
FrqMEUCLIDE
A=?12
B=?8
PGCD(A:B)=
4
Done
```

Activité 5 PGCD et décompositions en produits de facteurs premiers

Objectif

Utiliser les décompositions en facteurs premiers pour obtenir un PGCD.

1 a. $a = 2 \times 3 \times 5^3 \times 11^2$; $b = 2^2 \times 5^2 \times 11 \times 17$.

b. Les facteurs premiers pouvant figurer dans la décomposition de d sont :

2 avec l'exposant 1 ; 3 avec l'exposant 1 ; 5 avec pour exposant 1, 2 ou 3 ; 11 avec pour exposant 1 ou 2.

c. Les facteurs premiers pouvant figurer dans la décomposition de d sont :

2 avec pour exposant 1 ou 2 ; 5 avec pour exposant 1 ou 2 ; 11 avec l'exposant 1 ; 17 avec l'exposant 1.

d. Les facteurs premiers pouvant figurer dans la décomposition de d sont :

2 avec l'exposant 1 ; 5 avec pour exposant 1 ou 2 ; 11 avec l'exposant 1.

e. $\text{PGCD}(a, b) = 2 \times 5^2 \times 11 = 550$.

2 On prend les facteurs premiers communs aux décompositions de a et b auxquels on attribue un exposant égal au plus petit des deux exposants présents dans les décompositions de a et b .

3 $a = 2^3 \times 5 \times 7^2 \times 11 \times 17$ et $b = 2^2 \times 5^2 \times 11^3 \times 17$, donc $\text{PGCD}(a, b) = 2^2 \times 5 \times 11 \times 17 = 3\,740$.

Exercices d'application

➔ Savoir faire Calculer un PGCD

1 a. $\text{PGCD}(a, b) = 50$.

b. $\text{PGCD}(a, b) = 200$.

c. $\text{PGCD}(a, b) = 22$.

2 1 $\text{PGCD}(456, 1548) = 2^2 \times 3 = 12$.

2 $\text{PGCD}(4\,416, 1225) = 1$ (ces deux entiers sont premiers entre eux).

3 a. $35 \times 15 = 525$ et $35 \times 16 = 560$;

b. $17 \times 30 = 510$ et $17 \times 31 = 527$.

4 1 ; 2 ; 5 ; 10 et leurs opposés.

5 a. 10.

b. 25.

c. 1.

➔ Savoir faire Utiliser le théorème de Bézout

6 a. $d = 15$.

b. $495u + 150v = 15 \Leftrightarrow 33u + 10v = 1$; l'algorithme d'Euclide conduit à $u = -3$, $v = 10$.

7 a. $(n+1) \times 1 + n \times (-1) = 1$.

b. Oui : si on note $2k+1$ et $2k-1$ ces deux entiers impairs consécutifs, l'algorithme d'Euclide conduit à la relation : $(2k+1)(1-k) + (2k-1)k = 1$.

c. Non : ils ont 2 pour diviseur commun.

8 a. $39 = 3 \times 13$; $50 = 2 \times 5^2$.

Donc $\text{PGCD}(a, b) = 1$.

b. Le théorème de Bézout assure de l'existence des entiers u et v ; l'algorithme d'Euclide conduit à $u = 9$ et $v = -7$.

9 Supposons que p divise le produit ab .

Si p divise a , alors c'est fini, car on a bien p divise a ou b (même raisonnement si p divise b).

Si p ne divise pas a , alors p est premier avec a et d'après le théorème de Gauss, p divise b .

Réciproquement, supposons que p divise a ou b , par exemple, p divise a .

Alors, il existe un entier k tel que $a = kp$, donc $ab = kpb = (kb)p$ ce qui prouve que p divise le produit ab .

➔ Travaux pratiques

10 Suites et PGCD

1 $-5u_n + 4v_n = 7$; or, si d divise u_n et v_n , alors d divise $-5u_n + 4v_n$, donc d divise 7.

Ainsi, les valeurs possibles du PGCD de u_n et v_n sont 1 ou 7.

2 a. Si u_n et v_n ne sont pas premiers entre eux, alors, d'après le résultat de la question précédente, 7 divise u_n et v_n .

Alors, 7 divise $v_n - u_n = n + 2$; donc $n \equiv -2 \equiv 5(7)$.

b. Réciproquement, si $n \equiv 5(7)$, $u_n \equiv 21 \equiv 0(7)$ et $v_n \equiv 28 \equiv 0(7)$.

c. Conclusion : « u_n et v_n ne sont pas premiers entre eux » $\Leftrightarrow n \equiv 5(7)$.

11 Les « nombres de Fermat »

1 a. $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$. Ils sont effectivement premiers.

b. $F_3 = 257$ est premier ; $F_4 = 65\,537$ est premier ; $F_5 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641, donc n'est pas premier et la conjecture de Fermat n'est pas avérée.

2 a. $F_m = 1 + 2^{2^m} = 1 + 2^{2^{n+k}} = 1 + 2^{2^n \times 2^k}$
 $= 1 + (2^{2^n})^{2^k} = a^{2^k} + 1$.

b. $\sum_{i=0}^{2^k-1} (-a)^i = \frac{1 - (-a)^{2^k}}{1 - (-a)} = \frac{1 - a^{2^k}}{1 + a} = -\frac{F_m - 2}{F_n}$.

c. Comme $\sum_{i=0}^{2^k-1} (-a)^i$ est une somme d'entiers, c'est un entier et F_n divise $F_m - 2$.

d. Si d divise F_n et $F_m - 2$, alors d divise leur différence 2, donc $d = 1$ ou $d = 2$; or, F_n est impair, donc $d = 1$.

12 Le « petit théorème » de Fermat

1 a. On raisonne par l'absurde : si $r_k = 0$, p divise $k \times a$; or, p est premier et ne divise pas a , donc p est premier avec a ; alors, selon le théorème de Gauss, p divise k . Mais ceci est impossible, car k est compris entre 1 et $p - 1$.

b. Si $ka \equiv r_k(p)$ et $k'a \equiv r_k(p)$, alors $(k - k')a \equiv 0(p)$; si $k' \neq k$ le même raisonnement que dans la question **1** conduit à une impossibilité.

Comme $1 \leq k \leq p - 1$ et, d'après **a.**, $1 \leq r_k \leq p - 1$, d'après ce qui précède, r_k prend toutes les valeurs possibles de 1 à $p - 1$.

c. En multipliant les $p - 1$ relations $ka \equiv r_k(p)$ pour $1 \leq k \leq p - 1$, on obtient alors $(p - 1)! a^{p-1} \equiv (p - 1)!(p)$.

d. D'après **c.**, p divise $(p - 1)!(a^{p-1} - 1)$. Or, p ne figure dans aucune des décompositions des facteurs du produit $(p - 1)!$, donc p ne divise pas $(p - 1)!$, donc p est premier avec $(p - 1)!$; donc, selon le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$.

2 Si p ne divise pas a , d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1(p)$, donc $a^p \equiv a(p)$.

Si p divise a , p divise $a^p - a$, donc $a^p \equiv a(p)$.

3 $\sum_{k=0}^{p-2} 2^k = 2^{p-1} - 1$; comme p ne divise pas 2, le petit théorème de Fermat permet de conclure que p divise $2^{p-1} - 1$.

13 Le système cryptographique R.S.A.

1 Existence du nombre d

a. e est premier avec n' , donc, selon le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $eu + n'v = 1$; l'entier u vérifie donc $eu \equiv 1(n')$.

b. Existence de d :

on écrit la division de u par n' :

$u = qn' + d$ avec $0 \leq d < n'$. Alors, $d \equiv u(n')$, donc $ed \equiv eu \equiv 1(n')$. D'où l'existence de d .

Unicité de d :

si d' est un entier tel que $ed' \equiv 1(n')$ et $1 \leq d' < n'$, alors $ed' \equiv ed(n')$, donc n' divise $e(d' - d)$; n' étant premier avec e , d'après le théorème de Gauss, n' divise $d' - d$; or, $-n' < d' - d < n'$, donc $d' = d$. D'où l'unicité.

2 Le déchiffrement

a. Par définition de c on a $m^e \equiv c(n)$, donc $m^{ed} \equiv c^d(n)$, d'où l'équivalence souhaitée.

b. $ed \equiv 1(n')$, donc n' divise $ed - 1$, donc il existe un entier t tel que $ed = 1 + tn'$.

Si p divise m , alors p divise $m^{ed} - m$.

Si p ne divise pas m , alors d'après le petit théorème de Fermat, $m^{p-1} \equiv 1(p)$; en élevant à la puissance $t(q - 1)$ on obtient $m^{tn'} \equiv 1(p)$, puis en multipliant par m , $m^{ed} \equiv m(p)$.

c. Comme p et q sont deux nombres premiers distincts divisant $m^{ed} - m$, ils sont tous les deux présents dans la décomposition en facteurs premiers de $m^{ed} - m$ et, par conséquent, leur produit $pq = n$ divise aussi $m^{ed} - m$. Alors, avec **2 a.**, $c^d \equiv m(n)$, donc Alice retrouve bien m en calculant le reste de la division euclidienne de c^d par n .

Faire le point

17 **1** b. et c. **2** a. et b. **3** c. **4** a. et c. **5** c. **6** a. et b.

18 **1** Vrai.

2 Faux (contre exemple : $a = 7$ et $b = 4$).

3 Faux (même contre exemple que **2**).

4 Vrai. **5** Vrai.

6 Faux (contre exemple : $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$). **7** Vrai.

19 **1** Vrai.

2 Vrai.

3 Vrai.

4 Vrai.

Exercices d'application

1 PGCD de deux entiers

20 **1** Faux : avec a négatif.

2 Vrai : par définition du PGCD.

3 Vrai : a et b sont multiples de 4, donc de 2.

4 Faux : $a = 6$ et $b = 3$.

5 Faux : c'est d qui divise PGCD(a , b).

21 **1** b. et c. **2** a. et c. **3** a. et b. **4** b.

22 **1** Faux : $a = 7$ et $b = 5$.

2 Vrai : si d divise a et b , alors d divise $a + b$ et $a - b$.

3 Vrai : d divise $2a + b$ et $3a + 2b$, alors d divise a , car $a = 2(2a + b) - (3a + 2b)$ et d divise b , car $b = (2a + b) - 2a$.

4 Vrai : si d divise $a + kb$ et b , alors d divise a , car $a = (a + kb) - kb$.

23 **1** PGCD(a , b) = 14.

2 PGCD(a , b) = 22.

3 PGCD(a , b) = 25.

4 PGCD(a , b) = 63.

24 **1** PGCD(a , b) = 16.

2 PGCD(a , b) = 29.

3 PGCD(a , b) = 237.

4 PGCD(a , b) = 22.

25 **a.** **1** PGCD(a , b) = $2^2 \times 11 = 44$; **2** 1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44 et leurs opposés.

b. **1** PGCD(a , b) = $2 \times 3^2 \times 5 = 90$; **2** 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90 et leurs opposés.

26 **1** PGCD(a , b) = 233 ; $\frac{a}{b} = \frac{8}{7}$.

2 PGCD(a , b) = 121 ; $\frac{a}{b} = \frac{25}{21}$.

3 PGCD(a , b) = 1710 ; $\frac{a}{b} = \frac{10\,815}{2}$.

27 **1** Si d divise a et b , alors il divise $b - a = (n + 1) - n = 1$, donc d divise 1 et comme le seul diviseur positif de 1 est 1, on a $d = 1$.

2 D'après la question **1**, on a $\text{Div}^+(a, b) \subset \{1\}$ et comme $\{1\} \subset \text{Div}^+(a, b)$, on obtient finalement $\text{Div}^+(a, b) = \{1\}$.

28 **1** Si d divise a et b , alors d divise $b - 2a$ qui vaut 1, donc $d = 1$.

2 D'après la question **1**, on a $\text{Div}^+(a, b) \subset \{1\}$ et comme $\{1\} \subset \text{Div}^+(a, b)$, on obtient finalement $\text{Div}^+(a, b) = \{1\}$.

29 **1** Si d divise a et b , alors d divise $2a - b$ qui vaut 1, donc $d = 1$.

2 D'après la question **1**, on a $\text{Div}^+(a, b) \subset \{1\}$ et comme $\{1\} \subset \text{Div}^+(a, b)$, on obtient finalement $\text{Div}^+(a, b) = \{1\}$.

30 **1** Si d divise a et b , alors d divise $3a - 4b$ qui vaut 1, donc $d = 1$.

2 D'après la question **1**, on a $\text{Div}^+(a, b) \subset \{1\}$ et comme $\{1\} \subset \text{Div}^+(a, b)$, on obtient finalement $\text{Div}^+(a, b) = \{1\}$.

31 **1** L'observation de la diagonale permet de conjecturer que, pour tout entier naturel non nul a , $\text{PGCD}(a, a) = a$.

Justification : a divise a , donc a divise $\text{PGCD}(a, a)$ et $\text{PGCD}(a, a)$ divise a , donc $\text{PGCD}(a, a) = a$.

2 L'observation de la colonne B permet de conjecturer que, pour tout entier naturel non nul a , $\text{PGCD}(a, 1) = 1$.
Justification : 1 divise a et est le seul diviseur positif de 1, donc $\text{PGCD}(a, 1) = 1$.

3 Ces colonnes ne comportent que deux valeurs : 1 et le nombre de la première ligne.

Les colonnes dans lesquelles il n'y aura que deux valeurs distinctes sont les colonnes correspondant aux nombres premiers, car ces derniers ont exactement deux diviseurs positifs.

4 Le résultat mis en évidence est : si a est premier et si $1 \leq b \leq a - 1$, alors $\text{PGCD}(a, b) = 1$.

Justification : les seuls diviseurs de a sont 1 et a , et a ne divise pas b , car $1 \leq b \leq a - 1$.

32 **1** $3n + 2 = 2 \times (n + 1) + n$; $n + 1 = 1 \times n + 1$.

2 $5n + 7 = 2 \times (2n + 3) + (n + 1)$;

$2n + 3 = 2 \times (n + 1) + 1$.

3 $3n^2 + 5n + 1 = (n + 1) \times (3n + 1) + n$;

$3n + 1 = 3 \times n + 1$.

33 **1** Si d divise a et b , alors d divise $15a + 4b$ et $11a + 3b$; en particulier, $\text{PGCD}(a, b)$ divise α et β , donc il divise leur PGCD.

2 $3\alpha - 4\beta = a$ et $-11\alpha + 15\beta = b$.

3 D'après **2** et avec un raisonnement identique à celui de **1** on en déduit que $\text{PGCD}(\alpha, \beta)$ divise $\text{PGCD}(a, b)$. Finalement, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$.

34 $a' + b' = \frac{360}{18} = 20$; comme a' et b' sont premiers entre eux et $a' \geq b'$, les possibilités sont :

$$\begin{cases} a' = 19 \\ b' = 1 \end{cases} ; \begin{cases} a' = 17 \\ b' = 3 \end{cases} ; \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 7 \end{cases} ; \begin{cases} a' = 11 \\ b' = 9 \end{cases}.$$

Les couples (a, b) solutions sont donc : $(342; 18)$, $(306; 54)$, $(234; 126)$ et $(198; 162)$.

35 $a' - b' = \frac{105}{15} = 7$, donc

$\text{PGCD}(a', b') = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(b' + 7, b') = 1 \Leftrightarrow b'$ n'est pas un multiple de 7.

Les solutions sont les couples $(15k + 105, 15k)$ avec k entier naturel non multiple de 7.

36 $a'b' = \frac{1734}{17^2} = 6$; comme a' et b' sont premiers entre eux et $a' \geq b'$, les possibilités sont :

$\begin{cases} a' = 6 \\ b' = 1 \end{cases} ; \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 2 \end{cases}$. Les couples (a, b) solutions sont donc : $(102; 17)$ et $(51; 34)$.

37 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $1 \leq b \leq 180$, donc les valeurs possibles de b sont :

$36 ; 36 \times 2 = 72 ; 36 \times 3 = 108 ; 36 \times 4 = 144$.

38 **1** Si d divise a et b , alors d divise $a - b$.

2 Si d divise a et $a - b$, alors d divise $a - (a - b) = b$.

3 On en déduit que $\text{Div}(a, b) = \text{Div}(a, a - b)$.

39 **1** Il existe un entier k tel que $a = b + kn$.

Si d divise a et n , alors d divise $a - kn$; donc d divise b et n .

Si d divise b et n , alors d divise $b + kn$; donc d divise a et n .

Ainsi, $\text{Div}(a, n) = \text{Div}(b, n)$,

et par suite, $\text{PGCD}(a, n) = \text{PGCD}(b, n)$.

2 $a = 5$; $b = 10$; $n = 25$.

40 **1 a.** D divise a et b , donc $\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont des entiers naturels (non nuls, car a et b sont non nuls).

b. D'après la propriété d'homogénéité,
 $\text{PGCD}\left(D \times \frac{a}{D}, D \times \frac{b}{D}\right) = D \times \text{PGCD}\left(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}\right)$; c'est-à-dire $D = D \times d$; comme $D \neq 0$, $d = 1$.

2 $\text{PGCD}\left(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}\right) = 1$, donc, avec la propriété d'homogénéité, $\text{PGCD}(a, b) = D \times 1 = D$.

41 **1** $\text{Div}^+(4\,494) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; \mathbf{14} ; 21 ; 42 ; 107 ; 214 ; 652 ; 749 ; 1\,498 ; 2\,247 ; 4\,494\}$

$\text{Div}^+(1092) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 13 ; \mathbf{14} ; 21 ; 26 ; 28 ; 39 ; 42 ; 52 ; 78 ; 84 ; 91 ; 156 ; 182 ; 273 ; 364 ; 546 ; 1092\}$;

$\text{Div}^+(728) = \{1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 13 ; \mathbf{14} ; 26 ; 28 ; 52 ; 56 ; 91 ; 104 ; 182 ; 364 ; 728\}$.

$\text{PGCD}(4\,494, 1092, 728) = 14$.

2 a. Si k divise a et b , alors k divise d ; donc, si k divise a , b et c , alors k divise d et c .

Réciproquement, si k divise d alors k divise a et b ; donc si k divise d et c , alors k divise a , b et c .

Finalement $\text{Div}(a, b, c) = \text{Div}(d, c)$;

donc $\text{PGCD}(a, b, c) = \text{PGCD}(d, c)$.

b. $4\,494 = 4 \times 1\,092 + 126$; $1\,092 = 8 \times 126 + 84$;
 $126 = 1 \times 84 + 42$; $84 = 2 \times 42$, donc le PGCD de 4 494
et 1 092 est 42 et
 $\text{PGCD}(4\,494, 1\,092, 728) = \text{PGCD}(42, 728)$.
 $728 = 17 \times 42 + 14$; $42 = 3 \times 14$,
donc $\text{PGCD}(42, 728) = 14$.

3 Les facteurs communs aux trois décompositions sont
2 et 7 : $2 \times 7 = 14$.

4 a. k divise d et d divise a , donc k divise a ; de même
pour b et c .

b. k divise a et b , donc k divise d_1 ; k divise d_1 et c , donc
 k divise $\text{PGCD}(d_1, c)$, c'est-à-dire, avec la question **2**,
 k divise $\text{PGCD}(a, b, c)$.

c. D'après les décompositions données par le logiciel,
 $\text{PGCD}(84, 126, 294) = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

Donc les diviseurs communs aux entiers 84, 126 et 294
sont les diviseurs de 42, c'est-à-dire : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ;
21 ; 42 et leurs opposés.

42 La distance maximale entre deux plants est
 $\text{PGCD}(1\,020, 780) = 60$ centimètres.

Il faut $2 \times \left(\frac{1\,020}{60} + \frac{780}{60} \right) = 60$ plants.

43 L'arête la plus grande possible d'un cube, en mm,
est égale au PGCD des entiers 308, 140 et 84, c'est-à-dire
28 mm.

$\frac{308}{28} = 11$, $\frac{140}{28} = 5$, $\frac{84}{28} = 3$, donc le nombre
minimal de cubes est $11 \times 5 \times 3 = 165$.

44 Le nombre maximal de bouquets identiques est
 $\text{PGCD}(244, 366, 183) = 61$.

Un bouquet sera composé de $\frac{244}{61} = 4$ lys,
 $\frac{366}{61} = 6$ roses et $\frac{183}{61} = 3$ œillets.

2 Théorèmes de Bézout et de Gauss

45 **1** a., b. et c. **2** c. **3** b. **4** a.

46 **1** Faux ; un contre exemple : $a = 10$.

2 Vrai ; $9a = 6k$, donc $3a = 2k$, donc 2 divise $3a$; or, 2
est premier avec 3, donc 2 divise a .

3 Vrai ; $500 = 4 \times 5^3$ et a est premier avec 5, donc avec
 5^3 , donc a divise 4.

4 Faux ; un contre exemple : $a = b = c$.

5 Faux ; un contre exemple : $a = b = 3$; $c = 2$.

47 **1** a. **2** c. **3** b. **4** c.

48 **1** D divise a et b , donc D divise $au + bv$.

2 Il existe des entiers relatifs u' et v' tels que
 $au' + bv' = D$ et un entier k tel que $d = kD$. Les entiers
relatifs $u = ku'$ et $v = kv'$ vérifient alors $au + bv = d$.

49 **a.** 5 et 9 sont premiers entre eux ; $(2 ; -1)$ est un
couple solution.

b. 2 est le PGCD de 94 et 22 ; $(4 ; -17)$ est un couple
solution.

c. 5 est le PGCD de 15 et 55 ; $(4 ; -1)$ est un couple solu-
tion.

50 **1** L'algorithme d'Euclide donne : $35 = 12 \times 2 + 11$;
 $12 = 11 \times 1 + 1$.

35 et 12 sont premiers entre eux, donc d'après le théo-
rème de Bézout, on est assuré de l'existence de deux
entiers u et v tels que $35u + 12v = 1$.

On obtient alors :

$$1 = 12 - 11 \times 1 = 12 - (35 - 12 \times 2) = -35 + 12 \times 3.$$

De l'égalité $35 \times (-1) + 12 \times 3 = 1$ on obtient :

$$35 \times (-3) + 12 \times 9 = 3.$$

$(u, v) = (9, -3)$ est un couple solution.

2 $\text{PGCD}(140, 56) = 28$ (obtenu grâce aux décomposi-
tions en facteurs premiers des deux entiers).

D'après une propriété du cours, il existe deux entiers u et
 v tels que $140u + 56v = 28$ et comme 28 est un diviseur
de 84, on aura $140(3u) + 56(3v) = 84$.

Calcul des entiers u et v : $140 = 56 \times 2 + 28$, donc
 $28 = 140 \times 1 + 56 \times (-2)$.

D'où : $140 \times 3 + 56 \times (-6) = 84$; $(u, v) = (3, -6)$ est
un couple solution.

3 $\text{PGCD}(980, 350) = 70$ (obtenu grâce aux décomposi-
tions en facteurs premiers des deux entiers).

D'après une propriété du cours, il existe deux entiers u
et v tels que $980u + 350v = 70$ et comme 70 est un divi-
seur de -140, on aura $980(-2u) + 350(-2v) = -140$.

Calcul des entiers u et v : $980 = 350 \times 2 + 280$, donc
 $350 = 280 \times 1 + 70$, donc on obtient :

$$70 = 350 - 280 \times 1 = 350 - (980 - 350 \times 2) \\ = -980 + 350 \times 3.$$

D'où : $980 \times 2 + 350 \times (-6) = -140$; $(u, v) = (2, -6)$
est un couple solution.

51 Le résultat étant 1, le théorème de Bézout
permet d'en déduire les quatre couples d'entiers natu-
rels premiers entre eux suivants : $(15\,101, 9\,103)$,
 $(15\,101, 4\,630)$, $(2\,791, 9\,103)$, $(2\,791, 4\,630)$.

52 **1** $-2 \times (9n + 4) + 9 \times (2n + 1) = 1$.

$$2 \quad 1 \times (n^2 + 2n - 2) - (n - 1) \times (n + 3) = 1.$$

$$3 \quad 1 \times (n + 1)^2 - n \times (n + 2) = 1.$$

53 Cet algorithme donne un couple (u, v) d'entiers
relatifs solutions de l'équation $au + bv = \text{PGCD}(a, b)$.
Pour l'exercice **49** on retrouve exactement les couples
obtenus précédemment.

Pour l'exercice **50** on n'obtient pas directement le
couple attendu ; par exemple, pour la question **a.** le
programme donne $\text{PGCD}(a, b) = 1$; $u = 3$; $v = -1$; il
reste à multiplier par 3 pour retrouver le couple solution
 $(9, -3)$.

54 Il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$ et
des entiers u' et v' tels que $au' + bv' = 1$.

On a donc $(au + bv)(au' + bv') = 1$

$$\Leftrightarrow a^2 uu' + acuv' + abvu' + bcvv' = 1.$$

Ceci équivaut à $a(auu' + cuv' + bvu') + bc(vv') = 1$.
Les nombres entre parenthèses étant des entiers, d'après le théorème de Bézout, a et bc sont premiers entre eux.

55 $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u' et v' tels que $(a + b) \times u' + (a - b) \times v' = 1$ que l'on peut écrire $a \times (u' + v') + b \times (u' - v') = 1$; comme $u = u' + v'$ et $v = u' - v'$ sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

56 **1** $-A + 2B = a$ et $2A - 3B = b$.

2 $au + bv = 1 \Leftrightarrow (-A + 2B)u + (2A - 3B)v = 1$
 $\Leftrightarrow A(-u + 2v) + B(2u - 3v) = 1$.

3 Comme $U = -u + 2v$ et $V = 2u - 3v$ sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux.

57 $au + bv = 1 \Leftrightarrow (a + kb - kb)u + bv = 1$
 $\Leftrightarrow (a + kb)u + b(-ku + v) = 1$;

comme u et $(-ku + v)$ sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bézout, $a + kb$ et b sont premiers entre eux.

58 **1 a.** 4 et 7 sont premiers entre eux.

b. $7 = 4 \times 1 + 3$ et $4 = 3 \times 1 + 1$;
donc $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 4 \times 2 + 7 \times (-1)$.
 $(2, -1)$ est donc un couple (u, v) solution.

c. En multipliant par 10, on obtient le couple $(20, -10)$ solution de (E).

2 $4x + 7y = 10 \Leftrightarrow 4x + 7y = 4 \times 20 + 7 \times (-10)$.
 $\Leftrightarrow 4(x - 20) = 7(-y - 10)$.

3 4 divise $7(-y - 10)$ et est premier avec 7, donc, avec le théorème de Gauss, 4 divise $(-y - 10)$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $-y - 10 = 4k$, ou encore $y = -4k - 10$.

Alors : $4(x - 20) = 7(-y - 10) \Leftrightarrow 4(x - 20) = 7 \times 4k$.
 $\Leftrightarrow x - 20 = 7k \Leftrightarrow x = 20 + 7k$

D'où les couples solutions $(7k + 20, -4k - 10)$ avec k entier relatif.

59 L'algorithme d'Euclide donne la solution $(-3, -2)$.
 $S = \{(8k - 3; 5k - 2), k \in \mathbb{Z}\}$.

60 L'algorithme d'Euclide donne la solution $(1; -6)$ pour l'équation $13x + 2y = 1$; d'où la solution $(11; -66)$ pour l'équation $13x + 2y = 11$.
 $S = \{(2k + 11; -13k - 66), k \in \mathbb{Z}\}$.

61 L'algorithme d'Euclide donne la solution $(-4; -1)$ pour l'équation $6x - 25y = 1$; d'où la solution $(-400; -100)$ pour l'équation $6x - 25y = 100$.
 $S = \{(25k - 400; 6k - 100), k \geq 17\}$.

Attention : on cherche des entiers naturels.

62 **1** Il faut que deux lettres différentes ne reçoivent pas le même code.

$ax + b \equiv ax' + b(26) \Leftrightarrow 26 \mid a(x - x')$; si a et 26 sont premiers entre eux alors, d'après le théorème de Gauss, $26 \mid (x - x')$; mais $-25 \leq x - x' \leq 25$, donc $x = x'$ et la clef (a, b) est donc satisfaisante.

2 D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + 26v = 1$; alors $au \equiv 1(26)$.

3 Si $y \equiv ax + b(26)$ alors $uy \equiv x + bu(26)$, car $au \equiv 1(26)$; donc $x \equiv uy - bu(26)$.

La fonction $g : y \mapsto uy - bu$ convient pour décoder les messages.

4 Avec l'algorithme d'Euclide, on obtient $u = -7$. Donc $g(y) = -7y + 56$.

Lettres codées	I	F	A	E	A	Y	I	N
Numéros	8	5	0	4	0	24	8	13
Numéros décodés	0	21	4	2	4	18	0	17
Lettres décodées	A	V	E	C	E	S	A	R

63 **1** On conjecture que pour tout entier naturel x , $7x^2 - 1$ et $8x + 3$ sont premiers entre eux.

2 a. Si un entier d divise $7x^2 - 1$ et $8x + 3$, alors il divise $-8(7x^2 - 1) + 7x(8x + 3) = 21x + 8$.

b. $8(21x + 8) - 21(8x + 3) = 1$, donc, d'après le théorème de Bézout, $21x + 8$ et $8x + 3$ sont premiers entre eux, donc, d'après **2 a.**, $7x^2 - 1$ et $8x + 3$ sont premiers entre eux.

64 a et b divisent c , donc il existe des entiers a' et b' tels que $c = a \times a' = b \times b'$.

Alors, a divise $b \times b'$ et est premier avec b , donc, d'après le théorème de Gauss, a divise b' .

Donc il existe un entier k tel que $b' = k \times a$.

Ainsi, $c = b \times b' = k \times ab$, donc ab divise c .

65 **1** On cherche des entiers naturels x et y tels que $2x + 5y = 57$.

L'algorithme d'Euclide donne la solution $(-2; 1)$ pour l'équation $2x + 5y = 1$; d'où la solution $(-114; 570)$ pour l'équation $2x + 5y = 57$.

Dans $\mathbb{Z}$ on obtient $\begin{cases} x = 5k - 114 \\ y = -2k + 57 \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$.

$x \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 23$ et $y \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 28$, donc Medhi a six possibilités pour payer Audrey.

2 L'équation $2x + 5y = 1$ ayant une solution en nombres entiers relatifs, pour toute somme entière S , l'équation $2x + 5y = S$ a des solutions en nombres entiers relatifs.

3 PGCD $(2, 10) = 2$, donc l'équation $2x + 5y = S$ n'a des solutions en nombres entiers que si S est pair.

66 **1** Si $x = 1$ l'égalité est vérifiée, car les deux membres sont nuls.

Si $x \neq 1$ l'égalité est vérifiée car :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} = \frac{x^k - 1}{x - 1}.$$

2 a. $a^n - 1 = (a^d)^k - 1$

$= (a^d - 1)(1 + a^d + \dots + (a^d)^{k-1})$ d'après **1**.

Comme $(1 + a^d + \dots + (a^d)^{k-1})$ est un entier, $a^d - 1$ divise $a^n - 1$.

b. 4 divise 2 012, donc, avec **a.**, $2^4 - 1$ divise $2^{2012} - 1$; or, $2^4 - 1 = 15$, donc 3, 5 et 15 divisent $2^{2012} - 1$.

$$\begin{aligned} \text{3 a. } (a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d \\ = (a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^{mu-nv} \\ = a^{mu} - 1 - a^{mu} + a^{mu-nv} = a^d - 1. \end{aligned}$$

b. D'après **3 a.**, l'équation :

$$(a^{mu} - 1)x + (a^{nv} - 1)y = a^d - 1$$

a des solutions en nombres entiers, donc $a^d - 1$ est un multiple du PGCD de $(a^{mu} - 1)$ et $(a^{nv} - 1)$.

Par ailleurs, d divise m et n , donc d divise mu et nv , donc d'après **2 a.**, $a^d - 1$ divise $(a^{mu} - 1)$ et $(a^{nv} - 1)$, donc $a^d - 1$ divise le PGCD de $(a^{mu} - 1)$ et $(a^{nv} - 1)$.

Bilan : $a^d - 1$ est le PGCD de $(a^{mu} - 1)$ et $(a^{nv} - 1)$.

4 On applique le résultat précédent avec $m = 3$; $u = 21$; $n = 3$; $v = 20$; $d = 3$. Le PGCD de $2^{63} - 1$ et $2^{60} - 1$ est donc $2^3 - 1 = 7$.

➔ Prépa Bac

Exercices guidés

67 Partie A

1 n s'affiche lorsque $n + 3$ divise $n^3 - 11n$.

2 On obtient les entiers 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 21 ; 45.

Partie B

1 Si d divise a et b , alors d divise $bc - a$; donc d divise $bc - a$ et b .

Si d divise $bc - a$ et b , alors d divise $-1 \times (bc - a) + c \times b = a$; donc d divise a et b .

Ainsi, $\text{Div}(a, b) = \text{Div}(bc - a, b)$, donc :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(bc - a, b).$$

2 On développe le membre de droite.

3 On applique le résultat de **B. 1** aux entiers naturels non nuls $a = 48$, $b = n + 3$, $c = 3n^2 - 9n + 16$.

4 $\text{Div}^+(48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$.

$n + 3$ divise $n^3 - 11n$

$$\Leftrightarrow \text{PGCD}(3n^2 - 11n, n + 3) = n + 3$$

$$\Leftrightarrow \text{PGCD}(48, n + 3) = n + 3 \Leftrightarrow n + 3 \text{ divise } 48.$$

$n + 3 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$ et $n \geq 0$,

donc $n \in \{0; 1; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$.

68 Partie A

1 Voir le cours, page 482.

2 p et q divisent a , donc il existe des entiers p' et q' tels que $a = pp' = qq'$; alors p divise qq' et est premier avec q ; donc, d'après le théorème de Gauss, p divise q' . Ainsi, il existe un entier k tel que $q' = pk$; alors $a = qpqk$, donc pq divise a .

Partie B

1 a. 5 et 17 sont premiers entre eux ; l'algorithme d'Euclide donne le couple $(-2; 7)$.

b. $5v = 1 - 17u \equiv 1(17)$, donc $n_0 \equiv 9(17)$ et $17u = 1 - 5v \equiv 1(5)$; donc $n_0 \equiv 3(5)$.

c. Avec le couple de **1 a.** $3 \times 7 \times (-2) + 9 \times 5 \times 7 = 213$ appartient à S .

2 a. on applique **A. 2** avec $a = n - n_0$, $p = 17$, $q = 5$.

b. Si $n \in S$, alors $n \equiv 213 \equiv 43(85)$; donc $n = 43 + 85k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n = 43 + 85k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\begin{cases} n \equiv 43 \equiv 9(17) \\ n \equiv 43 \equiv 3(5) \end{cases}$; donc $n \in S$.

Partie C

Le nombre n de jetons appartient à S , donc $n = 43 + 85k$ avec $k \in \mathbb{Z}$; la seule solution comprise entre 300 et 400 est 383.

69 1 $7 \times 77 = 539 = 2 \times 256 + 27$, donc $f(77) = 27$; $7 \times 97 = 679 = 2 \times 256 + 167$, donc $f(97) = 167$; $7 \times 116 = 812 = 3 \times 256 + 44$, donc $f(116) = 44$; $7 \times 104 = 728 = 2 \times 256 + 216$; donc $f(104) = 216$.

2 a. Si $f(n) = f(m)$, alors $7n \equiv 7m(256)$,

donc $7(n - m) \equiv 0(256)$.

b. D'après **2 a.**, si $f(n) = f(m)$, alors $256 \mid 7(n - m)$; or, 256 et 7 sont premiers entre eux, donc $256 \mid (n - m)$. Mais $-254 \leq n - m \leq 254$, donc $n - m = 0$. Ainsi, si $n \neq m$, alors $f(n) \neq f(m)$.

3 a. 256 et 7 sont premiers entre eux.

b. $256 \times (-5) + 7 \times 183 = 1$.

c. $183 \times f(n) \equiv 183 \times 7n(256) \equiv n(256)$ d'après **3 b.**

d. $g(x)$ est le reste de la division euclidienne de $183x$ par 256.

e. $183 \times 27 = 4\,941 = 19 \times 256 + 77$, donc $g(27) = 77$.

Exercices d'entraînement

70 1 a. Comme 11 et 7 sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers u et u' tels que $11u + 7u' = 1$; il suffit de prendre $u' = -v$. De façon évidente, le couple $(2; 3)$ est solution, sinon on utilise l'algorithme d'Euclide.

b. On a $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$, donc $11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$ en multipliant par 5.

Une solution particulière de (E) est le couple $(10; 15)$.

$$\text{c. On a } \begin{cases} 11x - 7y = 5 \\ 11 \times 10 - 7 \times 15 = 5 \end{cases} ;$$

donc, par soustraction, $11(x - 10) - 7(y - 15) = 0$ ce qui équivaut à $11(x - 10) = 7(y - 15)$.

11 divise $7(y - 15)$ et 11 est premier avec 7, donc, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $(y - 15)$. Il existe un entier λ tel que $(y - 15) = 11\lambda$, donc $y = 11\lambda + 15$.

On a alors $11(x - 10) = 7 \times 11\lambda$ et donc $x = 7\lambda + 10$.

Réciproquement, $11(7\lambda + 10) - 7(11\lambda + 15) = 5$.

L'ensemble des couples-solutions est formé de ceux de la forme $(7\lambda + 10; 11\lambda + 15)$, où $\lambda \in \mathbb{Z}$.

d. Un point $M(x; y)$ appartient à la droite si, et seulement si, $11x - 7y = 5$.

$$\text{On résout } \begin{cases} 0 \leq 7\lambda + 10 \leq 50 \\ 0 \leq 11\lambda + 15 \leq 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{10}{7} \leq \lambda \leq \frac{40}{7} \\ -\frac{15}{11} \leq \lambda \leq \frac{35}{11} \end{cases}.$$

Comme λ est un entier, les seules valeurs possibles sont : $-1, 0, 1, 2, 3$.

Ce qui donne les cinq points suivants : $(3; 4)$, $(10; 15)$, $(17; 26)$, $(24; 37)$ et $(31; 48)$.

2 a. On a $11 \equiv 1(5)$, donc $11x^2 \equiv x^2(5)$; $7 \equiv 2(5)$, donc $7y^2 \equiv 2y^2(5)$.

En passant aux congruences, on obtient :

$$x^2 - 2y^2 \equiv 0(5), \text{ c'est-à-dire } x^2 \equiv 2y^2(5).$$

b. Tableaux de congruences modulo 5 :

x est congru à	0	1	2	3	4
x² est congru à	0	1	4	4	1

y est congru à	0	1	2	3	4
2y² est congru à	0	2	3	3	2

c. D'après ces deux tableaux, le seul cas dans lequel on a $x^2 \equiv 2y^2(5)$ est celui dans lequel on a simultanément $x \equiv 0(5)$; $y \equiv 0(5)$, donc x et y sont des multiples de 5 ($x = 5k$ et $y = 5k'$).

d. $11x^2 - 7y^2 = 5$ s'écrit alors $11 \times 25k^2 - 7 \times 25k'^2 = 5 \Leftrightarrow 25(11k^2 - 7k'^2) = 5$. C'est impossible, car $11k^2 - 7k'^2$ est un entier.

L'équation (F) n'a pas de solution.

71 1 Faux ; contre exemple : $a = 6$ et $b = 3$.

2 Vrai ; on raisonne par l'absurde : si le PGCD de a et b était pair, 2 diviserait ce PGCD, donc 2 diviserait a et b qui seraient donc pairs.

On peut aussi raisonner avec les décompositions en produits de facteurs premiers.

3 Faux ; contre exemple : $a = 2$ et $b = 3$.

4 Vrai ; il suffit d'appliquer le théorème de Bézout.

5 Vrai ; 9 et 17 sont premiers entre eux, donc il existe des entiers u et v tels que $9u + 17v = 1$; on prend alors $a = 3u$ et $b = 3v$.

6 Vrai ; 42 est un multiple de 14.

72 1 $A = 5 + 0 + 2 + 4 + 2 + 4 = 17$;

$B = 9 + 1 + 3 + 1 + 3 + 5 = 22$.

$S = 17 + 3 \times 22 = 83$, puis $83 = 10 \times 8 + 3$.

Comme le reste n'est pas nul, on calcule $c = 10 - 3 = 7$.

2 a. $B' = u + 13$.

b. $S' = 17 + 3(u + 13) = 56 + 3u$.

c. Si $S' \equiv 3(10)$, alors $c = 10 - 3 = 7$ et l'erreur n'est pas détectée.

Si l'erreur n'est pas détectée, alors $c = 7$ et donc $S' \equiv 3(10)$.

d. $S' \equiv 3(10) \Leftrightarrow 56 + 3u \equiv 3(10) \Leftrightarrow 3u \equiv -53(10)$

$\Leftrightarrow 3u \equiv -3(10) \Leftrightarrow 3(u + 1) \equiv 0(10)$

$\Leftrightarrow 10$ divise $3(u + 1)$.

e. Comme 10 est premier avec 3, d'après le théorème de Gauss, 10 divise $(u + 1)$ ce qui est impossible, car $1 \leq u + 1 \leq 9$. Le chiffre de contrôle permettra donc de détecter l'erreur.

73 Partie A

1	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	D	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1

2 On conjecture que $D \in \{1; 5\}$ et que les entiers $n^3 + n$ et $2n + 1$ ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, $n \equiv 2(5)$.

Partie B

1 a. Comme d divise $2n + 1$, on a l'existence d'un entier k tel que $2n + 1 = kd$ ce qui s'écrit aussi $kd - 2n = 1$. D'après le théorème de Bézout, d et n sont premiers entre eux.

b. On a $d \mid n(n^2 + 1)$ et d est premier avec n , donc d'après le théorème de Gauss, d divise $n^2 + 1$.

c. $4(n^2 + 1) - (2n - 1)(2n + 1) = 4n^2 + 4 - 4n^2 + 1 = 5$.

d. Comme d divise $n^2 + 1$ et $2n + 1$, il divise aussi $4(n^2 + 1) - (2n - 1)(2n + 1)$, donc il divise 5.

On a montré que tout diviseur commun à $n^2 + 1$ et $2n + 1$ divise 5, donc appartient à l'ensemble $\{-5; -1; 1; 5\}$; de plus, D est positif, donc $D \in \{1; 5\}$.

2 a. $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$, donc $5 \mid n^2 + 1$.

$2n + 1 = 2(5k + 2) + 1 = 10k + 5 = 5(2k + 1)$, donc $5 \mid 2n + 1$.

Dans ce cas, on a 5 divise $n^3 + n$ et $2n + 1$.

Or, $D \in \{1; 5\}$, donc $D = 5$.

b. Si $D = 5$, alors $n^3 + n$ et $2n + 1$ sont divisibles par 5 ce qui s'écrit $n^3 + n \equiv 0(5)$ et $2n + 1 \equiv 0(5)$.

Or, l'entier n est congru à 0, 1, 2, 3 ou 4 modulo 5.

modulo 5, n est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, n³ + n est congru à	0	2	0	0	3
modulo 5, 2n + 1 est congru à	1	3	0	2	4

Le seul cas pour lequel on a simultanément $n^3 + n \equiv 0(5)$ et $2n + 1 \equiv 0(5)$ est le cas $n \equiv 2(5)$, c'est-à-dire n s'écrit sous la forme $n = 5k + 2$ avec k entier.

74 1 Comme le corps céleste A passe tous les 105 jours, le nombre de jours qui s'écoulera jusqu'à une nouvelle apparition est un multiple de 105, donc $x = 105u$ avec u entier. Comme le corps céleste B apparaît 6 jours plus tard et a une fréquence d'apparition de 81 jours, on aura $x - 6$ multiple de 81, c'est-à-dire $x - 6 = 81v$ avec v entier.

2 On obtient :

$$105u - 6 = 81v \Leftrightarrow 105u - 81v = 6 \Leftrightarrow 35u - 27v = 2.$$

3 a. $35 = 27 \times 1 + 8$; $27 = 8 \times 3 + 3$; $8 = 3 \times 2 + 2$; $3 = 2 \times 1 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } 1 &= 3 - 2 = 3 - (8 - 3 \times 2) = -8 + 3 \times 3 \\ &= -8 + 3 \times (27 - 8 \times 3) = 3 \times 27 - 10 \times 8 \\ &= 3 \times 27 - 10 \times (35 - 27) = 27 \times 13 - 10 \times 35 \\ &= -10 \times 35 - 27 \times (-13). \end{aligned}$$

Un couple solution est $(-10; -13)$.

b. $(u_0; v_0) = (-20; -26)$.

4 35 divise $27(v + 26)$ et 35 est premier avec 27, donc, d'après le théorème de Gauss, on aura 35 divise $(v + 26)$. Il existe un entier λ tel que $(v + 26) = 35\lambda$, donc $v = 35\lambda - 26$.

On a alors $35(u + 20) = 27 \times 35\lambda$ et donc $u = 27\lambda - 20$.

Réciproquement, $35(27\lambda - 20) - 27(35\lambda - 26) = 2$.

L'ensemble des couples-solutions sont ceux de la forme $(27\lambda - 20; 35\lambda - 26)$, où $\lambda \in \mathbb{Z}$.

5 En reportant les expressions de u et v dans le système du **1**, on obtient $x = 2835\lambda - 2100$.

On cherche la plus petite valeur positive de x , on prend $\lambda = 1$, donc $x = 735$.

La date d'apparition simultanée des deux corps célestes aura lieu le 31 décembre 2013 (attention, 2012 est une année bissextile).

75 **1** Supposons que l'un des deux veuille donner n euros à l'autre, ce qui revient à trouver des entiers u et v tels que $7u + 11v = n$ (u ou v négatif correspond à un rendu de monnaie).

Comme 11 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers a et b tels que $7a + 11b = 1$, alors on aura $7an + 11bn = n$.

2 a. Une solution particulière de $7x + 11y = N$ est $(-3N; 2N)$.

b. On a $\begin{cases} 7x + 11y = N \\ 7 \times (-3N) + 11 \times (2N) = N \end{cases}$;

donc $7(x + 3N) + 11(y - 2N) = 0$ ce qui équivaut à $7(x + 3N) = 11(-y + 2N)$.

c. 7 divise $11(-y + 2N)$ et 7 est premier avec 11, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $(-y + 2N)$, c'est-à-dire il existe k entier tel que $(-y + 2N) = 7k \Leftrightarrow y = 2N - 7k$.

De plus, $7(x + 3N) = 11 \times 7k$, donc $x + 3N = 11k$ ce qui équivaut à $x = 11k - 3N$.

d. On veut $x \geq 0$ et $y \geq 0$, c'est-à-dire $k \geq \frac{3N}{11}$ et $k \leq \frac{2N}{7}$, donc on doit avoir $k \in \left[\frac{3N}{11}; \frac{2N}{7} \right]$ avec k entier.

e. L'amplitude de cet intervalle est :

$$\frac{2N}{7} - \frac{3N}{11} = \frac{N}{77} \geq 1, \text{ car } N \geq 77.$$

L'intervalle contient au moins un entier, donc l'affirmation de Gemma est légitime.

76 **1 a.** $(1 + \sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{6}$;

$$(1 + \sqrt{6})^4 = (7 + 2\sqrt{6})^2 = 73 + 28\sqrt{6} ;$$

$$(1 + \sqrt{6})^6 = (7 + 2\sqrt{6})(73 + 28\sqrt{6}) = 847 + 342\sqrt{6}.$$

$$\mathbf{b.} \quad 847 = 342 \times 2 + 163 ; 342 = 163 \times 2 + 16 ;$$

$$163 = 16 \times 10 + 3 ; 16 = 3 \times 5 + 1.$$

Les entiers 847 et 342 sont premiers entre eux, car leur PGCD vaut 1.

2 a. $a_1 = 1 ; b_1 = 1 ; a_2 = 7 ; b_2 = 2$.

$$\mathbf{b.} \quad (1 + \sqrt{6})^{n+1} = (1 + \sqrt{6})^n (1 + \sqrt{6}) \\ = (a_n + b_n \sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) = (a_n + 6b_n) + (a_n + b_n) \sqrt{6}.$$

$$\text{D'où } a_{n+1} = a_n + 6b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + b_n.$$

3 a. Supposons que 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$, alors 5 divise $2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$.

Comme 5 divise $5b_n$, alors 5 divise $2(a_n + b_n)$ et 5 étant premier avec 2, d'après le théorème de Gauss, on aura 5 divise $a_n + b_n$.

Par contraposée, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$.

b. Initialisation : pour $n = 1$, $a_1 + b_1 = 2$ et 5 ne divise pas 2.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel n , 5 ne divise pas $a_n + b_n$ et démontrons que 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$. C'est ce qui a été démontré dans la question précédente.

Par récurrence, on a montré que pour tout entier naturel non nul n , 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

4 a. Supposons que a_n et b_n sont premiers entre eux et considérons un diviseur d commun à a_{n+1} et b_{n+1} .

On a d divise $a_{n+1} - b_{n+1}$, donc d divise $5b_n$. Or, $d \neq 5$ sinon, on aurait $5 | a_{n+1} + b_{n+1}$ ce qui est impossible d'après la question précédente. Comme 5 ne divise pas b_n (d'après **2 b.** et **3 b.**), d divise b_n .

De plus, d divise $b_{n+1} - b_n = a_n$, donc d est un diviseur commun à a_n et b_n , mais a_n et b_n sont premiers entre eux, donc $d = 1$.

Ainsi, a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

b. Initialisation : pour $n = 1$, a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel n , a_n et b_n sont premiers entre eux, et démontrons que a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. C'est ce qui a été démontré dans la question précédente.

Par récurrence, on a montré que pour tout entier naturel non nul n , a_n et b_n sont premiers entre eux.

➔ Problèmes

77 **1** Il existe des entiers k et k' tels que $a = p_1 k$ et $a = p_2 k'$.

On a donc $p_1 | p_2 k'$ et p_1 premier avec p_2 , donc d'après le théorème de Gauss, $p_1 | k'$. Il existe alors un entier ℓ tel que $k' = p_1 \ell$; d'où $a = p_2 p_1 \ell$ et donc $p_1 p_2 | a$.

2 On suppose que $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}$ sont des nombres premiers distincts deux à deux qui divisent tous a .

D'après l'hypothèse de récurrence, comme $p_1, p_2, \dots, p_n$ divisent a , on aura $(p_1 p_2 \dots p_n) | a$, c'est-à-dire il existe un entier k tel que $a = k \times p_1 p_2 \dots p_n$; de plus, comme $p_{n+1} | a$, il existe un entier k' tel que $a = k' \times p_{n+1}$.

On obtient $(p_1 p_2 \dots p_n) | k' p_{n+1}$; or, $(p_1 p_2 \dots p_n)$ et p_{n+1} sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, $(p_1 p_2 \dots p_n) | k'$. Il existe un entier ℓ tel que $k' = \ell (p_1 p_2 \dots p_n)$.

Ainsi, $a = \ell \times p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}$ et donc $p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} | a$.

3 Par récurrence, on a montré que si $p_1, p_2, \dots, p_n$ ($n \geq 2$) sont des nombres premiers deux à deux distincts tels que $p_1 | a ; p_2 | a ; \dots ; p_n | a$, alors le produit $p_1 p_2 \dots p_n$ divise a .

78 **1** L'entier n est un produit d'au moins deux nombres premiers distincts ($k \geq 2$), donc il n'est pas premier.

2 a. S'il existe un facteur p_i qui divise a , alors comme $p_i | n$, a et n ne seraient pas premiers entre eux. Donc aucun des facteurs p_i ne divise a .

b. L'entier a est premier avec p_i pour tout i , $1 \leq i \leq k$, donc, d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p_i-1} \equiv 1 (p_i)$.

c. D'après l'hypothèse, pour tout entier i , $1 \leq i \leq k$, $(p_i - 1)$ divise $(n - 1)$, il existe un entier k_i tel que $(n - 1) = k_i (p_i - 1)$.

D'où $a^{(p_i-1)k_i} \equiv 1^{k_i} (p_i)$, donc, pour tout entier i , $1 \leq i \leq k$, $a^{n-1} \equiv 1 (p_i)$.

3 a. L'entier $a^{n-1} - 1$ est divisible par tous les nombres premiers p_i , donc d'après l'exercice 77, il est divisible par leur produit. Finalement, $a^{n-1} - 1 \equiv 0(n)$ ce qui signifie que $a^{n-1} \equiv 1(n)$.

b. L'entier n est non premier et vérifie, « pour tout entier a premier avec p , $a^{p-1} \equiv 1(p)$ », c'est un nombre de Carmichael.

4 $561 = 3 \times 11 \times 17$. On a $2 \mid 560$, $10 \mid 560$ et $16 \mid 560$, donc 561 est un nombre de Carmichael.

79 1 a. b. $561 = 3 \times 11 \times 17$ avec 3^2 , 11^2 et 17^2 qui ne divisent pas 561, et $2 \mid 560$, $10 \mid 560$, $16 \mid 560$;
 $1105 = 5 \times 13 \times 17$ avec 5^2 , 13^2 et 17^2 qui ne divisent pas 1105 et $4 \mid 1104$, $12 \mid 1104$, $16 \mid 1104$;
 $1729 = 7 \times 13 \times 19$ avec 7^2 , 13^2 et 19^2 qui ne divisent pas 1729 et $6 \mid 1728$, $12 \mid 1728$, $18 \mid 1728$.

2 a. De façon évidente, $p - 1 \equiv 0(p - 1)$ et $n - 1 \equiv 0(p - 1)$, car $p - 1 \mid n - 1$.
 Donc $p \equiv 1(p - 1)$ et $n \equiv 1(p - 1)$.

b. Comme p intervient dans la décomposition en facteurs premiers de n , on a p divise n et $\frac{n}{p}$ est un entier.
 Ainsi, $n = \frac{n}{p} \times p \equiv \frac{n}{p}(p - 1)$ et comme $n \equiv 1(p - 1)$, alors $\frac{n}{p} \equiv 1(p - 1)$.

c. Comme p^2 ne divise pas n , le produit des autres facteurs premiers est $\frac{n}{p}$ et il est congru à 1 modulo $p - 1$.

3 Supposons que $n = pq$ soit un nombre de Carmichael (p et q premiers).
 D'après la question 2 c., on aurait $q \equiv 1(p - 1)$ et $p \equiv 1(q - 1)$, donc $p - 1$ serait une multiple de $q - 1$ et $q - 1$ un multiple de $p - 1$; donc on aurait $p = q$ et $n = p^2$ ce qui contredirait le théorème de Korselt, car p^2 diviserait n .

4 Comme un nombre de Carmichael a au moins trois facteurs premiers distincts, il en a au moins un impair ; soit p ce facteur premier impair. Alors, comme $p - 1$ divise $n - 1$ et que $p - 1$ est pair, on a $n - 1$ pair, c'est-à-dire n impair.

80 1 $85 = 16 \times 5 + 5$; $16 = 5 \times 3 + 1$.
 Donc $1 = 16 - 5 \times 3 = 16 - (85 - 16 \times 5) \times 3$
 $= -3 \times 85 + 16 \times 16 = -3 \times 85 - 16 \times (-16)$.
 Un couple solution de cette équation est $(-3 ; -16)$.

2 On a $\begin{cases} 85p - 16k = 1 \\ 85 \times (-3) - 16 \times (-16) = 1 \end{cases}$; donc par soustraction, $85(p + 3) - 16(k + 16) = 0$ ce qui équivaut à $85(p + 3) = 16(k + 16)$.

85 divise $16(k + 16)$ et 85 est premier avec 16, donc d'après le théorème de Gauss, 85 divise $(k + 16)$.

Il existe donc un entier λ tel que $(k + 16) = 85\lambda$, donc $k = 85\lambda - 16$.

On a alors $85(p + 3) = 16 \times 85\lambda$ et donc $p = 16\lambda - 3$. Réciproquement, $85(16\lambda - 3) - 16(85\lambda - 16) = 1$.

L'ensemble des couples-solutions sont ceux de la forme $(16\lambda - 3 ; 85\lambda - 16)$, où $\lambda \in \mathbb{Z}$.

3 Si n est un nombre de Carmichael divisible par 5 et 17, alors $n = 5 \times 17 \times p = 85p$, où p est un produit de nombres premiers distincts de 5 et 17.

D'après le théorème de Korselt (voir exercice 79), on a également $4 \mid n - 1$ et $16 \mid n - 1$.

Or, si $16 \mid n - 1$ on a également $4 \mid n - 1$, donc $n - 1 = 16k$, c'est-à-dire $n = 16k + 1$.

On obtient alors $85p = 16k + 1$ ce qui équivaut à $85p - 16k = 1$.

La plus petite valeur de n sera obtenue pour la plus petite valeur de p , sachant que $p = 16\lambda - 3$.

On prend donc $\lambda = 1$ et donc $p = 13$.

Ainsi, $n = 85 \times 13 = 1105$.

81 1 a. $12 = 2^2 \times 3$.

b. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$.

c. $\varphi(12) = 4$; $P(E) = \frac{1}{3}$.

2 a. Il y a $\frac{n}{p}$ multiples de p appartenant à S_n , donc

$$P(C) = \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}.$$

b. Il y a $\frac{n}{q}$ multiples de q appartenant à S_n , donc

$$P(D) = \frac{\frac{n}{q}}{n} = \frac{1}{q}.$$

c. Si $pq \mid a$, alors de façon évidente $p \mid a$ et $q \mid a$ puisque p et q divisent pq .

La réciproque est résolue dans la question 1 de l'exercice 77.

d. L'événement $C \cap D$ est « l'entier est divisible par pq ».

Cet événement comporte $\frac{n}{pq}$ éléments.

$$\text{Donc } P(C \cap D) = \frac{\frac{n}{pq}}{n} = \frac{1}{pq}.$$

e. On a $P(C \cap D) = P(C) \times P(D)$, donc C et D sont indépendants.

f. L'entier est premier avec n signifie qu'il n'est pas multiple de p et pas multiple de q . Donc $F = \overline{C} \cap \overline{D}$.

g. Comme C et D sont indépendants, $\overline{C}$ et $\overline{D}$ également, donc

$$P(F) = P(\overline{C} \cap \overline{D}) = P(\overline{C}) \times P(\overline{D}) = (1 - P(C))(1 - P(D)) \\ = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Or, $P(F) = \frac{\varphi(n)}{n}$, donc finalement :

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Remarque : dans la question 1, on vérifie bien que :

$$\varphi(12) = 12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4.$$

82 1 a. $2\,017 = 123 \times 16 + 49$; $123 = 49 \times 2 + 25$;
 $49 = 25 \times 1 + 24$; $25 = 24 \times 1 + 1$;

$$1 = 25 - 24 = 25 - (49 - 25) = -49 + 2 \times 25$$

$$= -49 + 2(123 - 49 \times 2) = 2 \times 123 - 5 \times 49$$

$$= 2 \times 123 - 5(2\,017 - 123 \times 16) = 82 \times 123 - 5 \times 2\,017.$$

Un couple (u, v) solution est $(82 ; -5)$.

b. On a $82 \times 123 - 5 \times 2017 \equiv 82 \times 123 (2017)$, donc l'entier k cherché peut être 82.

c. On suppose $123x \equiv 456 (2017)$, alors $123xk \equiv 456k (2017)$; or, $123k \equiv 1 (2017)$, donc $x \equiv 456k (2017)$.

Réciproquement : si $x \equiv 456k (2017)$,

alors $123x \equiv 456 \times 123k (2017)$,

donc $123x \equiv 456 (2017)$.

d. $123x \equiv 456 (2017) \Leftrightarrow x \equiv 456k (2017)$

$\Leftrightarrow x \equiv 1086 (2017)$,

car $456k = 456 \times 82 = 37\,392 \equiv 1086 (2017)$.

Donc les entiers x cherchés sont de la forme : $x = 1086 + 2017p$, où p est un entier quelconque.

e. On cherche p tel que $1 \leq 1086 + 2017p \leq 2016$.

Seule la valeur $p = 0$ convient, donc l'entier cherché est 1 086.

2 a. PGCD ($a, 2017$) = 1, car 2 017 est premier.

Comme a et 2 017 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers m et p tels que $am + 2017p = 1$, donc $am \equiv 1 (2017)$.

b. Comme $am \equiv 1 (2017)$ alors, pour tout entier b , $amb \equiv b (2017)$.

Si $0 \leq mb \leq 2016$, on pose $mb = x$ et on a bien $ax \equiv b (2017)$.

Si $mb \geq 2017$ ou si $mb < 0$, on effectue la division euclidienne de mb par 2 017, on a alors $mb = 2017q + r$ avec $0 \leq r \leq 2016$.

$mb \equiv r (2017)$, donc $amb \equiv ar (2017)$,

d'où $ar \equiv b (2017)$.

Si on pose $r = x$ et on a bien $ax \equiv b (2017)$ et $0 \leq x \leq 2016$.

Unicité de l'entier x : supposons qu'il existe deux entiers x et x' tels que $0 \leq x \leq 2016$, $0 \leq x' \leq 2016$, $ax \equiv b (2017)$ et $ax' \equiv b (2017)$.

On a alors $ax \equiv ax' (2017)$, donc $a(x - x') \equiv 0 (2017)$.

2 017 divise $a(x - x')$ et est premier avec a , donc, d'après le théorème de Gauss, 2 017 divise $x - x'$.

Mais $-2016 \leq x - x' \leq 2016$, donc le seul multiple de 2 017 possible dans cet intervalle est 0.

Conclusion : $x = x'$.

83 1 a. Si $p_i \neq q_j$, alors p_i et q_j sont premiers entre eux, donc $p_i^{\alpha_i}$ et $q_j^{\beta_j}$ sont premiers entre eux.

b. Soit i un entier compris entre 1 et m . Si, pour tout j compris entre 1 et r , $p_i \neq q_j$ alors, d'après **1 a.** pour tout j compris entre 1 et r , $p_i^{\alpha_i}$ est premier avec $q_j^{\beta_j}$, donc $p_i^{\alpha_i}$ est premier avec $q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \dots \times q_r^{\beta_r}$; ceci est faux, car $p_i^{\alpha_i}$ divise n . Donc, il existe un entier j compris entre 1 et r tel que $p_i = q_j$.

c. Comme chaque p_i est égal à un q_j , il y a le même nombre de q_j que de p_i , c'est-à-dire $m = r$. Comme, de plus, les facteurs premiers sont ordonnés, $p_1 = q_1$; $p_2 = q_2$; ... ; $p_m = q_m$.

2 Soit $N = p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_m^{\alpha_m} = p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_m^{\beta_m}$.

Si $p_1^{\beta_1 - \alpha_1}$ est premier avec chaque $p_i^{\alpha_i}$ pour $2 \leq i \leq m$, il est premier avec leur produit N ce qui est absurde, car il divise N . Donc $\alpha_1 = \beta_1$. On montre de même que

$\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_m = \beta_m$, d'où l'unicité de la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

84 1 Comme $F_n \geq 3$, alors soit F_n est premier, soit il s'écrit comme produit de facteurs premiers, donc il possède au moins un facteur premier p_n .

2 Si m et n sont distincts, alors F_m et F_n sont premiers entre eux, donc aucun facteur premier intervenant dans la décomposition de F_m n'intervient dans celle de F_n , donc $p_m \neq p_n$.

3 La suite des nombres de Fermat étant infinie, elle permet d'exhiber une suite infinie de nombres premiers deux à deux distincts puisque les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux à deux.

85 1 L'ensemble des multiples communs à a et b est non vide, car il contient le produit ab . Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, donc l'entier m existe.

2 Multiples de 9 : 9, 18, 27, **36**, 45, ...

Multiples de 12 : 12, 24, **36**, 48, ...

PPCM (9, 12) = 36.

Multiples de 10 : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, **90**, ...

Multiples de 18 : 18, 36, 54, 72, **90**, ...

PPCM (10, 18) = 90.

Multiples de 11 : 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143, 154, 165, **176**, 187, ...

Multiples de 16 : 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, **176**, ...

PPCM (11, 16) = 176.

3 a. Les multiples non nuls de 1 sont tous les entiers naturels non nuls et le plus petit multiple non nul de a est a , donc PPCM (1, a) = a .

b. Comme a est un multiple de b et que a est le plus petit multiple non nul de a , il sera le PPCM de a et b : si $b \mid a$, alors PPCM (a, b) = a .

4 a. m est un multiple commun à a et à b , et M est un multiple de m , donc M est un multiple commun à a et b .

b. Soit M un multiple commun à a et b , la division euclidienne de M par m s'écrit : $M = mq + r$ avec $0 \leq r < m$. Or, M et mq sont des multiples communs à a et b , donc $M - mq$ également, c'est-à-dire r est un multiple commun à a et b . Comme $0 \leq r < m$, par définition de m , $r = 0$; ainsi, $M = mq$ et M est un multiple de m .

Conclusion : l'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de leur PPCM.

5 Soit m un multiple commun à a et b . Il existe des entiers k et k' tels que $m = ka = k'b$.

Comme a divise $k'b$ et a premier avec b , alors d'après le théorème de Gauss, a divise k' . Il existe donc un entier k'' tel que $k' = ak''$.

On obtient $m = abk''$, c'est-à-dire m est un multiple de ab ce qui prouve que $ab = \text{PPCM}(a, b)$.

86 1 a. Comme $a \mid m$ et $b \mid m$, alors $ka \mid km$ et $kb \mid km$.

b. km est un multiple commun à ka et kb , donc, d'après l'exercice précédent, on a $M \mid km$.

c. De plus $k|ka$ et $k|kb$, donc $k|M$; ainsi, il existe un entier n tel que $M = kn$.

d. Comme $ka|M$ et $kb|M$, alors $ka|kn$ et $kb|kn$, donc $a|n$ et $b|n$, et n est un multiple commun à a et b .

e. On a donc $m|n$, puis $km|kn$, c'est-à-dire $km|M$.

Conclusion : $M = km$ ce qui s'écrit aussi :

$$\text{PPCM}(ka, kb) = k \times \text{PPCM}(a, b).$$

2 a. D'après la propriété caractéristique du PGCD, page 480, il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.

b. $\text{PPCM}(a, b) = \text{PPCM}(da', db') = d \times \text{PPCM}(a', b') = d$ d'après l'exercice 85, question 5.

c. En multipliant par d , on obtient :

$d \times \text{PPCM}(a, b) = da'db'$ ce qui revient à écrire :

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab.$$

87 1 a. $a^2 = b^3$, donc $d^2u^2 = d^3v^3$ et comme d est non nul, on obtient $u^2 = dv^3$.

b. D'après la propriété caractéristique, u et v sont premiers entre eux.

$v|dv^3$, donc $v|u^2$ et comme v est premier avec u , d'après le théorème de Gauss, $v|u$ et donc $v = 1$.

2 On a donc $a = du$ et $b = d$.

Si $a^2 = b^3$, alors $d^2u^2 = d^3$ et donc $u^2 = d$. Ainsi, $a = d^3$ et $b = u^2$.

Réciproquement, si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier on a :

$a = d^3$ et $b = d^2$. Donc $a^2 = b^3 = d^6$.

On a prouvé l'équivalence.

88 Partie A

$$1 \begin{cases} n \equiv 2(3) \\ n \equiv 3(5) \\ n \equiv 2(7) \end{cases}$$

2 On a bien $\begin{cases} 23 \equiv 2(3) \\ 23 \equiv 3(5), \text{ donc } 23 \text{ est une solution.} \\ 23 \equiv 2(7) \end{cases}$

Tout entier de la forme $23 + 3 \times 5 \times 7k$, où k est un entier naturel, est solution du système, car $3 \times 5 \times 7k = 105k$ est congru à 0 modulo 3, 5 et 7.

Partie B

1 a. On a $x_0 \equiv a(m)$, donc $x_0 = km + a$; or, $m = k'D$, donc $x_0 = kk'D + a$ ce qui signifie que $x_0 \equiv a(D)$.

On a $x_0 \equiv b(n)$, donc $x_0 = kn + b$; or, $n = k''D$, donc $x_0 = kk''D + b$ ce qui signifie que $x_0 \equiv b(D)$.

Comme $x_0 \equiv a(D)$ et $x_0 \equiv b(D)$ on a $a \equiv b(D)$.

b. D'après la propriété du cours, page 482, il existe des entiers u et v tels que $mu + nv = D$.

Donc $a - b = kD = kmu + knv$.

On obtient $a - kum = b + knv$; or, $a - kum \equiv a(m)$ et $b + knv \equiv b(n)$, donc l'entier $a - kum$ est solution du système.

c. Si m et n sont premiers entre eux, alors $D = 1$ et on a toujours $a \equiv b(1)$.

2 a. $x_0 + tmn \equiv x_0 \equiv a(m)$ et $x_0 + tmn \equiv x_0 \equiv b(n)$, donc $x_0 + tmn$ est solution de (S).

$$b. \text{ On a } \begin{cases} x = km + a \\ x_0 = k'm + a' \end{cases}$$

donc $x - x_0 = (k - k')m$, c'est-à-dire m divise $x - x_0$.

$$\text{On a aussi } \begin{cases} x = \ell n + b \\ x_0 = \ell' n + b' \end{cases}$$

donc $x - x_0 = (\ell - \ell')n$, c'est-à-dire n divise $x - x_0$.

Comme m et n sont premiers entre eux, mn divise $x - x_0$, donc $x - x_0 = tmn$ ce qui revient à dire que $x = x_0 + tmn$.

Partie C

1 a. $a = 2$; $b = 3$; $m = 3$; $n = 5$; $D = 1$; $k = -1$.

b. $(u; v) = (2; -1)$.

c. La solution est $x_0 = 2 + 2 \times 3 = 8$.

d. Les solutions de (S') sont les entiers :
$$x_0 + tmn = 8 + 15t.$$

2 a. $8 + 15t \equiv 2(7) \Leftrightarrow 15t \equiv 1(7)$ or $15 \equiv 1(7)$, donc $8 + 15t \equiv 2(7) \Leftrightarrow t \equiv 1(7)$.

b. On a $t = 7h + 1$ avec h entier, donc :

$x = 8 + 15(7h + 1) = 23 + 105h$, avec h entier relatif.

c. 105 est congru à 0 modulo 3, 5 et 7, donc $23 + 105h$ est congru à 2 modulo 3, à 3 modulo 5 et à 2 modulo 7.

Matrices et suites

Introduction

1. Programme

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations.
Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p .	• Matrice inverse d'une matrice carrée.
Étude du principe du calcul de la pertinence d'une page Web.	• Exemples de calcul de la puissance n -ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.
Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient.	• Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: – recherche d'une suite constante vérifiant la relation de convergence ; – étude de la convergence.
Modèle proie prédateur discrétisé : – évolution couplée de deux suites récurrentes ; – étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

2. Intentions des auteurs

Conformément au programme, l'introduction des matrices est faite en situation et en prenant appui sur la résolution de problèmes. Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices.

Les matrices sont définies comme des tableaux de nombres, sur lesquels on effectue des opérations. Le vocabulaire nouveau est introduit au fur et à mesure des besoins. Les définitions et les théorèmes auxquels il est nécessaire de faire référence ne sont pas sortis du contexte du problème.

Le recours à la calculatrice ou à des logiciels de calcul permettent de se libérer des phases de calcul, dont la conduite et l'achèvement éloigneraient trop les élèves du problème traité.

Les problèmes et situations choisis conduisent à un travail de modélisation et placent les élèves en position de recherche.

Du problème vers les notions

Activité 1

Prix, taxes et soldes

Objectif

Donner un sens à des « opérations » sur des tableaux.

1 Pour calculer le montant de la TVA, on multiplie chaque montant HT par le taux 0,196.

$$B = 0,196 \times A = \begin{pmatrix} 14,7 & 15,68 & 13,72 \\ 11,76 & 12,74 & 11,76 \\ 18,62 & 17,64 & 17,64 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 89,7 & 95,68 & 83,72 \\ 71,76 & 77,74 & 71,76 \\ 113,62 & 107,64 & 107,64 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3} \quad D = C - 0,4 \times C = 0,6 \times C = \begin{pmatrix} 53,82 & 57,408 & 50,232 \\ 43,056 & 46,644 & 43,056 \\ 68,172 & 64,584 & 64,584 \end{pmatrix}.$$

Activité 2 Équilibre alimentaire

Objectif : Donner un sens à des « opérations » sur des tableaux.

1 a. L'apport énergétique des glucides du menu est :
 $17 \times 1,4 + 120 \times 1,6 + 76,4 \times 1 = 292,2$ kcal.

b. L'apport énergétique des lipides du menu est :
 $27 \times 1,4 + 135 \times 1,6 + 0,9 \times 1 = 254,7$ kcal.

L'apport énergétique des protéines du menu est :
 $124 \times 1,4 + 15,2 \times 1,6 + 0,8 \times 1 = 198,72$ kcal.

c. Le total énergétique du menu ① est 745,62 kcal.

La proportion de glucides est environ 39,2 %, de lipides est environ 34,2 %, et de protéines est environ 26,7 %.

Le menu ① ne respecte pas les préconisations de l'AFSSAPS.

2 a. Pour le menu ② : au total 775,78 kcal ;

• apport des glucides : 395,98 kcal, soit environ 51 % du total ;

• apport des lipides : 263,88 kcal, soit environ 34 % du total ;

• apport des protéines : 115,92 kcal, soit 15 % du total.

Le menu ② respecte les préconisations de l'AFSSAPS.

b. Le menu ② a un total de 775,78 kcal, soit légèrement moins de 800 kcal.

Activité 3 Recherche d'une parabole

Objectif : Regarder en quoi l'utilisation des matrices simplifie la recherche d'un problème classique ; déterminer l'équation d'une parabole passant par trois points.

1 a. Les points M, N et P appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$ si, et seulement si, leurs coordonnées vérifient l'équation $y = ax^2 + bx + c$ de la parabole, soit :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}$$

b. En posant $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, le système

est équivalent à : $A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B$.

c. On obtient $A \times C = I_3$ et $C \times A = I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3. On a : $C = A^{-1}$.

$$\mathbf{d.} \quad A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \Leftrightarrow C \times A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C \times B$$

$$\Leftrightarrow I_3 \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C \times B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C \times B.$$

$$\mathbf{e.} \quad C \times B = \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,2 \\ -1,8 \end{pmatrix}.$$

La parabole $\mathcal{P}$ passant par les points M, N et P admet pour équation : $y = 0,6x^2 - 0,2x - 1,8$.

$$\mathbf{2 a.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b. La calculatrice renvoie un message d'erreur.

c. Le problème n'a pas de solution, car les points N et P ont même abscisse. Il n'existe alors pas de parabole représentant une fonction qui passe par ces deux points.

3 a. Les points M, N et P appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$

$$\text{si, et seulement si, } A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_M \\ y_N \\ y_P \end{pmatrix}.$$

b. D'après le logiciel, la matrice inverse de A existe si, et seulement si, les réels t, u et v sont deux à deux distincts.

$$\text{Dans ce cas, on a alors } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} y_M \\ y_N \\ y_P \end{pmatrix}.$$

Il est donc suffisant que les réels t, u et v soient deux à deux distincts.

Activité 4 Prévoir le temps ?

Objectif : Comment utiliser le calcul matriciel pour étudier deux suites numériques imbriquées.

1 a. Pour tout entier $n \geq 0$, d'après la formule des probabilités totales :

$$s_{n+1} = \frac{5}{6}s_n + \frac{1}{3}h_n \text{ et } h_{n+1} = \frac{1}{6}s_n + \frac{2}{3}h_n.$$

Donc en utilisant la définition du produit de matrices :

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix}.$$

b. On montre par récurrence la propriété $P(n)$:

$$\ll \begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} s_0 \\ h_0 \end{pmatrix} \gg$$

► **Initialisation :** $A^0 = I_2$. Donc $\begin{pmatrix} s_0 \\ h_0 \end{pmatrix} = A^0 \times \begin{pmatrix} s_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$.
Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité :** soit un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie.

Alors $\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix} = A \times A^n \times \begin{pmatrix} s_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Donc $\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \times \begin{pmatrix} s_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} s_0 \\ h_0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2 a.} \quad \begin{pmatrix} s_7 \\ h_7 \end{pmatrix} = A^7 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{257}{384} \\ \frac{127}{384} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } s_7 = \frac{257}{384} \approx 0,67.$$

$$\text{b. } A^{10} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{683}{1024} \\ \frac{341}{1024} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,667 \\ 0,333 \end{pmatrix};$$

$$A^{20} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,66667 \\ 0,33333 \end{pmatrix};$$

$$A^{30} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,66667 \\ 0,33333 \end{pmatrix}.$$

Il semble que $A^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tende vers $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, lorsque n devient « grand ».

$$\begin{aligned} \text{3. } A \times X &= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = X. \end{aligned}$$

4 a. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P(n)$:
« $A^n = B + (0,5)^{n-1} \times C$ ».

► **Initialisation** : $A^1 \times A = B + (0,5)^0 \times C = B + C = A$. Donc $P(1)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors $A^{n+1} = A \times A^n = (B + C) \times (B + (0,5)^{n-1} \times C)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc en développant,

$$A^{n+1} = B^2 + (0,5)^{n-1} B \times C + C \times B + (0,5)^{n-1} \times C^2.$$

$$\text{Or } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \text{ Donc } B \times C = 0_2 \text{ et } C \times B = 0_2.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = B \text{ et } C^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = 0,5 \times C.$$

$$\text{Donc } A^{n+1} = B + 0_2 + 0_2 + (0,5)^{n-1} \times 0,5 \times C.$$

$$\text{Donc } A^{n+1} = B + (0,5)^n \times C. \text{ Ainsi } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

► **Conclusion** :

pour tout entier $n \geq 1$,

$$A^n = B + (0,5)^{n-1} \times C.$$

b. D'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix} = (B + (0,5)^{n-1} \times C) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En développant,

$$\begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0,5)^{n-1} \times C \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (0,5)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } s_n = \frac{2}{3} + \frac{(0,5)^{n-1}}{6}. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{2}{3}.$$

À long terme, la probabilité qu'il fasse sec un jour donné tend vers $\frac{2}{3}$.

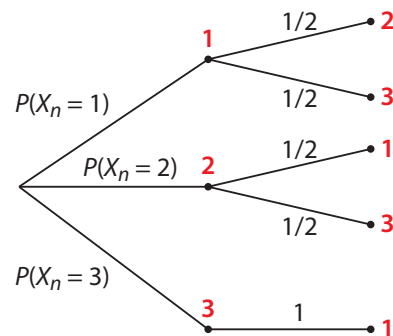
Activité 5 Pertinence d'une page Web

Objectif

Aborder un problème aléatoire d'actualité à l'aide du calcul matriciel.

Partie A – Une première approche

1 On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 2) + 1P(X_n = 3);$$

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1);$$

$$\text{et } P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2).$$

En utilisant la définition du produit de matrices, on obtient :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $U_{n+1} = A \times U_n$.

Par récurrence, on en déduit que $U_n = A^n \times U_0$.

2 Il semble que la suite (U_n) converge vers la matrice

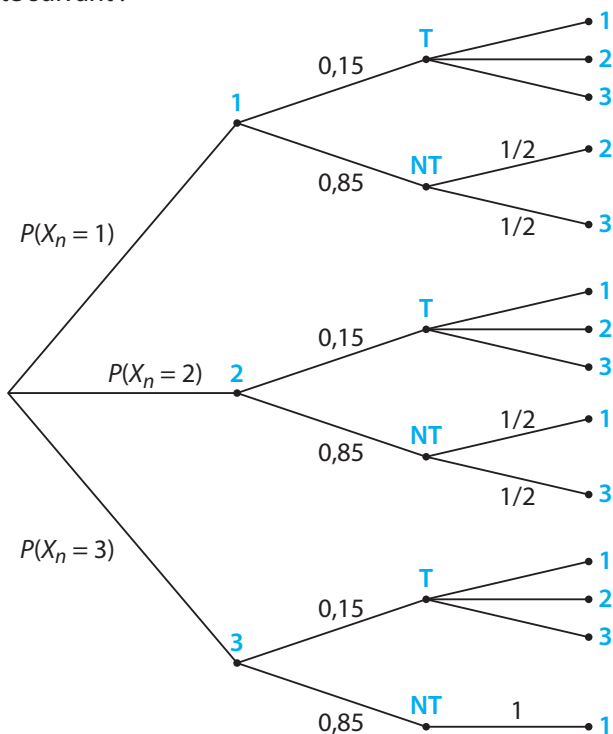
$$\text{colonne } \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty.$$

La page d'indice de pertinence le plus grand est donc la page 1, la page d'indice de pertinence le plus petit est la page 2.

Partie B – Amélioration du modèle

1 On note T l'événement « le surfeur se téléporte aléatoirement » et NT l'événement « le surfeur choisit aléatoirement parmi les pages vers lesquelles pointe la page où il se trouve ».

On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 1) &= P(X_n = 1) \times 0,15 \times \frac{1}{3} \\
 &+ P(X_n = 2) \times 0,15 \times \frac{1}{3} + P(X_n = 2) \times 0,85 \times \frac{1}{2} \\
 &+ P(X_n = 3) \times 0,15 \times \frac{1}{3} + P(X_n = 3) \times 0,85 \times 1. \\
 \text{Donc } P(X_{n+1} = 1) &= 0,85 \times \left(\frac{1}{2} P(X_n = 2) + 1 P(X_n = 3) \right) \\
 &+ 0,05 \times (P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3)). \\
 \text{Or } P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) &= 1. \text{ Donc :} \\
 P(X_{n+1} = 1) &= 0,85 \times \left(\frac{1}{2} P(X_n = 2) + 1 P(X_n = 3) \right) + 0,05.
 \end{aligned}$$

b. On obtient de la même façon que :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 2) &= 0,85 \times \frac{1}{2} P(X_n = 1) + 0,05, \\
 \text{et } P(X_{n+1} = 3) &= 0,85 \times \left(\frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{1}{2} P(X_n = 2) \right) + 0,05.
 \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant la définition du produit de matrices, on a :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = 0,85 \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix},$$

soit : $U_{n+1} = 0,85 \times A \times U_n + B.$

$$\begin{aligned}
 \text{2 } C &= 0,85 \times A \times C + B \Leftrightarrow C - 0,85A \times C = B \\
 \Leftrightarrow I_3 \times C - 0,85A \times C &= B \Leftrightarrow (I_3 - 0,85A) \times C = B.
 \end{aligned}$$

Par la calculatrice ou le logiciel Xcas, on obtient que la matrice $I_3 - 0,85A$ est inversible.

$$\text{Donc } C = 0,85 \times A \times C + B \Leftrightarrow C = (I_3 - 0,85A)^{-1} \times B$$

$$\Leftrightarrow C = (I_3 - 0,85A)^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{74}{171} \\ \frac{40}{171} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{3 On a : } \begin{cases} U_{n+1} = 0,85A \times U_n + B \\ C = 0,85A \times C + B \end{cases}.$$

Donc en soustrayant les deux lignes, on a :

$$U_{n+1} - C = 0,85A \times (U_n - C).$$

Par récurrence, on obtient que pour tout entier $n \geq 0$, $U_n - C = (0,85A)^n \times (U_0 - C)$, c'est-à-dire :

$$U_n = C + 0,85^n A^n \times (U_0 - C).$$

4 Il semble que la suite (U_n) converge vers la matrice

$$\text{colonne } C = \begin{pmatrix} \frac{74}{171} \\ \frac{40}{171} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

La page d'indice de pertinence le plus grand est donc la page 1, la page d'indice de pertinence le plus petit est la page 2.

Activité 6

Modèle de diffusion d'Ehrenfest

Objectif : Appliquer le calcul matriciel à un phénomène aléatoire en physique.

Partie A – Simulation avec tableur

1 a. En C3, on choisit un entier aléatoire entre 1 et N (en A2), simulant le choix de la particule qui change d'urne. Si cet entier est inférieur au nombre de boules de l'urne, on change une particule de l'urne A vers l'urne B (1 particule de moins en A et 1 particule de plus en B). Sinon, on procède de la même façon de l'urne B vers l'urne A.

b. c. et d. Il semble qu'au bout d'un grand nombre d'échanges, les particules se répartissent de façon équilibrée dans les deux urnes.

De façon « très rare », le phénomène peut être réversible.

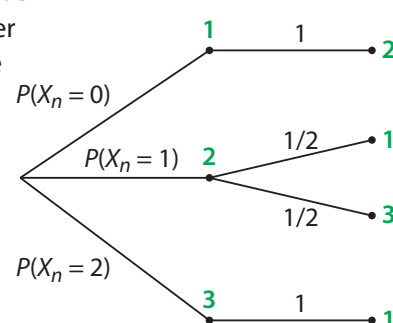
e. On obtient les mêmes résultats.

2 Avec $N = 1\,000$, on obtient les mêmes résultats.

Avec $N = 10$ et $N = 2$, on observe plus souvent la réversibilité du phénomène.

Partie B – Étude du cas $N = 2$

1 On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 1) \times \frac{1}{2};$$

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times 1 + P(X_n = 3) \times 1,$$

$$\text{et } P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 1) \times \frac{1}{2}.$$

Donc en utilisant la définition du produit de matrices :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

Donc $U_{n+1} = A \times U_n$.

2 Par récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 0$,

$$U_{n+1} = A^n \times U_0.$$

3 On obtient :

$$\text{Mat. } A^2 \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mat. } A^3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mat. } A^4 \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Il semble que pour tout entier $n \geq 1$, $A^{2n-1} = A$

$$\text{et } A^{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On démontre cette conjecture par récurrence en posant

$$P(n) : \ll A^{2n-1} = A \text{ et } A^{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 1$.

$$A^{2-1} = A \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : soit un entier $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$A^{2(n+1)-1} = A^{2n+1} = A^{2n} \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Donc } A^{2(n+1)-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = A.$$

De plus, $A^{2(n+1)} = A^{2n+2} = A^{2n+1} \times A = A \times A$ en utilisant le résultat précédent.

$$\text{Donc } A^{2(n+1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie :

$$A^{2n-1} = A \text{ et } A^{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4 Comme pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = A^n \times U_0$, on a :

$$U_{2n-1} = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

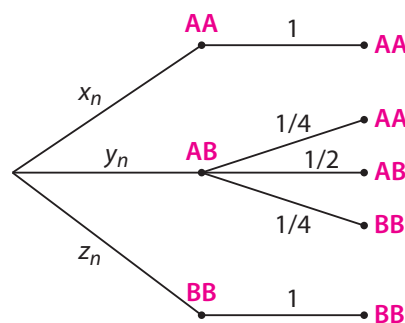
$$\text{et } U_{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La répartition des boules ne se stabilise donc pas lorsque n devient grand.

Exercices d'application

➔ Savoir faire Effectuer des calculs matriciels

1 a. On a l'arbre de proportion suivante :



$$\text{Donc } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n; y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \text{ et } z_{n+1} = z_n + \frac{1}{4}y_n.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire } p_{n+1} = A \times p_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b. } p_1 = A \times \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,325 \\ 0,25 \\ 0,425 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } p_2 = A \times p_1 = \begin{pmatrix} 0,3875 \\ 0,125 \\ 0,4875 \end{pmatrix}.$$

On en déduit la répartition des couples de gènes aux générations 1 et 2.

$$\text{c. Par exemple } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

➔ Savoir faire Calculer avec des matrices

$$\text{2 } (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 45 \\ 60 & 76 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + 2A \times B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29 & 52 \\ 13 & 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 50 \\ 49 & 89 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3 } A \times B = 0_3; B \times A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{4 1 } 4J + I_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$\text{2 } A^2 = (4J + I_2) \times (4J + I_2) = 16J^2 + 4J \times I_2 + 4I_2 \times J + (I_2)^2 = 0_2 + 4J + 4J + I_2 = 8J + I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

➔ Savoir faire Calculer et utiliser l'inverse d'une matrice carrée

5 $A^2 = I_3$. Donc $A \times A = I_3$. Ainsi la matrice A est inversible, d'inverse A .

6 On résout le système :

$$\begin{cases} x - 2y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = -3, \\ 3x + y - 2z = 11 \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle $A \times X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

On obtient : $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en utilisant la calculatrice.

$$[A]^{-1} \times [B] = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Les trois plans sont donc sécants en un unique point, dont les coordonnées sont (2 ; -1 ; -3).

7 a. On obtient :

$$[A]^2 + 5[A] = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Donc $A^2 + 5A = -4I_3$.

b. On factorise l'égalité précédente par A , et on divise par (-4) .

Ainsi $A \times (A + 5I_3) = -4I_3$, soit $A \times \left(-\frac{1}{4}A - \frac{5}{4}I_3\right) = I_3$.

Donc la matrice A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}A - \frac{5}{4}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

➔ Savoir faire Calculer la puissance n-ième d'une matrice carrée

8 a. $J^2 = 0_2$.

b. $I_2 + 4J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = A.$

c. Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$:

$$\ll A^n = I_2 + 4nJ \gg.$$

► **Initialisation** : $A^0 = I_2$ et $I_2 + 4 \times 0 \times J = I_2$.

Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

On a alors $A^n = I_2 + 4nJ$.

Alors $A^{n+1} = A \times A^n = (I_2 + 4J) \times (I_2 + 4nJ)$.

$$A^{n+1} = I_2 + 4nJ + 4J + 16nJ^2 = I_2 + 4(n+1)J + 16n0_2 = I_2 + 4(n+1)J.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : par récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $A^n = I_2 + 4nJ$.

9 a. À la calculatrice, on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
et $B = P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

b. La matrice B est diagonale. Donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Or comme $B = P^{-1} \times A \times P$, on a : $A = P \times B \times P^{-1}$.

Par récurrence, comme $P^{-1} \times P = I_2$, on obtient donc que $A^n = P \times B^n \times P^{-1}$.

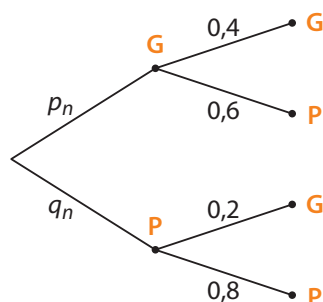
$$\begin{aligned} \text{Alors } A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & 4^n \\ 5^n & 2 \times 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n - 4^n & -5^n + 4^n \\ 2 \times 5^n - 2 \times 4^n & -5^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}.$$

⇒ Savoir faire Étudier le comportement asymptotique d'une suite de matrices colonne

10 1 La situation peut être représentée par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2q_n \text{ et } q_{n+1} = 0,6p_n + 0,8q_n.$$

En utilisant la définition du produit de matrices,

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Donc : $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}.$

2 $A \times U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,25 + 0,2 \times 0,75 \\ 0,6 \times 0,25 + 0,8 \times 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}.$

Donc $A \times U = U$.

3 La matrice A a tous ses coefficients strictement positifs, dont la somme par colonne est 1. D'après le théorème du cours, la matrice U est l'unique matrice colonne dont la somme des coefficients est 1 et telle que $A \times U = U$. Et la suite (U_n) converge vers la matrice U .

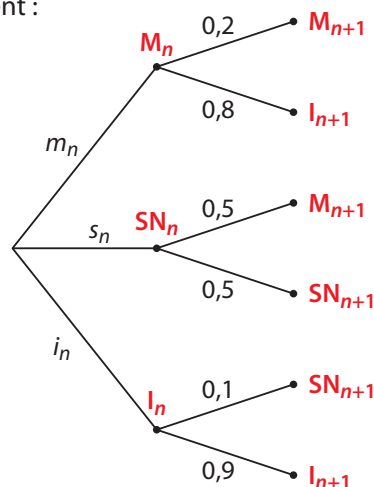
Donc la probabilité que Claude gagne une partie à long terme tend vers 0,25.

⇒ Travaux pratiques

11 Propagation d'une maladie

1 Lire l'énoncé et fixer des notations

1 On obtient :



2 a. En B3 : $=0,2*B2+0,5*C2$.

En C3 : $=0,5*C2+0,1*D2$.

En D3 : $=0,8*B2+0,9*D2$.

b. Il semble que la suite (m_n) converge vers 0,094 31, que la suite (s_n) converge vers 0,150 95, et que la suite (i_n) converge vers 0,754 71.

2 Modéliser la situation

1 $U_0 = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,95 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en utilisant la formule des probabilités totales, $U_{n+1} = A \times U_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,1 \\ 0,8 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$

2 En utilisant le résultat du logiciel,

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,8x + 0,5y = 0 \\ -0,5y + 0,1z = 0 \\ 0,8x - 0,1z = 0 \end{cases}$$

La 3^e ligne du système est la différence de la 2^e ligne et de la 1^{re} ligne.

Comme la somme des coefficients de chaque U_n est égale à 1, la somme $x + y + z$ des coefficients cherchés est égale à 1.

En utilisant le résultat du logiciel, on en déduit que :

$$x = \frac{5}{53}, y = \frac{8}{53} \text{ et } z = \frac{40}{53}.$$

Remarque : Ici, la matrice A a ses coefficients positifs, mais certains sont nuls. Le théorème du cours assure l'existence d'une matrice U de somme des coefficients égale à 1 et telle que $A \times U = U$, mais pas son unicité.

En revanche, $A^2 = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,35 & 0,05 \\ 0,08 & 0,25 & 0,14 \\ 0,88 & 0,4 & 0,81 \end{pmatrix}$ vérifie les

conditions du théorème, ce qui assure l'unicité de la matrice U .

En effet, A étant inversible,

$$A \times U = U \Leftrightarrow A \times A \times U = A \times U = U \Leftrightarrow (A^2) \times U = U.$$

Sur la convergence de la suite (U_n) , on peut raisonner sur la suite extraite des rangs pairs : $V_n = U_{2n}$.

On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$V_{n+1} = U_{2n+2} = A^2 \times U_{2n} = A^2 \times V_n.$$

La matrice A^2 vérifie les conditions du théorème, donc la suite (V_n) converge vers la matrice U , soit la suite (U_{2n}) converge vers la matrice U .

Or, pour tout entier $n \geq 0$, $U_{2n+1} = A \times U_{2n}$. Donc la suite (U_{2n+1}) converge vers la matrice $A \times U = U$.

Conclusion : la suite (U_n) converge vers la matrice U .

12 Modèle proie-prédateur

1 Partie A

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{R_{n+1} - R_n}{R_n} = a - bL_n. \text{ Donc } R_{n+1} - R_n = aR_n - bR_nL_n,$$

$$\text{soit } R_{n+1} = (1+a)R_n - bL_nR_n.$$

$$\frac{L_{n+1} - L_n}{L_n} = cR_n - d. \text{ Donc } L_{n+1} - L_n = cR_nL_n - dL_n,$$

$$\text{soit } L_{n+1} = cL_nR_n + (1-d)L_n.$$

2 a. En l'absence de prédateurs, $L_n = 0$. Donc, pour tout entier $n \geq 0$, $R_{n+1} = (1+a)R_n$. La suite (R_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1+a > 1$, donc croissante.

b. En l'absence de proies, $R_n = 0$. Donc pour tout entier $n \geq 0$, $L_{n+1} = (1-d)L_n$. La suite (L_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1-d < 1$, donc décroissante.

3 a. On a : $R_0 = 3\,000$ et $L_0 = 90$; $R_1 = 3\,153$ et $L_1 = 94$; $R_2 = 3\,312$ et $L_2 = 99$.

$$\text{Comme } \begin{cases} R_1 = (1+a)R_0 - bL_0R_0 \\ R_2 = (1+a)R_1 - bL_1R_1 \end{cases}, \text{ on a :}$$

$$\begin{cases} 3\,000(1+a) - 3\,000 \times 90b = 3\,153 \\ 3\,153(1+a) - 3\,153 \times 94b = 3\,312 \end{cases}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} 3\,000a - 270\,000b = 153 \\ 3\,153a - 296\,382b = 159 \end{cases}$$

En divisant les deux lignes par 3, on a :

$$\begin{cases} 1\,000a - 90\,000b = 51 \\ 1\,051a - 98\,794b = 53 \end{cases}$$

$$\text{Comme } \begin{cases} L_1 = cL_0R_0 + (1-d)L_0 \\ L_2 = cL_1R_1 + (1-d)L_1 \end{cases},$$

$$\text{on a : } \begin{cases} 90 \times 3\,000c + 90(1-d) = 94 \\ 94 \times 3\,153c + 94(1-d) = 99 \end{cases}$$

$$\text{soit : } \begin{cases} 270\,000c - 90d = 4 \\ 296\,382c - 94d = 5 \end{cases}$$

En divisant la 1^{re} ligne par 2, on a :

$$\begin{cases} 135\,000c - 45d = 2 \\ 296\,382c - 94d = 5 \end{cases}$$

b. Le 1^{er} système s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1000 & -90\,000 \\ 1051 & -98\,794 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 53 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 & -90\,000 \\ 1051 & -98\,794 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 53 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la calculatrice, on a : $a \approx 0,064$ et $b \approx 0,000\,14$.

Le 2^e système s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 135\,000 & -45 \\ 296\,382 & -94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135\,000 & -45 \\ 296\,382 & -94 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la calculatrice, on a : $c \approx 5,7 \times 10^{-5}$ et $d \approx 0,127$.

2 Partie B

1 a. b. Le nombre de prédateurs n'augmente pas forcément lorsque le nombre de proies augmente.

Le nombre de proies n'augmente pas forcément lorsque le nombre de prédateurs diminue.

c. Pour la suite R , deux maxima sont espacés d'environ 105 ans. Pour la suite L , deux maxima sont espacés d'environ 103 ans.

Deux maxima consécutifs des deux suites sont espacés d'environ 10 ans.

2 a. La suite R est géométrique croissante, divergente vers $+\infty$ et la suite L est constante à 0.

b. La suite R est constante à 0 et la suite L est géométrique décroissante, convergente vers 0.

3 a. Les suites R et L sont constantes.

b. Les suites R et L oscillent respectivement autour des valeurs 2 000 et 600.

4 a. Lorsque a diminue, les amplitudes des suites R et L diminuent. En effet, le taux d'accroissement de la suite R est plus petit, donc la suite R varie moins vite. Le taux d'accroissement de la suite L est alors aussi plus petit. Donc la suite L varie aussi moins vite.

b. Pour les mêmes raisons qu'au **a.**, les amplitudes des suites R et L diminuent.

c. Lorsque c diminue, la suite L est presque constante, sauf par pique, et la suite R suit des croissances exponentielles, sauf par pique. En effet, le taux d'accroissement de la suite L devient proche de 0, donc la suite L est presque constante. Le taux d'accroissement de la suite R devient alors presque constant, et la suite R est presque géométrique.

d. Lorsque d augmente, on obtient les mêmes résultats qu'au **c.**

→ Faire le point

16 1 b. et c. 2 a. 3 c.

4 a. b. et c. 5 b.

17 1 c. 2 b. et c. 3 c.

18 1 Faux. 2 a. Faux. b. Faux. c. Vrai. d. Vrai.

3 Vrai.

→ Exercices d'application

1 Matrices et opérations

19 1 Vrai. 2 Vrai. 3 Vrai. 4 Faux.

20 1 b. 2 a. 3 c. 4 b.

Définition de matrice

21 1 $a_{1,1} = 1, a_{1,3} = 3, a_{2,3} = 1, a_{3,1} = -1, a_{3,2} = 2$.

2 $a_{1,1} = -2, a_{1,3} = 0, a_{2,3} = 3, a_{3,1} = 0, a_{3,2} = -2$.

	A1	A2		Fruit	Viande
Fruit	20	80	A1	20	30
Viande	30	50	A2	80	50

2 a. $\begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre deux.

80, le nombre situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne de la première matrice, représente la quantité de fruits commandée à A2.

b. $\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 80 & 50 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre deux.

30, le nombre situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne de la première matrice représente la quantité de viande commandée à A1.

3 $\begin{pmatrix} 22 & 88 \\ 33 & 55 \end{pmatrix}$.

4 3^e semaine : $\begin{pmatrix} 24,2 & 96,8 \\ 36,3 & 60,5 \end{pmatrix}$.

4^e semaine : $\begin{pmatrix} 26,62 & 106,48 \\ 39,93 & 66,55 \end{pmatrix}$.

5^e semaine : $\begin{pmatrix} 29,282 & 117,128 \\ 43,923 & 73,205 \end{pmatrix}$.

23 1 Cela signifie que l'équipe C a retrouvé 5 marques rouges.

2 L'équipe B a collecté 18 marques et a gagné le jeu.

3 On a collecté 41 marques.

24 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$25 \text{ a. } A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 \\ x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0. \\ 3 = 3 - x \end{cases}$$

$$\text{b. } A = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ x^2 = 4 \\ -1 = x - 3 \\ 10 = 6x - 2 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Somme, produit par un réel

$$26 \text{ 1 } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2 \text{ 2 } 2A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \text{ donc } 2A + B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

On vérifie de même les autres résultats.

$$3 \text{ 3 } A + 2C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{3B} + 2C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 13 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{3A} + 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$27 \text{ 2A} + 3B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 6 & 15 & 2 \\ 7 & 8 & 16 \end{pmatrix};$$

$$\text{3C} + 2I_3 = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 \\ -6 & 5 & 9 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{-2A} + 3C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$28 \text{ 2A} + 3B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{-3A} + 2B = \begin{pmatrix} -13 & -12 \\ 9 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A - 4B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$29 \text{ 2A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -10 \\ 8 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{-3B} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \\ -6 & 3 & -12 \end{pmatrix};$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\triangleright 3A - B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -16 \\ 12 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\triangleright -2A + 4B = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 14 \\ -8 & 4 & 10 \\ 10 & -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

30 On a $C = B - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Produit de deux matrices

31 1 Le montant de la facture est :

$$\begin{pmatrix} 23 & 25 & 22 \\ 30 & 25 & 31 \\ 25 & 20 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207 \\ 264 \\ 195 \end{pmatrix}.$$

Le total de la facture dans chaque magasin est : 207 € dans le magasin X, 264 € dans le magasin Y et 195 € dans le magasin Z.

2 On obtient : $\begin{pmatrix} 23 & 25 & 22 \\ 30 & 25 & 31 \\ 25 & 20 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 212 \\ 253 \\ 190 \end{pmatrix}.$

La facture sera la moins élevée dans le magasin Z.

32 a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix};$

b. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$

33 a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \\ 26 \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}.$

34 1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

2 $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} (-1)(-2) + 2 \times 3 & (-1) \times 0 + 2 \times 1 \\ (-3)(-2) + 4 \times 3 & (-3) \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}.$

On procède de même avec les autres calculs.

35 a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -5 & 26 \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 4 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}.$

36 a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 \\ 8 & 0 & 10 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 12 \\ 12 & 7 & -4 & 0 \\ 14 & 3 & 15 & 13 \\ -8 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

37 1 $(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \times C = \begin{pmatrix} -28 & 21 \\ 70 & -14 \end{pmatrix};$

$A \times (B \times C) = A \times \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 21 \\ 70 & -14 \end{pmatrix}.$

2 $A \times (B + C) = A \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 18 & 6 \end{pmatrix};$

$A \times B + A \times C = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 18 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}.$

3 $A \times B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$

38 $A \times B = B \times A = I_3.$

39 1 $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -35 \\ 70 & 42 \end{pmatrix}.$

2 $B^2 = 5B = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$

$B^3 = 5B \times B = 5B^2 = 25B.$

$B^4 = B^2 \times B^2 = (5B)^2 = 25B^2 = 125B.$

40 On a bien en utilisant la calculatrice : $A = B \times C.$

41 1 $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ et $B \times A = O_2.$

2 L'affirmation « si un produit de matrices est nul, alors l'une des matrices est nulle » est à l'évidence fausse.

42 1 a. $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 22 & 12 \\ 28 & 46 \end{pmatrix}$

et $A^2 + 2A \times B + B^2 = \begin{pmatrix} 48 & 30 \\ 38 & 20 \end{pmatrix}.$

b. $(A - B) \times (A + B) = \begin{pmatrix} 52 & 26 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$

et $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ -16 & 18 \end{pmatrix}.$

Les résultats diffèrent car la multiplication matricielle n'est pas commutative.

2 Si les matrices carrées A et B commutent, alors on a bien :

$(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + A \times B + B \times A + B^2$
 $= A^2 + 2A \times B + B^2;$

$(A - B) \times (A + B) = A^2 + A \times B - B \times A - B^2$
 $= A^2 - B^2.$

2 Inverse d'une matrice carrée

43 1 Faux. 2 Faux. 3 Vrai. 4 Faux.
5 Vrai.

44 1 Faux. 2 Faux. 3 Faux.

Déterminations d'inverse

45 1 a. $A \times B = B \times A = I_2$ et $B^{-1} = A$.

b. $A \times B = B \times A = I_3$ et $B^{-1} = A$.

2 Preuve de cours : inverse de l'inverse

Par définition de la matrice inverse,

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I.$$

Donc la matrice A^{-1} est inversible, d'inverse la matrice A , $(A^{-1})^{-1} = A$.

46 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = I_2$

et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = I_2$.

De même, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

47 a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$; b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

48 Soit une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1 $A \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix}$.

2 Pour que la matrice A soit inversible, il faut et il suffit

que le système $\begin{cases} ax = 1 \\ ay = 0 \\ bz = 0 \\ bt = 1 \end{cases}$ ait une solution non nulle, donc

$a \neq 0$ et $b \neq 0$.

3 Dans ce cas $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = \frac{1}{b} \end{cases}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.

4 Oui, ce résultat se généralise aux matrices diagonales d'ordre 3 et d'ordre 4.

49 1 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la matrice A est inversible, et $A^{-1} = A$.

2 $A^2 \neq I_2$, donc $A \times (-A) = (-A) \times A = I_2$; la matrice A est inversible, et $A^{-1} = A$.

50 1 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = I_2$ équivaut au système :

$$\begin{cases} 3x + 5z = 1 \\ 2x + 4z = 0 \\ 3y + 5t = 0 \\ 2y + 4t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{5}{2} \\ z = -1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On a donc : $B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Et $B \times A = I_2$, donc $B = A^{-1}$.

2. On ne peut pas déterminer B telle que $A \times B = I_2$.

51 $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$. On en

déduit : $A \times \left(\frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}A\right) = I_2$, donc la matrice A est inver-

sible et $A^{-1} = \frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

52 1 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2 $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0_3$ équivaut à un système de 9 équations à 3 inconnues qui admet pour solution $a=0$, $b=-4$ et $c=-1$;

donc : $A^3 - 4A - I_3 = 0_3$, soit $A(A^2 - 4I_3) = I_3$.

2 On en déduit que la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = A^2 - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

53 Preuve de cours : inverse d'un produit

1 $(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1}$, car la multiplication matricielle est associative et comme $B \times B^{-1} = I$, on a :

$$(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = A \times A^{-1} = I.$$

De même $(B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) = I$.

2 Donc le produit $A \times B$ est inversible et :

$$(A \times B)^{-1} = (B^{-1} \times A^{-1}).$$

Systèmes linéaires et équations

54 1 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{17}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

2 a. Sous forme matricielle le système (S_1) s'écrit :

$$A \times X = B, \text{ où } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b. $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc la solution

du système est $x=2, y=-2$ et $z=3$.

3 Le système s'écrit : $A \times X = C$, avec $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A \times X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{46}{7} \\ -\frac{40}{7} \end{pmatrix}.$$

55 a. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \Leftrightarrow A \times X = B \\ 4z = 0 \end{cases}$

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc le système est équivalent à :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc } S = \{(0; 1; 0)\}.$$

b. De même, le système est équivalent à :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} \\ -5 \\ -\frac{48}{13} \end{pmatrix}.$$

Donc $S = \left\{ \left(-\frac{7}{13}; -5; -\frac{48}{13} \right) \right\}$.

56

1 $A \times X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$,
donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 $(E_1) \Leftrightarrow \left(I_2 - \frac{1}{2}A \right) X = C = X = \left(I_2 - \frac{1}{2}A \right)^{-1} \times C$.

$$\left(I_2 - \frac{1}{2}A \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}. \text{ Donc } X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

3 a. $(E_2) \Leftrightarrow (I_2 - A) \times X = C$.

Mais la matrice $I_2 - A$ n'est pas inversible.

(E_2) n'admet pas une unique solution. Les solutions véri-

fient $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}$.

b. Si la somme des coefficients est égale à 1, $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3 Puissance n -ième d'une matrice carrée

57

1 Faux.

2 Faux.

3 Vrai.

58

1 a. $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$.

b. On a $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

2 a. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

b. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0,2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,75^n \end{pmatrix}$.

59

1 $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ et $M^3 = M$.

2 Pour tout entier naturel p non nul :

$$M^{2p+1} = M \text{ et } M^{2p} = -I_2.$$

60

1 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$.

2 Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^{2n} = 2^n I_2.$$

► **Initialisation :** $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^1 I_2$. Vrai.

► **Hérédité :** Démontrons que, si $A^{2n} = 2^n I_2$,
alors $A^{2n+2} = 2^{n+1} I_2$.

$$\text{On a } A^{2n+2} = A^{2n} \times A^2 = (2^n I_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n+1} I_2.$$

► **Conclusion :** Pour tout entier $n \geq 0$, $A^{2n} = 2^n I_2$.

Autre démonstration : de façon directe :

$$A^{2n} = (A^2)^n = (2I_2)^n = 2^n I_2.$$

3 $A^{2013} = A^{2012} \times A = 2^{1006} I_2 \times A = 2^{1006} A$.

61

1 On a $A^2 = I_2$, donc $A^{2n} = I_2$, donc $A^{2012} = I_2$.

2 $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$.

Donc, pour tout entier $n \geq 3$, on a $B^n = 0_3$.

62

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2M$, $M^3 = 4M$, $M^4 = 8M$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :

$$M^n = 2^{n-1} M.$$

► **Initialisation :** $M^2 = 2M$. Vrai.

► **Hérédité :** Démontrons que si $M^n = 2^{n-1} M$,
alors $M^{n+1} = 2^n M$.

On a en fonction de n :

$$M^{n+1} = M^n \times M = 2^{n-1} M \times M = 2^{n-1} \times 2M = 2^n M.$$

► **Conclusion :** pour tout entier n , $M^n = 2^{n-1} M$.

63 1 $B^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B^3 = B$.

2 On conjecture que pour tout entier n , $B^{2n+1} = B$.

On pose $P(n) : « B^{2n+1} = B »$.

► **Initialisation** : $B^1 = B$. Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

Alors $B^{2(n+1)+1} = B^{2n+1} \times B^2 = B \times B^2$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $B^{2(n+1)+1} = B^3 = B$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$, $B^{2n+1} = B$.

64 Démontrons par récurrence que pour tout entier

naturel n , $\mathcal{P}_n : « A^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2+11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} »$.

► **Initialisation** : $\mathcal{P}_0 : A^0 = I$, vrai.

► **Hérédité** : démontrons que,

si $\mathcal{P}_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2+11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

alors $\mathcal{P}_{n+1} : A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 5(n+1) & \frac{-5(n+1)^2+11(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 5n & \frac{-5n^2+11n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 5(n+1) & \frac{-5(n+1)^2+11(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► **Conclusion** : pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

65 1 On a $P \times Q = Q \times P = I_3$.

2 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et comme B est une matrice diagonale,

$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$.

3 a. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n : « A^n = P \times B^n \times Q »$.

► **Initialisation** : $P \times B \times Q = P(Q \times A \times P)Q$; donc :

$P \times B \times Q = (P \times Q)A(Q \times P) = A$, car $P \times Q = Q \times P = I_3$.

► **Hérédité** : Démontrons que si, pour un entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $A^{n+1} = P \times B^{n+1} \times Q$.

$A^{n+1} = A^n \times A = (P \times B^n \times Q)(P \times B \times Q)$ soit en tenant compte de l'associativité de la multiplication matricielle, $A^{n+1} = P \times B^{n+1} \times Q$.

► **Conclusion** : pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

b. On en déduit $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -8^n & 0 & -8^n \\ -(-1)^n + 8^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}$.

66 1 a. $J = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

b. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = 0_3$ donc, pour tout entier $n \geq 3$, $J^n = 0_3$.

2 Démontrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$\mathcal{P}_n : « A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 »$.

► **Initialisation** : $\mathcal{P}_2 : A^2 = I_3 + 2J + J^2 = (I_3 + J)^2$; vrai.

► **Hérédité** : Démontrons que, si $\mathcal{P}_n$ est vraie,

alors $\mathcal{P}_{n+1} : A^{n+1} = I_3 + (n+1)J + \frac{n(n+1)}{2}J^2$;

$A^{n+1} = A^n \times A = \left(I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \right) (I_3 + J)$.

En tenant compte du fait que $J^3 = 0_3$, on obtient :

$A^{n+1} = I_3 + (n+1)J + \frac{n(n+1)}{2}J^2$.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3 On en déduit : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 2n+1 \end{pmatrix}$.

67 1 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Démontrons par récurrence que, pour tout entier

naturel $n > 0$, on peut écrire $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► **Initialisation** : A est bien de la forme voulue.

► **Hérédité** : Supposons que, si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_n+1 & a_n+b_n \\ 0 & 1 & 1+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► **Conclusion** : Pour tout entier $n > 0$, la matrice A^n est de la forme voulue et les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n non nul par : $a_{n+1} = a_n + 1$ et $a_1 = 1$, $b_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_1 = 0$.

3 • La suite (a_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, donc $a_n = n$.

• Pour tout entier $n > 0$, $b_{n+1} = n + b_n$, en sommant les égalités définissant les b_i , on obtient :

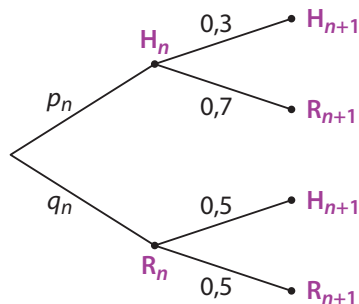
$$b_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En situation

68 1 a.



L'arbre de probabilité ci-dessus et la formule des probabilités totales permettent d'écrire que pour tout entier naturel n ,

$$p_{n+1} = 0,3 p_n + 0,5 q_n \text{ et } q_{n+1} = 0,7 p_n + 0,5 q_n.$$

b. On a $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}$.

c. Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:

« $U_n = A^n \times U_0$ », pour tout entier $n \geq 0$.

► **Initialisation** : $\mathcal{P}_0 : U_0 = A^0 U_0$, vraie.

► **Hérédité** : Démontrons que, si pour un certain n , $\mathcal{P}_n$:

$U_n = A^n \times U_0$, alors $\mathcal{P}_{n+1} : U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

On a $U_{n+1} = A \times U_n = A \times (A^n \times U_0)$,

donc $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

2 En utilisant le résultat précédent : la probabilité que Mélanie soit à l'heure le 2^e jour est 0,44, le 10^e jour : 0,42, le 50^e jour : 0,42.

3 a. Une démonstration par récurrence prouve que : pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \times \begin{pmatrix} -\frac{7}{60} & \frac{1}{12} \\ \frac{7}{60} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

b. $A^n \times U_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{7}{60} \\ \frac{7}{60} \end{pmatrix}.$

4 On a donc $p_n = \frac{5}{12} - \frac{7}{60} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$

(suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{12}.$$

69 1 a. Le texte se traduit naturellement par : pour tout entier naturel n ,

$$x_{n+1} = 6y_n + 10z_n; y_{n+1} = \frac{x_n}{2} \text{ et } z_{n+1} = \frac{2}{5}y_n.$$

b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$

2 Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:

« $U_n = A^n \times U_0$ », pour tout entier $n \geq 0$.

► **Initialisation** : $\mathcal{P}_0 : U_0 = A^0 U_0$, vraie.

► **Hérédité** : Démontrons que si, pour un certain n , $\mathcal{P}_n$:

$U_n = A^n \times U_0$, alors $\mathcal{P}_{n+1} : U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

On a $U_{n+1} = A \times U_n = A \times (A^n \times U_0)$,

donc $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

3 ► $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix};$

► $U_5 = A^5 \times U_0 = \begin{pmatrix} 3\,200 \\ 800 \\ 160 \end{pmatrix};$

► $U_{10} = A^{10} \times U_0 = \begin{pmatrix} 102\,400 \\ 25\,600 \\ 5\,120 \end{pmatrix}.$

4 $\frac{x_6}{x_5} \approx 1,67, \frac{x_{11}}{x_{10}} \approx 2,02, \frac{x_{16}}{x_{15}} \approx 1,999.$

On constate que la population des femelles juvéniles tend à doubler à chaque période.

70 1 Pour tout entier naturel n :

$$A \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

donc : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$

2 Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:

« $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ », pour tout entier n .

► **Initialisation** : $\mathcal{P}_0 : A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vraie.

► **Hérédité** : Démontrons que si pour un certain n ,

$\mathcal{P}_n : A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; donc

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

► **Conclusion :** pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 On a $U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

donc $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$.

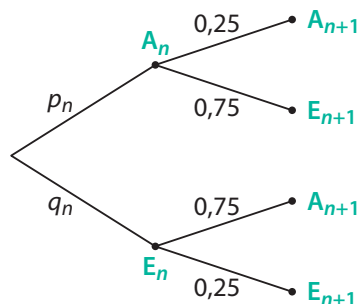
4 La suite u converge vers 2 quelle que soit la valeur de u_0 , car une suite géométrique de raison 0,5 converge vers 0.

4 Étude de suites (U_n) définies par $U_{n+1} = A \times U_n + B$

71 1 Faux. 2 Vrai. 3 Faux. 4 Vrai. 5 Vrai.

72 1 a. $p_1 = 0,75$, $p_2 = 0,75 \times 0,25 \times 2 = \frac{3}{8}$.

b.



En utilisant l'arbre pondéré ci-dessus où A signifie allumé et E éteint, on a pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = 0,25 p_n + 0,75 q_n \text{ et } q_{n+1} = 0,75 p_n + 0,25 q_n.$$

c. $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$.

2 a. Démontrons par récurrence la propriété :

$\mathcal{P}_n$: « $U_n = A^n \times U_0$ », pour tout entier $n \geq 0$.

► **Initialisation :** $\mathcal{P}_0 : U_0 = A^0 U_0$, vraie.

► **Hérédité :** Démontrons que, si, pour un certain n , $\mathcal{P}_n$: $U_n = A^n \times U_0$, alors $\mathcal{P}_{n+1} : U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

On a $U_{n+1} = A \times U_n = A \times (A^n \times U_0)$, donc $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

► **Conclusion :** pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

b. $U_{10} \approx \begin{pmatrix} 0,499 \\ 0,500 \end{pmatrix}$, $U_{20} \approx \begin{pmatrix} 0,500 \\ 0,500 \end{pmatrix}$, $U_{50} \approx \begin{pmatrix} 0,500 \\ 0,500 \end{pmatrix}$.

La suite de matrices (U_n) semble converger vers $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

3 a. U est bien solution de l'équation $A \times X = X$.

b. La matrice U n'est pas l'unique solution de cette équation. En effet, toutes les matrices du type $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, où a est un réel quelconque, sont solution du système.

4 a. $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} = I_2;$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

b. Calculer $P \times D \times P^{-1} = A$.

c. Comme $P \times P^{-1} = P^{-1} \times P = I_2$ on en déduit que $A^n = P \times D^n \times P$, donc :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-0,5)^n & 1 - (-0,5)^n \\ 1 - (-0,5)^n & 1 + (-0,5)^n \end{pmatrix} \text{ et}$$

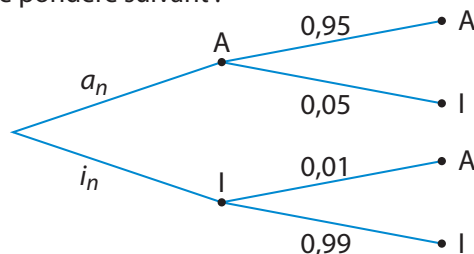
$$U_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - (-0,5)^n \\ 1 + (-0,5)^n \end{pmatrix}.$$

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$, ce qui confirme la conjecture émise

à la question 2 b.

73 1 $P_0 = \begin{pmatrix} 0,92 \\ 0,08 \end{pmatrix}$, et, pour tout entier naturel n , on

a l'arbre pondéré suivant :



Donc par la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = 0,95 a_n + 0,01 i_n \text{ et } i_{n+1} = 0,05 a_n + 0,99 i_n.$$

Cela se traduit par l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ i_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $P_{n+1} = M \times P_n$.

2 a. $P_1 = M \times P_0 = \begin{pmatrix} 0,8748 \\ 0,1252 \end{pmatrix}$

Et $P_2 = M \times P_1 = \begin{pmatrix} 0,832312 \\ 0,167688 \end{pmatrix}$.

b. L'année 2015 correspond à $n = 5$.

On calcule $P_5 = M^5 \times P_0$ à la calculatrice :

```
[A]^5*[B]
[[.7195410302]
[.2804589698]]
```

En 2015, il y a environ 71,95 % de clients d'agence et 28,05 % de clients Internet.

3 On recherche $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $x + y = 1$ et $M \times P = P$.

$$\text{Comme } M \times P = \begin{pmatrix} 0,95x + 0,01y \\ 0,05x + 0,99y \end{pmatrix},$$

$$M \times P = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,95x + 0,01y \\ 0,05x + 0,99y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 0,05x - 0,01y = 0 \Leftrightarrow 5x - y = 0.$$

En ajoutant la condition $x + y = 1$,

$$\text{on obtient } x = \frac{1}{6} \text{ et } y = \frac{5}{6}.$$

$$\text{L'état stable est } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

4 a. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$P(n) = \ll M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix} \gg.$$

Initialisation : $M^0 = I_2$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^{0-1} \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \frac{50}{47} \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix}.$$

Alors $M^{n+1} = M \times M^n$

$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{20} & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{20} & \frac{99}{100} \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix} \right].$$

$$\text{Donc } M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^n \times \begin{pmatrix} \frac{2209}{3000} & \frac{-2209}{15000} \\ \frac{-2209}{3000} & \frac{2209}{15000} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^n \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie.

b. Pour tout entier naturel n ,

$$P_n = M^n \times P_0$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{47}{60} & \frac{-47}{300} \\ \frac{-47}{60} & \frac{47}{300} \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 0,92 \\ 0,08 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^{n-1} \times \begin{pmatrix} \frac{5311}{7500} \\ \frac{-5311}{7500} \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire } P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \left(\frac{47}{50}\right)^n \times \frac{113}{150} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5 Comme $0 < \frac{47}{50} < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{47}{50}\right)^n = 0$.

Donc la suite (P_n) converge vers la matrice colonne c'est-à-dire vers l'état stable P .

74 1 a. et b. D'après l'énoncé, pour tout entier n ,

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{2}{3}r_n + \frac{1}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{2}{3}v_n \end{cases}$$

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$X_{n+1} = A \times X_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$2 A \times X = X \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = z \end{cases}$$

$$A \times X = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \text{ si de plus la somme des coefficients}$$

$$\text{est 1, on obtient la solution } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

3 a. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Donc la suite (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ r_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} b_1 \\ r_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, la suite converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b. La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, donc elle converge vers 0.

75 1 a. Pour arriver en A à l'instant $n + 1$, soit elle saute sur A avec une probabilité 0,05 soit elle vient de B avec une probabilité $0,85 \times 0,5$ soit elle provient de C avec une probabilité de $0,85 \times 0,5$; d'où, en utilisant les probabilités totales, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 0,85(0,5 b_n + 0,5 c_n) + 0,05.$$

b. On a de même :

$$b_{n+1} = 0,85(0,5 a_n + 0,5 c_n) + 0,05 ;$$

$$c_{n+1} = 0,85(0,5 a_n + 0,5 b_n) + 0,05.$$

Donc, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 0,85 M \times U_n + K. \quad (1)$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix}.$$

2 a. En transposant et factorisant, on a :

$$(E) \Leftrightarrow (I_3 - 0,85 M) \times X = K.$$

b. Soit $X = (I_3 - 0,85 M)^{-1} \times K$.

$$\text{La calculatrice donne comme solution } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3 a. U vérifie $U = 0,85 M \times U + K$, donc en soustrayant membre à membre avec (1), on obtient, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} - U = 0,85 M \times (U_n - U).$$

b. En écrivant les égalités précédentes de 1 à n , puis en multipliant membres à membres et en simplifiant, on obtient que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = U + 0,85^n \times M^n \times (U_0 - U).$$

2 a. Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$

$$\ll M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \gg.$$

Initialisation :

$$\mathcal{P}_0 : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^0 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = I_3, \text{ vraie.}$$

Hérédité : Démontrons que si, pour un certain n , $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors :

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Or, $M^{n+1} = M^n \times M$, soit en tenant compte des résultats ci-dessus :

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$:

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

b. La suite (U_n) converge vers U , car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85)^n = 0$. Elle ne dépend pas de U_0 .

2 La matrice $0,85A$ a ses coefficients positifs ou nuls, dont la somme par colonne est strictement inférieure à 1. Donc la matrice $(0,85A)^n$ converge vers la matrice nulle, et la suite (U_n) converge vers la matrice U .

76 1 a. On a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, donc : $U_{n+1} = A \times U_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

b. Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:

« $U_n = A^n \times U_0$ », pour tout entier $n \geq 0$.

► **Initialisation** : $\mathcal{P}_0 : U_0 = A^0 U_0$ vraie.

► **Hérédité** : Démontrons que si, pour un certain n ,

$\mathcal{P}_n : U_n = A^n \times U_0$, alors $\mathcal{P}_{n+1} : U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

On a $U_{n+1} = A \times U_n = A \times (A^n \times U_0)$,

donc $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

2 On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

b. En utilisant l'associativité de la multiplication matricielle, on a $A = P \times B \times P^{-1}$, donc, pour tout entier naturel n :

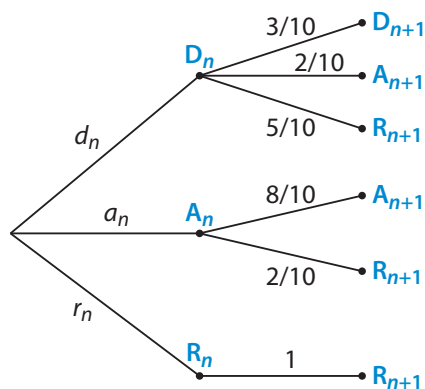
$$A^n = P \times B^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

3 $u_n = 2u_0 - u_1 + 2^n(u_1 - u_0)$.

4 Question ouverte : Il faut et il suffit que $u_1 = u_0$.

Et dans ce cas la suite est constante égale à u_0 .

77 1 En utilisant l'arbre pondéré :



D'après les probabilités totales, on obtient, pour tout

$$\text{entier } n : \begin{cases} d_{n+1} = \frac{3}{10}d_n \\ a_{n+1} = \frac{2}{10}d_n + \frac{8}{10}a_n \\ r_{n+1} = \frac{5}{10}d_n + \frac{2}{10}a_n + r_n \end{cases}.$$

$$\text{En posant } M = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a pour tout entier}$$

naturel $n : P_{n+1} = M \times P_n$.

2 Par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $P_n = M^n \times P_0$.

3 La matrice colonne $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont la somme des coefficients est 1 vérifie $M \times P = P$.

$$\mathbf{4 a.} P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}, P_{10} \approx \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0,09 \\ 0,9 \end{pmatrix}, P_{100} \approx \begin{pmatrix} 10^{-53} \\ 10^{-10} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{1000} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que la suite (P_n) converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Au

bout d'un certain temps tous les malades auront guéri.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1 - 0 - 0 = 1$.

c. $d_n < 0,001 \Leftrightarrow 0,2 \times 0,3^n < 0,001 \Leftrightarrow 0,3^n < 0,005$;
donc $n > \frac{\ln 0,005}{\ln 0,3}$, donc au bout de 5 semaines il n'y a plus de patients avec un syndrome débutant.

d. Question ouverte :

$$\text{comme } r_{n+1} - r_n = \frac{5}{10}d_n + \frac{2}{10}a_n > 0,$$

le groupe des patients rétablis est en constante augmentation.

$$\mathbf{78 1} \text{ D'après l'énoncé, } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2} P_0 = \begin{pmatrix} 3\,000 \\ 3\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 18\,000 \\ 1\,500 \\ 1\,000 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 9\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 3\,000 \\ 3\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}.$$

La population de coccinelles va évoluer de façon cyclique tous les trois ans.

3 Dans ce cas, la population de coccinelles est stable.

4 Il en est de même avec cette répartition.

$$\mathbf{5 a.} \text{ On doit avoir : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{cases} 6z = x \\ \frac{1}{2}x = y \\ \frac{1}{3}y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6z \\ y = 3z \end{cases}.$$

b. Toutes les répartitions du type $\begin{pmatrix} 6z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$ où $z > 0$ sont stables.

Exercices guidés

79 1 $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} (-1)^2 - 2 \times 3 & -1 \times (-2) - 2 \times 4 \\ 3 \times (-1) + 4 \times 3 & 3 \times (-2) + 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

Donc $A^2 - 3A + 2I_2$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

2 D'après la question **1**, $A^2 - 3A = -2I_2$,
 donc $A \times \frac{-1}{2}(A - 3I_2) = \frac{-1}{2}(A - 3I_2) \times A = I_2$.

On en déduit que la matrice A est inversible et que
 $A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_2).$

Ainsi $A^{-1} = \frac{-1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
 $= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

3 Pour tout entier $n \geq 0$,

on pose $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$ ».

► **Initialisation** : $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} 3 - 2 & 2 - 2 \\ 3 - 3 & 3 - 2 \end{pmatrix} = I_2$.
 Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.
 Alors :

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Ainsi :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} -(3 - 2^{n+1}) - 2(3 \times 2^n - 3) & -(2 - 2^{n+1}) - 2(3 \times 2^n - 2) \\ 3(3 - 2^{n+1}) + 4(3 \times 2^n - 3) & 3(2 - 2^{n+1}) + 4(3 \times 2^n - 2) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} -3 + 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} + 6 & -2 + 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} + 4 \\ 9 - 3 \times 2^{n+1} + 6 \times 2^{n+1} - 12 & 6 - 3 \times 2^{n+1} + 6 \times 2^{n+1} - 8 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \times 2^{n+1} & 2 - 2 \times 2^{n+1} \\ 3 \times 2^{n+1} - 3 & 3 \times 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}$$

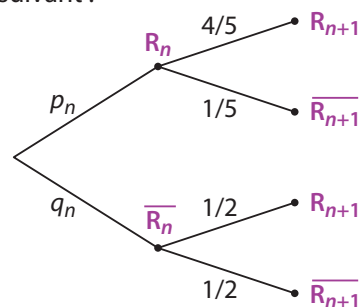
$$= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+2} & 2 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}.$$

80 1 On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant :



En notant R_n l'événement « Florian réussit son n -ième tir ».

D'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{2}q_n \text{ et } q_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2}q_n.$$

En utilisant la définition du produit de matrices,

on obtient : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix},$

soit $U_{n+1} = A \times U_n$, avec $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

2 Par récurrence, pour tout entier $n > 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

Donc $U_{10} = A^{10} \times U_0$.

À l'aide de la calculatrice, $U_{10} \approx \begin{pmatrix} 0,714\,29 \\ 0,285\,71 \end{pmatrix}.$

Ainsi la probabilité que Florian réussisse son 10^e tir est environ 0,714 29.

3 On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $x + y = 1$.

$$\begin{cases} A \times U = U \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

4 Les coefficients de la matrice A sont strictement positifs, dont la somme par colonne est égale à 1.

Donc la suite (U_n) converge vers la matrice $U = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

On en déduit que la suite (p_n) converge vers $\frac{5}{7}$.

81 1 On a : $\begin{cases} \ell_{n+1} = \ell_{n+1} \\ \ell_{n+2} = 2\ell_n + \ell_{n+1} + 1 \end{cases}$.

En utilisant la définition du produit et de la somme de matrices, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \ell_{n+1} \\ \ell_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ell_n \\ \ell_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $U_{n+1} = A \times U_n + C$.

3 Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $P(n)$:

$$\ll A^n = \frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times I_2 \gg.$$

► **Initialisation** : $A^0 = I_2$ et $\frac{1-1}{3} \times A + \frac{1+2}{3} \times I_2 = I_2$.
Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = A \times \left(\frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times I_2 \right),$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Donc } A^{n+1} = \frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times A^2 + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times A.$$

$$\text{Or } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A + 2I_2$.

$$\text{Ainsi } A^{n+1} = \frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times (A + 2I_2) + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times A.$$

Donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \frac{2^n - (-1)^n + 2^n + 2(-1)^n}{3} \times A + \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3} \times I_2 \\ &= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \times A + \frac{2^{n+1} - 2(-1)^n}{3} \times I_2 \\ &= \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \times A + \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{3} \times I_2. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = \frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times I_2.$$

3 $V = A \times V + C \Leftrightarrow V - A \times V = C$

$$\Leftrightarrow (I_2 - A) \times V = C \Leftrightarrow V = (I_2 - A)^{-1} \times C.$$

À la calculatrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{4 a. } V_0 = U_0 - V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

b. Pour tout entier $n \geq 0$,

$$U_{n+1} = A \times U_n + C \text{ et } V = A \times V + C.$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient :

$$U_{n+1} - V = A \times (U_n - V),$$

$$\text{c'est-à-dire } V_{n+1} = A \times V_n.$$

Donc par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$,

$$V_n = A^n \times V_0.$$

c. Or $U_n = V_n + V$. Donc $U_n = A^n \times V_0 + V$.

En utilisant le résultat de la question 2,

$$U_n = \left(\frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times I_2 \right) \times V_0 + V.$$

Donc :

$$U_n = \frac{(2^n - (-1)^n)}{3} \times A \times V_0 + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times V_0 + V.$$

$$\text{Or } A \times V_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5(2^n - (-1)^n) + 3(2^n + 2(-1)^n) - 3 \\ 11(2^n - (-1)^n) + 5(2^n + 2(-1)^n) - 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 \times 2^n + (-1)^n - 3 \\ 16 \times 2^n - (-1)^n - 3 \end{pmatrix}.$$

5 Question ouverte

D'après la question 4 c.,

$$\ell_n = \frac{1}{6}(8 \times 2^n + (-1)^n - 3).$$

$$\text{Donc : } \ell_n \geq \frac{1}{6}(8 \times 2^n - 4).$$

► On est certain que $\ell_n \geq 1\,000$ dès que :

$$\frac{1}{6}(8 \times 2^n - 4) \geq 1\,000.$$

$$\text{Or, } \frac{1}{6}(8 \times 2^n - 4) \geq 1\,000$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 750,5 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(750,5)}{\ln(2)}.$$

$$\text{Or } \frac{\ln(750,5)}{\ln(2)} \approx 9,6 \text{ et } n \text{ est un entier.}$$

Donc on est certain que $\ell_n \geq 1\,000$ dès que $n \geq 10$.

► On est certain que $\ell_n \geq 10\,000$ dès que :

$$\frac{1}{6}(8 \times 2^n - 4) \geq 10\,000.$$

$$\text{Or, } \frac{1}{6}(8 \times 2^n - 4) \geq 10\,000$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 7\,500,5 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(7\,500,5)}{\ln(2)}.$$

$$\text{Or } \frac{\ln(7\,500,5)}{\ln(2)} \approx 12,9 \text{ et } n \text{ est un entier.}$$

Donc on est certain que $\ell_n \geq 10\,000$ dès que $n \geq 13$.

Exercices d'entraînement

82 1 a. $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0_2$.

b. Pour tout entier $n \geq 0$,

on pose $P(n)$: « $A^n = 2^n \times I_2 + n \times 2^{n-1} \times N$ ».

► **Initialisation** : $A^0 = I_2$ et $1 \times I_2 + 0 \times 0_2 = I_2$. Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

Alors $A^{n+1} = A \times A^n = A \times (2^n \times I_2 + n \times 2^{n-1} \times N)$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $A^{n+1} = 2^n \times A + n \times 2^{n-1} \times A \times N$.

Or $A = N + 2I_2$ et $A \times N = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = 2N$.

Ainsi $A^{n+1} = 2^n(N + 2I_2) + n \times 2^{n-1} \times 2N$
 $= 2^{n+1}I_2 + (2^n + n \times 2^n)N$.

Ainsi $A^{n+1} = 2^{n+1} + (n+1) \times 2^n \times N$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : pour tout entier $n \geq 0$,

$A^n = 2^n \times I_2 + n \times 2^{n-1} \times N$.

2 $V_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$V_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \times 1 - 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1 a. $V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -4u_n + 4u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Donc $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. En raisonnant par récurrence, en utilisant la question

3 a., on a : $V_n = A^n \times V_0$.

c. En utilisant les questions **1** b. et **3** b., on obtient :

$V_n = (2^n \times I_2 + n \times 2^{n-1} \times N) \times V_0$
 $= 2^n \times V_0 + n \times 2^{n-1} \times N \times V_0$.

Or $V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $N \times V_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Donc $V_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3n \times 2^{n-1} \\ 2^n - 3n \times 2^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $u_n = 2^{n+1} - 3n \times 2^{n-1}$,

ou encore que $u_n = \left(2 - \frac{3n}{2}\right) \times 2^n$.

4 Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1-3n}{2} \times 2^{n+1} - \left(2 - \frac{3n}{2}\right) \times 2^n$.

$= 2^n \left(1 - 3n - 2 + \frac{3n}{2}\right) = 2^n \left(-1 - \frac{3n}{2}\right)$.

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Ainsi la suite u est strictement décroissante.

83 1 Soit un entier $n \geq 1$. On a le tableau d'effectifs suivant :

	Aube	Matin	Midi	Soir
Scorpions	x_n	x_n	$x_n - 2z_n$	$x_{n+1} = x_n - 2z_n$
Guêpes	y_n	$y_n - x_n$	$y_n - x_n$	$y_{n+1} = y_n - x_n$
Mygales	z_n	z_n	z_n	$z_{n+1} = z_n - (y_n - x_n)$ $= x_n - y_n + z_n$

En utilisant la définition du produit de matrices, on a :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

2 En raisonnant par récurrence, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Donc au bout d'une semaine, $\begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} = A^7 \times \begin{pmatrix} 33\,023 \\ 42\,836 \\ 12\,729 \end{pmatrix}$.

En utilisant la calculatrice, $\begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc au bout d'une semaine, il reste un scorpion, une guêpe et une mygale.

3 On a : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^7 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^7)^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant la calculatrice, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,310 \\ 15\,968 \\ 4\,745 \end{pmatrix}$.

Initialement, il y avait 12 310 scorpions, 15 968 guêpes et 4 745 mygales.

4 Question ouverte

Il s'agit de résoudre $\begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} = A^7 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible, et à la calculatrice, on a :

$$(A^7)^{-1} = \begin{pmatrix} 4\,745 & 15\,968 & 12\,310 \\ 6\,155 & 20\,713 & 15\,968 \\ 1829 & 6\,155 & 4\,745 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients obtenus sont tous positifs.

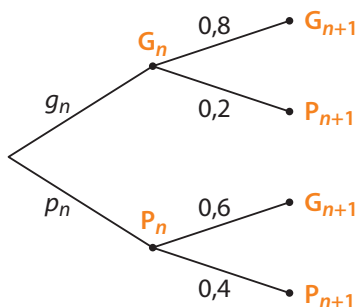
Alors l'équation admet une unique solution

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (A^7)^{-1} \times \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont

positifs.

Donc le problème admettra toujours une solution.

84 1 a. La situation peut être représentée par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales,

$$g_{n+1} = 0,8g_n + 0,6p_n \text{ et } p_{n+1} = 0,2g_n + 0,4p_n.$$

En utilisant la définition du produit de matrices,

$$\begin{pmatrix} g_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Donc $U_{n+1} = A \times U_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

b. Donc par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

2 a. À la calculatrice, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{aligned} P \times D \times P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $A = P \times D \times P^{-1}$.

b. Comme $P^{-1} \times P = I_2$, par récurrence, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3 La matrice D étant diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } A^n &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -0,2^n \\ 1 & 0,2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A^n = \begin{pmatrix} \frac{3+0,2^n}{4} & \frac{3-3 \times 0,2^n}{4} \\ \frac{1-0,2^n}{4} & \frac{1+3 \times 0,2^n}{4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en utilisant la définition de somme de matrices,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + 0,2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

4 D'après la question **3**,

$$U_n = A^n \times U_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times U_0 + 0,2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times U_0.$$

Or $0 < 0,2 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$.

On en déduit que la suite (U_n) converge vers la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times U_0.$$

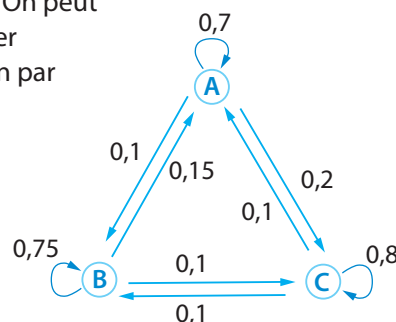
En notant $U_0 = \begin{pmatrix} g_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$, on a : $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(g_0 + p_0) \\ \frac{1}{4}(g_0 + p_0) \end{pmatrix}$.

Or $g_0 + p_0 = 1$.

Donc quelle que soit la répartition initiale, la suite (U_n)

converge vers la matrice $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

85 1 a. On peut représenter la situation par le graphe suivant :



Donc $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,15b_n + 0,1c_n$;

$b_{n+1} = 0,1a_n + 0,75b_n + 0,1c_n$ et

$c_{n+1} = 0,2a_n + 0,1b_n + 0,8c_n$.

En utilisant la définition du produit de matrices, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,1 \\ 0,1 & 0,75 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Donc $U_{n+1} = M \times U_n$, où $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,1 \\ 0,1 & 0,75 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

b. On en déduit par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = M^n \times U_0$.

2 $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

► Au bout d'un mois : $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,41 \\ 0,23 \\ 0,36 \end{pmatrix}$.

► Au bout de trois mois : $U_3 = M^3 \times U_0 \approx \begin{pmatrix} 0,327 \\ 0,262 \\ 0,411 \end{pmatrix}$.

► Au bout d'un an : $U_{12} = M^{12} \times U_0 \approx \begin{pmatrix} 0,286 \\ 0,286 \\ 0,429 \end{pmatrix}$.

► Au bout de dix ans : $U_{120} = M^{120} \times U_0 \approx \begin{pmatrix} 0,286 \\ 0,286 \\ 0,429 \end{pmatrix}$.

3 a. Comme la somme des coefficients de U est 1, on a : $x + y + z = 1$.

De plus $M \times U = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,1 \\ 0,1 & 0,75 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,3x + 0,15y + 0,1z = 0 \\ 0,1x - 0,25y + 0,1z = 0 \\ 0,2x + 0,1y - 0,2z = 0 \end{cases}$$

Comme la 3^e ligne est l'opposé de la somme des 1^{re} et 2^e lignes, on obtient :

$$M \times U = U \Leftrightarrow \begin{cases} -0,3x + 0,15y + 0,1z = 0 \\ 0,1x - 0,25y + 0,1z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y - 2z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

en multipliant les deux lignes par 20.

On en déduit que le problème revient à résoudre le

$$\text{système } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 6x - 3y - 2z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

b. Le système précédent est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \times U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

c. La matrice U est telle que $M \times U = U$ et la somme de ses coefficients est 1. Les coefficients de la matrice M sont strictement positifs, et de somme par colonne égale à 1. Comme la somme des coefficients de la matrice U_0 est égale à 1, la suite (U_n) converge vers la matrice U .

4 Question ouverte

En utilisant la matrice U , à long terme :

► le circuit A distribue $\frac{2}{7}$ du marché et réalise un bénéfice

de : $10\,000 \times \frac{2}{7} \times 500 \approx 1\,428\,571 \text{ €}$;

► le circuit B distribue $\frac{2}{7}$ du marché et réalise un bénéfice

de : $10\,000 \times \frac{2}{7} \times 400 \approx 1\,142\,851 \text{ €}$;

► le circuit C distribue $\frac{3}{7}$ du marché et réalise un bénéfice

de : $10\,000 \times \frac{3}{7} \times 300 \approx 1\,285\,714 \text{ €}$.

C'est le circuit A qui réalisera, à long terme, le plus grand bénéfice.

➔ Problèmes

86 1 À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -0,1 & -0,7 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -0,3 & -0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2 Soient quatre réels a, b, c et d .

Une équation du plan (ABC) est : $ax + by + cz = d$ si, et seulement si, les coordonnées des points A, B et C vérifient cette équation, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = d \\ -a + b + 2c = d \\ a + 2b + 3c = d \end{cases} \text{ soit } M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

ou encore $X = M^{-1} \times \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$.

$$= \begin{pmatrix} -0,1d - 0,7d + 0,5d \\ 0,5d + 0,5d - 0,5d \\ -0,3d - 0,1d + 0,5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3d \\ 0,5d \\ 0,1d \end{pmatrix}$$

En choisissant $d = 10$, on obtient $a = -3$, $b = 5$ et $c = 1$.

Le plan (ABC) admet pour équation : $-3x + 5y + z = 10$.

87 1 $A^2 = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (\cos a)^2 - (\sin a)^2 & -2\cos a \sin a \\ 2\cos a \sin a & -(\sin a)^2 + (\cos a)^2 \end{pmatrix}$$

Or $(\cos a)^2 - (\sin a)^2 = \cos 2a$ et $2\cos a \sin a = \sin 2a$.

Donc $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}$.

► $A^3 = A \times A^2$

$$= \begin{pmatrix} \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a & -\cos a \sin 2a - \sin a \cos 2a \\ \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a & -\sin a \sin 2a + \cos a \cos 2a \end{pmatrix}$$

Donc $A^3 = \begin{pmatrix} \cos(a + 2a) & -\sin(a + 2a) \\ \sin(a + 2a) & \cos(a + 2a) \end{pmatrix}$.

$$= \begin{pmatrix} \cos 3a & -\sin 3a \\ \sin 3a & \cos 3a \end{pmatrix}$$

2 On conjecture que pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$,

on pose $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{pmatrix}$ ».

► **Initialisation** : $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} \cos 0a & -\sin 0a \\ \sin 0a & \cos 0a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{pmatrix}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Donc :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos a \cos na - \sin a \sin na & -\cos a \sin na - \sin a \cos na \\ \sin a \cos na + \cos a \sin na & -\sin a \sin na + \cos a \cos na \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)a & -\sin(n+1)a \\ \sin(n+1)a & \cos(n+1)a \end{pmatrix}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{pmatrix}.$$

88 Partie A

1 Par définition du produit de matrices,

$$\begin{pmatrix} i \\ \ell \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } A \times C = S \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2 \text{ a. À l'aide de la calculatrice, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$b. \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} i \\ \ell \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + \frac{\ell}{2} - \frac{c}{3} \\ i - \frac{\ell}{2} - \frac{c}{3} \\ i + \frac{2c}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } R = i + \frac{\ell}{2} - \frac{c}{3}, G = i - \frac{\ell}{2} - \frac{c}{3} \text{ et } B = i + \frac{2c}{3}.$$

3 $R = 200$, $G = 100$ et $B = 60$.

Partie B

Par définition du produit de matrices,

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,147 & -0,289 & 0,463 \\ 0,615 & -0,515 & -0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,147 & -0,289 & 0,463 \\ 0,615 & -0,515 & -0,1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix}.$$

En arrondissant à 0,001 près, on obtient :

$$\begin{cases} R = Y + 1,140V \\ G = 1,01Y - 0,374U - 0,581V \\ B = 0,948Y + 1,926U \end{cases}$$

$$89 \text{ 1 a. } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A + 2I_3$.

$$b. A^3 = A \times A^2 = A \times (A + 2I_3) = A^2 + 2A = A + 2I_3 + 2A = 3A + 2I_3.$$

Donc $A^3 = 3A + 2I_3$.

2 a. $A^0 = 0A + I_3$. Donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

$A = 1A + 0I_3$. Donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$.

$$b. A^{n+1} = A \times A^n = A \times (u_n A + v_n I_3) = u_n A^2 + v_n A = u_n (A + 2I_3) + v_n A.$$

$$\text{Donc } A^{n+1} = (u_n + v_n)A + 2u_n I_3.$$

$$\text{En identifiant les coefficients, } \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}.$$

En utilisant la définition du produit de matrices, on

$$\text{obtient : } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Pour tout entier $n \geq 0$,

$$\text{on pose } P(n) : \text{« } M^n = \frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ »}.$$

► **Initialisation** : $M^0 = I_2$ et

$$\frac{2^0}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^0}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$M^{n+1} = M \times M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc :

$$M^{n+1} = \frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

en distribuant.

$$\text{Donc } M^{n+1} = \frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{-1}{3} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } M^{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $P(n1)$ est vraie.

► **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$,

$$M^n = \frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

d. Par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left(\frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc en distribuant :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{2^n}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{2^n}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi : } u_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \text{ et } v_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

3 On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$:

$$A^n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } A^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}.$$

90 1 a. ► L'agriculture produit 2 000 €, et consomme 400 € dans le secteur A, 300 € dans le secteur I et 200 € dans le secteur T.

► L'industrie produit 3 000 €, et consomme 750 € dans le secteur A, 900 € dans le secteur I et 420 € dans le secteur T.

► Les transports produisent 1 500 €, et consomme 75 € dans le secteur A, 405 € dans le secteur I et 210 € dans le secteur T.

b. Les consommations finales de chaque branche sont donc :

► secteur A : $400 + 750 + 75 = 1\,225$ € ;

► secteur I : $300 + 900 + 405 = 1\,605$ € ;

► secteur T : $200 + 420 + 210 = 830$ €.

2 a. La production totale est la somme des consommations intermédiaires et des consommations finales.

Donc $P = A \times P + D$.

b. $P = A \times P + D \Leftrightarrow P - A \times P = D \Leftrightarrow (I_3 - A) \times P = D$
 $\Leftrightarrow P = (I_3 - A)^{-1} \times D$.

3 À la calculatrice, on calcule $(I_3 - A)^{-1} \times D$.

$$\text{On obtient } P = \begin{pmatrix} 4\,000 \\ 3\,500 \\ 2\,000 \end{pmatrix}.$$

$$91 \quad 1 \quad A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B commutent.

$$2 \quad A \times C = C \times A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et C commutent.

3 a. Les matrices A et M commutent $\Leftrightarrow A \times M = M \times A$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 4z & 3y + 4t \\ -2x + z & -2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y & 4x + y \\ 3z - 2t & 4z + t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4z = 3x - 2y \\ 3y + 4t = 4x + y \\ -2x + z = 3z - 2t \\ -2y + t = 4z + t \end{cases} \begin{cases} y = -2z \\ 2t = 2x - y \\ 2t = 2x + 2z \end{cases} \begin{cases} y = -2z \\ t = x + z \end{cases}.$$

b. ► En choisissant $z = 1$ et $x = 1$, on obtient $y = -2$ et $t = 2$.
 On retrouve la matrice B.

► En choisissant $z = 1$ et $x = 2$, on obtient $y = -2$ et $t = 3$.
 On retrouve la matrice C.

► En choisissant $z = 2$ et $x = 2$, on obtient $y = -4$ et $t = 4$.

$$\text{On a } D = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

► En choisissant $z = -1$ et $x = 1$, on obtient $y = 2$ et $t = 0$.

$$\text{On a } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. On choisit $z = 0$ et $x = 1$, on obtient $y = 0$ et $t = 1$.

92 1 Pour tout entier naturel n ,

on pose $P(n)$: « $(M + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k$ ».

► **Initialisation :** $(M + N)^0 = I$ et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} M^{0-k} N^k = M^0 N^0 = I. \text{ Donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

► **Hérédité :** soit un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie.
 $(M + N)^{n+1} = (M + N) \times (M + N)^n$

$$= (M + N) \times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k \right)$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Donc } (M + N)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (M^{n+1-k} \times N^k + N M^{n-k} N^k)$$

en distribuant.

Comme les matrices M et N commutent, on obtient :

$$\begin{aligned} (M + N)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (M^{n+1-k} \times N^k + M^{n-k} N^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n+1-k} N^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} M^{n+1-k} N^k. \end{aligned}$$

Donc :

$$(M+N)^{n+1} = \binom{n}{0} M^{n+1} N^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) M^{n+1-k} N^k + \binom{n}{n} M^0 N^{n+1}.$$

Or $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

On en déduit que $(M+N)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} M^{n+1-k} N^k$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion** : par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$(M+N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k.$$

2 a. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$.

b. Comme $B^3 = 0_3$, pour tout entier $n \geq 3$,
 $B^n = B^3 \times B^{n-3} = 0_3$.

c. Les matrices B et I_3 commutent et $A = I_3 + B$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} B^k = \binom{n}{0} (I_3)^n B^0 + \binom{n}{1} (I_3)^{n-1} B + \binom{n}{2} (I_3)^{n-2} B^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (I_3)^{n-k} \times 0_3.$$

Donc $A^n = I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$.

d. Comme $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

93 1 Il y a équilibre $\Leftrightarrow$ pour tout entier n , $\begin{cases} R_{n+1} = R_n \\ L_{n+1} = L_n \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ pour tout entier n , $\begin{cases} (1+a)R_n - bL_n R_n = R_n \\ cL_n R_n + (1-d)L_n = L_n \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ pour tout entier n , $\begin{cases} R_n(a - bL_n) = 0 \\ L_n(cR_n - d) = 0 \end{cases}$

Or les suites R et L ne s'annulent pas.

Donc il y a équilibre si, et seulement si, pour tout entier n ,

$$R_n = \frac{d}{c} \text{ et } L_n = \frac{a}{b}.$$

2 En utilisant la définition du produit et de la somme de matrices, on obtient :

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{ad}{c} \\ -\frac{ad}{b} \end{pmatrix},$$

soit $U_{n+1} = A \times U_n + C$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \frac{ad}{c} \\ -\frac{ad}{b} \end{pmatrix}$.

3 a. $A \times U + C = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,03 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1880 \\ 660 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix} = U$.

On a donc pour tout entier naturel n : $\begin{cases} U_{n+1} = A \times U_n + C \\ U = A \times U + C \end{cases}$.

En soustrayant les deux lignes, $U_{n+1} - U = A \times (U_n - U)$.

On en déduit par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$U_n - U = A^n (U_0 - U),$$

c'est-à-dire $U_n = U + A^n (U_0 - U)$.

b. $U_5 \approx \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 611 \end{pmatrix}$, $U_{10} \approx \begin{pmatrix} 1\,989 \\ 610 \end{pmatrix}$, $U_{50} \approx \begin{pmatrix} 2\,011 \\ 588 \end{pmatrix}$

et $U_{100} \approx \begin{pmatrix} 1\,967 \\ 607 \end{pmatrix}$.

c. $U_5 \approx \begin{pmatrix} 1\,986 \\ 603 \end{pmatrix}$, $U_{10} \approx \begin{pmatrix} 1\,983 \\ 601 \end{pmatrix}$, $U_{50} \approx \begin{pmatrix} 2\,019 \\ 599 \end{pmatrix}$

et $U_{100} \approx \begin{pmatrix} 1\,981 \\ 596 \end{pmatrix}$.

4 a. $\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 \\ 0,03 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n - 0,2L_n \\ 0,03R_n + L_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\begin{cases} R_{n+1} - R_n = -0,2L_n + 120 \\ L_{n+1} - L_n = 0,03R_n - 60 \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} R_{n+1} - R_n = 0,2(600 - L_n) \\ L_{n+1} - L_n = 0,03(R_n - 2\,000) \end{cases}$.

b. Si $L_n \leq 600$, alors $R_{n+1} - R_n \geq 0$. Donc le nombre de proies augmente lorsque le nombre de prédateurs est inférieur à 600.

Si $L_n \geq 600$, alors $R_{n+1} - R_n \leq 0$. Donc le nombre de proies diminue lorsque le nombre de prédateurs est supérieur à 600.

c. De la même façon, le nombre de prédateurs augmente lorsque le nombre de proies est supérieur à 2 000, et le nombre de prédateurs diminue lorsque le nombre de proies est inférieur à 2 000.

d. On retrouve graphiquement les résultats obtenus aux questions 4 b. et 4 c.

5 Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{cases} R_{n+1} - R_n = R_n(a - bL_n) \\ L_{n+1} - L_n = L_n(c - dR_n) \end{cases}.$$

On en déduit que :

► le nombre de proies augmente lorsque le nombre de prédateurs est inférieur à $\frac{a}{b}$, et le nombre de proies diminue lorsque le nombre de prédateurs est supérieur à $\frac{a}{b}$;

► le nombre de prédateurs augmente lorsque le nombre de proies est supérieur à $\frac{d}{c}$, et le nombre de prédateurs diminue lorsque le nombre de proies est inférieur à $\frac{d}{c}$.

94 Partie A

1 La matrice U vérifie : $A \times U = U$ et la somme des coefficients de U est égale à 1.

2 On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $x + y + z = 1$.

$$A \times U = U \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} - z = 0 \\ \frac{x}{2} - y = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = \frac{3}{2}y \end{cases}.$$

Comme $x + y + z = 1$, on obtient $y = \frac{2}{9}$, $x = \frac{4}{9}$ et $z = \frac{1}{3}$.

$$\text{Donc } U = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3 a. Pour tout entier $n \geq 0$,

$$\text{on pose } P(n) : \left\langle U_n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 - (-0,5)^n \\ 2 + (-0,5)^n \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{► Initialisation : } U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 + 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

► Hérédité : soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$U_{n+1} = A \times U_n = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 - (-0,5)^n \\ 2 + (-0,5)^n \\ 3 \end{pmatrix}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc :

$$U_{n+1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0,5(2 + (-0,5)^n) + 3 \\ 0,5(4 - (-0,5)^n) \\ 0,5(4 - (-0,5)^n) + 0,5(2 + (-0,5)^n) \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 + 0,5(-0,5)^n \\ 2 - 0,5(-0,5)^n \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } U_{n+1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 - (-0,5)^{n+1} \\ 2 + (-0,5)^{n+1} \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

► Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$,

$$U_n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 - (-0,5)^n \\ 2 + (-0,5)^n \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b. Comme $|-0,5| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,5)^n = 0$, et la suite (U_n) converge vers la matrice U .

Partie B

1 $0,85A \times U + C$

$$= 0,85 \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{74}{171} \\ \frac{40}{171} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix} \\ = \frac{17}{20} \begin{pmatrix} \frac{77}{171} \\ \frac{37}{171} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{74}{171} \\ \frac{40}{171} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc $0,85A \times U + C = U$.

2 a. Pour tout entier naturel n , $\begin{cases} U_{n+1} = 0,85A \times U_n + C \\ U = 0,85A \times U + C \end{cases}$.

En soustrayant, on obtient que :

$$U_{n+1} - U = 0,85A \times (U_n - U).$$

b. Par récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel n , $U_n - U = (0,85A)^n \times (U_0 - U)$, c'est-à-dire :

$$U_n = U + (0,85A)^n \times (U_0 - U).$$

3 La matrice $0,85A$ a ses coefficients positifs ou nuls, dont la somme par colonne est $0,85$, strictement inférieur à 1.

Donc la matrice $(0,85A)^n$ converge vers la matrice nulle 0_3 .

On en déduit que la suite (U_n) converge vers la matrice U .

4 Pour tout entier $n \geq 0$,

$$\text{on pose } P(n) : \left\langle U_n = \frac{1}{171} \begin{pmatrix} 74 - 17(-0,425)^n \\ 40 + 17(-0,425)^n \\ 57 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

► **Initialisation :** $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{171} \begin{pmatrix} 74 - 17 \\ 40 + 17 \\ 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Donc $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité :** soit un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$U_{n+1} = 0,85A \times U_n + C$$

$$= \frac{17}{20} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{171} \begin{pmatrix} 74 - 17(-0,425)^n \\ 40 + 17(-0,425)^n \\ 57 \end{pmatrix} + \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc

$$U_{n+1} = \frac{1}{171} \begin{pmatrix} \frac{17}{40}(40 + 17(-0,425)^n) + \frac{17}{20} \times 57 \\ \frac{17}{40}(74 - 17(-0,425)^n) \\ \frac{17}{40}(74 - 17(-0,425)^n) + \frac{17}{40}(40 + 17(-0,425)^n) \end{pmatrix} + \frac{1}{171} \begin{pmatrix} \frac{171}{20} \\ \frac{171}{20} \\ \frac{171}{20} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } U_{n+1} = \frac{1}{171} \begin{pmatrix} 74 + 17 \times 0,425 \times (-0,425)^n \\ 40 - 17 \times 0,425 \times (-0,425)^n \\ 57 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } U_{n+1} = \frac{1}{171} \begin{pmatrix} 74 - 17(-0,425)^{n+1} \\ 40 + 17(-0,425)^{n+1} \\ 57 \end{pmatrix}.$$

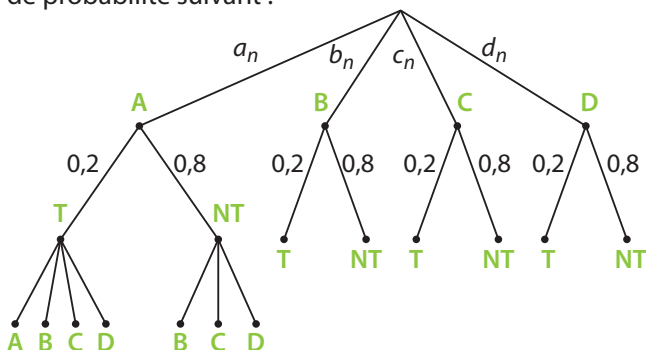
Donc $P(n+1)$ est vraie.

► **Conclusion :** pour tout entier $n \geq 0$,

$$U_n = \frac{1}{171} \begin{pmatrix} 74 - 17(-0,425)^n \\ 40 + 17(-0,425)^n \\ 57 \end{pmatrix}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,425)^n = 0$, la suite (U_n) converge vers U comme montré au 3.

95 1 a. La situation peut être représentée par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = (a_n + b_n + c_n + d_n) \times 0,2 \times \frac{1}{4} + b_n \times 0,8 \times \frac{1}{3} + c_n \times 0,8 \times \frac{1}{3} + d_n \times 0,8 \times \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,8 \left(\frac{b_n}{3} + \frac{c_n}{3} + \frac{d_n}{3} \right) + 0,05,$$

car $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$.

b. De la même façon :

$$b_{n+1} = 0,8 \left(\frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{3} + \frac{d_n}{3} \right) + 0,05 ;$$

$$c_{n+1} = 0,8 \left(\frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{3} + \frac{d_n}{3} \right) + 0,05$$

$$\text{et } d_{n+1} = 0,8 \left(\frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{3} + \frac{c_n}{3} \right) + 0,05.$$

En utilisant la définition du produit de matrices, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = 0,8 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix}.$$

$$2 \text{ a. } X = 0,8M \times X + K \Leftrightarrow X - 0,8M \times X = K$$

$$\Leftrightarrow (I_4 - 0,8M) \times X = K.$$

b. À l'aide de la calculatrice, la matrice $I_4 - 0,8M$ est inversible.

$$\text{Donc } X = 0,8M \times X + K \Leftrightarrow X = (I_4 - 0,8M)^{-1} \times K$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}.$$

3 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} U_{n+1} = 0,8M \times U_n + K \\ U = 0,8M \times U + K \end{cases}.$$

En soustrayant, $U_{n+1} - U = 0,8M \times (U_n - U)$.

Donc par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$U_n - U = (0,8M)^n \times (U_0 - U), \text{ c'est-à-dire :}$$

$$U_n = U + (0,8M)^n \times (U_0 - U).$$

$$4 \quad 0 < \left| -\frac{4}{15} \right| < 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{15} \right)^n = 0.$$

On en déduit que la suite (U_n) converge vers la matrice :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U.$$

5 La matrice $0,8A$ a ses coefficients positifs ou nuls, dont la somme par colonne est égale à $0,85$, strictement inférieur à 1 .

Donc la matrice $(0,8A)^n$ converge vers la matrice nulle 0_4 . On en déduit que la suite (U_n) converge vers la matrice U .

96 1 Un exemple de chiffrement

Lettres	J	E	S	U	I	S	P	R	E	T
Rang R_k	10	5	19	21	9	19	16	18	5	20
Rang chiffré C_k	7	12	14	3	16	15	10	16	17	3
Lettres chiffrées	G	L	N	C	P	O	J	P	Q	C

2 Un exemple de déchiffrement

a. $A \times \begin{pmatrix} \frac{8}{41} & -\frac{3}{41} \\ -\frac{5}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{8}{41} & -\frac{3}{41} \\ -\frac{5}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 \times \frac{8}{41} - 3 \times \frac{5}{41} & -7 \times \frac{3}{41} + 3 \times \frac{7}{41} \\ 5 \times \frac{8}{41} - 8 \times \frac{5}{41} & -5 \times \frac{3}{41} + 8 \times \frac{7}{41} \end{pmatrix} = I_2.$$

De même $\begin{pmatrix} \frac{8}{41} & -\frac{3}{41} \\ -\frac{5}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix} \times A = I_2.$

Donc la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{41} & -\frac{3}{41} \\ -\frac{5}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix}.$$

b. On obtient $k = 41^{-1} = 7 \pmod{26}$.

c. Soit un entier m .

On suppose que m admet un inverse modulo 26 . Soit alors k entre 1 et 25 tel que $m \times k \equiv 1 \pmod{26}$. Il existe donc un entier v tel que $m \times k = 1 + 26v$. Donc :

$$k \times m + (-v) \times 26 = 1.$$

D'après le théorème de Bézout, les entiers m et 26 sont premiers entre eux.

On suppose que les entiers m et 26 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout, il existe u et v tels que : $u \times m + v \times 26 = 1$.

Alors $u \times m \equiv 1 \pmod{26}$.

On note k le reste dans la division euclidienne de u par 26 .

On a alors $k \times m \equiv 1 \pmod{26}$. Donc k est non nul : k appartient à $\{1; 2; \dots; 25\}$.

Soit k' un autre entier de $\{1; 2; \dots; 25\}$ tel que $k' \times m \equiv 1 \pmod{26}$.

Alors, par différence, $(k - k') \times m \equiv 0 \pmod{26}$, c'est-à-dire que 26 divise $(k - k') \times m$.

Or 26 et m sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 26 divise $k - k'$.

Mais $|k - k'| \leq 25$, car k et k' sont entre 1 et 25 .

On en déduit que $k - k' = 0$, c'est-à-dire $k = k'$.

L'entier m admet donc un inverse k modulo 26 .

d. $-\frac{3}{41}$ est remplacé par $7 \times (-3) \pmod{26}$, soit $5 \pmod{26}$.

$-\frac{5}{41}$ est remplacé par $7 \times (-5) \pmod{26}$, soit $17 \pmod{26}$.

$\frac{7}{41}$ est remplacé par $7 \times 7 \pmod{26}$, soit $23 \pmod{26}$.

On obtient donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 17 & 23 \end{pmatrix} \pmod{26}$.

e. On obtient le tableau suivant :

Lettres chiffrées	Q	W	P	Y	W	F	H	H	B	A
Rang chiffré R_k	17	23	16	25	23	6	8	8	2	1
Rang déchiffré C_k	1	12	7	15	18	9	20	8	13	5
Lettres déchiffrées	A	L	G	O	R	I	T	H	M	E

Outils pour l'algorithmique

Programme

En Seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :

- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, logique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :

- d'écrire une formule permettant un calcul ;
 - d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ;
- ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :

- programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

→ Activités

1 Définition et utilisations des tableaux

Activité 1 Application directe

1 $T[1] = 2,3$ et $T[4] = 4$.

2 L'indice de 7 dans T est 0.

3 a. L'indice i allant de 0 à 4 inclus, la taille du tableau T à l'issue de l'algorithme est 5.

b. À l'issue de l'algorithme, quelles sont les valeurs contenues dans le tableau T ?

c. **ALGO**

3 → A
4 → B
5 → C
6 → D
7 → E

d. L'intérêt du tableau ici est donc double, il permet d'utiliser beaucoup moins de variables et de pouvoir automatiser leurs affectations.

Activité 2 La planche de Galton

1 Le nombre de positions d'arrivée possible d'une bille sur un parcours contenant N lignes (et donc N obstacles sur la dernière ligne) est $N + 1$, qui correspond donc à la taille du tableau T.

2 **ALGO**

Pour i allant de 0 jusqu'à N par pas de 1 Faire
0 → T[1]
FinPour

3. Nommons X la variable qui, pour une bille donnée, contient le nombre de fois où celle-ci a choisi le chemin de droite durant son parcours.

a. X doit contenir la valeur 0 au départ. $0 \rightarrow X$

b. Lorsque le chemin droit est choisi, il faut incrémenter X : $X + 1 \rightarrow X$.

Lorsque le chemin gauche est choisi, il n'y a rien à faire.

c. **ALGO**

```
Si ALEATOIRE() >= 0,5 Alors
  X + 1 → X
FinSi
```

d. **ALGO**

```
0 → X
Pour i allant de 1 jusqu'à N par pas de 1 Faire
  Si ALEATOIRE() >= 0,5 Alors
    X + 1 → X
  FinSi
FinPour
```

4 a. **ALGO**

```
T[X] + 1 → T[X]
```

b. **ALGO**

```
Pour i allant de 0 jusqu'à N par pas de 1 Faire
  0 → T[i]
FinPour
Pour j allant de 1 jusqu'à p par pas de 1 Faire
  0 → X
  Pour i allant de 1 jusqu'à N par pas de 1 Faire
    Si ALEATOIRE() >= 0,5 Alors
      X + 1 → X
    FinSi
    T[X] + 1 → T[X]
  FinPour
FinPour
```

5

Casio

```
ClrList 1↵
For 1→I To 8 Step 1↵
  0→List 1[I]↵
Next↵
For 1→J To 100 Step 1↵
  1→X↵
  For 1→I To 7 Step 1↵
    If Ran# ≥ 0.5↵
      Then X+1→X↵
    IfEnd↵
    List 1[X]+1→List 1[X]↵
  Next↵
Next↵
List 1
```

TI

```
::EffListe L1
::For(I,1,8,1)
::0→L1(I)
::End
::For(J,1,100,1)
::1→X
::For(I,1,7,1)
::If NbrAleat≥0.5
::Then
::X+1→X
::End
::L1(X)+1→L1(X)
::End
::End
::L1
```

Activité 3

Ficelles et tuyaux

A – Première méthode

ALGO

```
Lire(N, L, C)
0 → i
0 → j
TantQue i < taille(C)
  L → A[j]

  TantQue A[j] >= C[i]

    A[j] - C[i] → A[j]
    i + 1 → i
  FinTantQue
  j + 1 → j
FinTantQue
```

Commentaires

$\text{taille}(C)$ correspond au nombre de commandes du bon C . Tant qu'il reste des commandes à honorer il faut poursuivre.

$A[j]$ est la longueur restante du tuyau en cours de découpage, $C[i]$ est la longueur nécessaire pour honorer la commande en cours.

Si c'est possible, on ôte une longueur $C[i]$ au tuyau $A[j]$ pour la commande en cours.

Puis on passe à la commande suivante.

Lorsque le tuyau en cours de découpe est trop petit pour honorer la commande en cours, on en prend un autre.

2 a. Initialisation du tableau A :

ALGO

```
taille(C) → p
Pour  $i$  allant de 0 jusqu'à  $p - 1$  par pas de 1 Faire
     $0 \rightarrow A[i]$ 
FinPour
```

Stocker la valeur de $\text{taille}(C)$ dans une variable évite le recalcul de la taille par l'ordinateur dans la suite.

b. Pour déterminer le nombre de tuyaux neufs restant, il faut retrancher à N le nombre de tuyaux utilisés, c'est-à-dire le nombre de tuyaux présents dans l'atelier A.

ALGO

```
 $0 \rightarrow i$ 
TantQue ( $i < p$ ) ET ( $A[i] \neq 0$ ) Faire
     $i + 1 \rightarrow i$ 
FinTantQue
Afficher(« Le nombre de tuyaux neufs restant est : »,  $N - i$ )
```

c. ALGO

```
 $0 \rightarrow S$ 
Pour  $i$  allant de 0 jusqu'à  $p - 1$  par pas de 1 Faire
     $S + A[i] \rightarrow S$ 
FinPour
Afficher(« La somme des tailles des chutes de tuyaux dans l'atelier A est : »,  $S$ )
```

3 La boucle « **TantQue** $A[j] \geq C[i]$ » incrémente la variable i sans repasser par la boucle « **TantQue** $i < \text{taille}(C)$ ». Il faut donc veiller à ce que la variable i ne dépasse pas $\text{taille}(C)=p$.

B – Deuxième méthode

ALGO

```
Lire( $N, L, C$ )
 $0 \rightarrow i$ 
 $0 \rightarrow j$ 

< Boucle Pour initialisant à 0 les éléments de A >

TantQue  $i < p$ 
     $0 \rightarrow k$ 
    TantQue  $k < j$  ET  $A[k] < C[i]$ 
         $k = k + 1$ 
    FinTantQue
    Si  $k == j$  Alors
         $L \rightarrow A[j]$ 
         $j \rightarrow k$ 
         $j + 1 \rightarrow j$ 
    FinSi
    TantQue  $C[i] \leq A[k]$  ET  $i < p$ 
         $A[k] - C[i] \rightarrow A[k]$ 
         $i + 1 \rightarrow i$ 
    FinTantQue
FinTantQue

< Instructions de calcul et d'affichage du nombre de
tuyaux neufs restant et de la somme des longueurs
des bouts de tuyaux dans l'atelier A >
```

Commentaires

i désignera le numéro de la commande en cours de traitement.

j désignera le nombre actuel de bouts de tuyaux (de taille éventuellement nulle) dans l'atelier A, comme dans la première méthode.

$\text{taille}(C)=p$ correspond au nombre de commandes du bon C. Tant qu'il reste des commandes à honorer, il faut poursuivre.

On examine l'un après l'autre les tuyaux présents dans l'atelier jusqu'à en trouver un de longueur $A[k]$ suffisante pour honorer la commande i .

Si il n'y en a pas, on amène un nouveau tuyau.

Le tuyaux en cours étant le k -ième, tant que sa longueur est supérieure à la commande en cours, on poursuit son découpage.

Première méthode

```

tuyaux1(N,L,C):={
j :=0;
p := size(C);
C:=append(C,0);
pour i de 0 jusqué p-1 pas 1 faire
  A[i] := 0;
fpour;
i := 0;
tantque (i < p) && (j < p) faire
  A[j] := L;
  tantque (i < p) && (A[j] >= C[i]) faire
    A[j] := A[j]-C[i];
    i := i+1;
  ftantque;
  j := j+1;
ftantque;

i := 0;
tantque ( i < p) && ( A[i] != 0) faire
  i := i+1;
ftantque;
r := N-i;
afficher("Le nombre de tuyaux neufs restants est : "+ r);

S := 0;
pour j de 0 jusqué i-1 pas 1 faire
  S := S + A[j];
fpour
afficher("La somme des tailles des chutes de tuyaux dans l'atelier A est : "+S);
};

```

Deuxième méthode

```

tuyaux2(N,L,C):={
j :=0;
p := size(C);
C:=append(C,0);
pour i de 0 jusqué p-1 pas 1 faire
  A[i] := 0;
fpour;
i := 0;
tantque (i < p) && (j < p) faire
  k := 0;
  tantque (k < j) && (A[k] < C[i]) faire
    k := k+1;
  ftantque;
  si (k == j) alors
    A[j] := L;
    k := j;
    j := j+1;
  fsi;
  tantque (i < p) et (C[i] <= A[k]) faire
    A[k] := A[k] - C[i];
    i := i+1;
  ftantque;
ftantque;

i := 0;
tantque ( i < p) && ( A[i] != 0) faire
  i := i+1;
ftantque;
r := N-i;
afficher("Le nombre de tuyaux neufs restants est : "+ r);

S := 0;
pour j de 0 jusqué i-1 pas 1 faire
  S := S + A[j];
fpour
afficher("La somme des tailles des chutes de tuyaux dans l'atelier A est : "+S);
};

```

Remarque : Dans les boucles **TantQue** ($i < p$) **ET** ($C[i] \dots$), le logiciel *Xcas* doit évaluer les deux conditions pour déterminer si les instructions contenues dans la boucle doivent être exécutées. Dans le cas où $i == p$, la première condition est **fausse** mais la seconde ne peut pas être évaluée, car $C[p]$ n'existe pas. Pour contourner ce problème, on augmente artificiellement la taille du tableau C à la troisième ligne en lui rajoutant un 0 à l'aide de l'instruction *append*.

2 tuyaux1(10,10,[5,6,2,3,8,5])

Le nombre de tuyaux neufs restants est : 5

La somme des tailles des chutes de tuyaux dans l'atelier A est : 21

1

tuyaux2(10,10,[5,6,2,3,8,5])

Le nombre de tuyaux neufs restants est : 6

La somme des tailles des chutes de tuyaux dans l'atelier A est : 11

1

3 La méthode la plus économe en matière première pour l'entreprise est la méthode 2 puisqu'elle utilise moins de tuyaux neufs et qu'elle minimise la longueur totale des chutes.

4 La méthode la plus économe en temps pour l'entreprise est la première puisqu'elle ne nécessite pas la recherche parmi les tuyaux déjà utilisés.

2 Définition et utilisations des fonctions

Activité 4 Applications directes

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5$.

a. ALGO

```
DéfinirFonction f(x) :  
    Retourner 2*x*x-5  
FinDéfinirFonction
```

b. ALGO

```
DéfinirFonction tablvar(a, b, p) :  
    Afficher(« x | f(x) »)  
    Pour i allant de a jusqu'à b par pas de p Faire  
        f(i) → v  
        Afficher(i, « | », v)  
    FinPour  
FinDéfinirFonction
```

2 c. Sous Xcas, on obtient :

```
f(x) := {  
  retourne 2*x*x-5;  
};  
tablvar(a,b,p) := {  
  affiche("x | f(x)");  
  pour i de a jusque b pas p faire  
    v:=f(i);  
    affiche(i, " | ", v);  
  fpour;  
};
```

d. ALGO

```
DéfinirFonction punition(txt, k) :  
    Pour i allant de 1 jusqu'à k par pas de 1 Faire  
        Afficher(txt)  
    FinPour  
FinDéfinirFonction
```

Activité 5

Algorithme d'Horner

On considère la fonction polynôme définie par : $R(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x^2 + 2x - 11$.

Partie A - Algorithme naïf

1 $R(4) = 3 \times 4^5 - 5 \times 4^4 + 2 \times 4^2 + 2 \times 4 - 11 = 1821$.

2 $3x^5 = 3 \times x \times x \times x \times x \times x$ soit 5 multiplications. En procédant de même avec chacun des autres termes on trouve que le calcul nécessite 12 multiplications et 4 additions (ou soustractions).

3 a. $\text{taille}(T) = \deg(R) + 1$.

b. ALGO

```

DéfinirFonction poly(T, a)
    taille(T) - 1 → deg
    0 → res
    Pour i allant de 1 jusqu'à (deg + 1) par pas de 1 Faire
        res + T[i]*a^(deg + 1 - i) → res
    FinPour
    Retourner(res)
FinDéfinirFonction
    
```

```

c. 1 function [res]=poly(T, a)
    2     deg = taille(T)-1
    3     res = 0
    4     for i=1:(deg+1)
    5         res = res + T(i)*a^(deg+1-i)
    6     end
    7 endfunction
    
```

Partie B - Algorithme d'Horner

1 Cette dernière expression de $R(x)$ nécessite 5 multiplications et 4 additions.

2 a.

N° de ligne	Contenu de v
1	$3a - 5$
2	$(3a - 5)a + 7$
3	$((3a - 5)a + 7)a + 0$
4	$((((3a - 5)a + 7)a + 0)a + 2$

Ainsi $S(a) = (((3a - 5)a + 7)a + 0)a + 2 = (3a^2 - 5a + 7)a^2 + 2 = 3a^4 - 5a^3 + 7a^2 + 2$.

b. $U = [3 - 5 \ 7 \ 0 \ 2]$.

c. ALGO

```

DéfinirFonction im(a) :
    U[1]*a + U[2] → v
    a*v + U[3] → v
    a*v + U[4] → v
    a*v + U[5] → v
    Retourner v
FinDéfinirFonction
    
```

3 Soit P un polynôme de degré n tel que $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$.

a. $P(x) = (c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \dots + c_1)x + c_0 = (((\dots(c_n x + c_{n-1})x + \dots)x + c_1)x + c_0$.

b. $T = [c_n \ c_{n-1} \ \dots \ c_1 \ c_0]$.

c. L'instruction $T[1] * a + T[2] \rightarrow v$ correspond à l'affectation de la valeur $c_n a + c_{n-1}$ à la variable v .

d. La suite d'instructions :

$T[1] * a + T[2] \rightarrow v$

$v * a + T[3] \rightarrow v$

correspond à l'affectation de la valeur $(c_n a + c_{n-1})a + c_{n-2}$ à la variable v .

e. Il faut poursuivre les affectations :

$v * a + T[4] \rightarrow v ; \dots ; v * a + T[n + 1] \rightarrow v$

Ce qui fait un total de n instructions contenant chacune une multiplication et une addition.

f.

ALGO

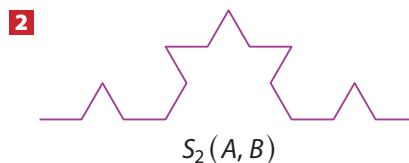
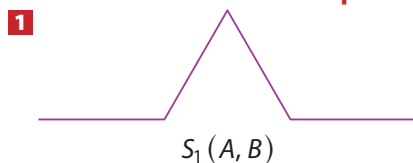
```
DéfinirFonction horner( $T, a$ ) :
  taille( $T$ ) - 1  $\rightarrow n$ 
   $T[1] * a + T[2] \rightarrow v$ 
  Pour  $i$  allant de 3 à  $n + 1$  par pas de 1 Faire
     $v * a + T[i] \rightarrow v$ 
  FinPour
  Retourner  $v$ 
FinDéfinirFonction
```

Activité 6 Suite définie par récurrence

Sans récursivité	Avec récursivité
DéfinirFonction <i>fibon</i> (n) $0 \rightarrow F_0$ $1 \rightarrow F_1$ Pour k allant de 2 à n Faire $F_0 + F_1 \rightarrow \text{res}$ $F_1 \rightarrow F_0$ $\text{res} \rightarrow F_1$ FinPour Retourner res FinDéfinirFonction	DéfinirFonction <i>fibon</i> (n) Si $n == 0$ Retourner 0 Sinon Si $n == 1$ Retourner 1 Sinon Retourner <i>fibon</i> ($n - 1$) + <i>fibon</i> ($n - 2$) FinSi FinSi FinDéfinirFonction

Activité 7 Flocon de Von Koch

Partie A – Étude d'un exemple



Partie B – Cas général

On considère ici les points $A(a)$ et $B(b)$

1 Calculs préliminaires

$$c = \frac{1}{3}(a + b) \text{ et } e = \frac{2}{3}(a + b).$$

2 Programmation sous Xcas

a. ALGO

```
DéfinirFonction segvk( $n, a, b$ ) :
  Si  $n == 0$ 
    segment( $a, b$ )
  Sinon
     $c = (2 * a + b) / 3$ 
     $e = (a + 2 * b) / 3$ 
     $d = \exp(i * \pi / 3)(e - c) + c$ 
    segvk( $n - 1, a, c$ )
    segvk( $n - 1, c, d$ )
    segvk( $n - 1, d, e$ )
    segvk( $n - 1, e, b$ )
  FinDéfinirFonction
```

```

b. segvk(n,A,B):={
  local C,D,E;
  if(n == 0){segment(A,B)}
  else{
    C := (2*A+B)/3;
    E := (A+2*B)/3;
    D := exp(i*pi/3)*(E-C)+C;
    segvk(n-1,A,C);
    segvk(n-1,C,D);
    segvk(n-1,D,E);
    segvk(n-1,E,B)
  }
};

```

c.i. $f = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + a$.

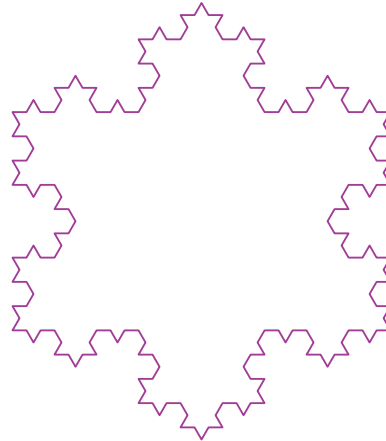
```

ii. Flocon(n,A,B):={
  ClrGraph();
  segvk(n,A,B);
  segvk(n,B,exp(-i*pi/3)*(B-A)+A);
  segvk(n,exp(-i*pi/3)*(B-A)+A,A);
};

```

Flocon(4,0,6)

Voir le tracé ci-contre.



$K_4(A, B)$

Étude mathématique de K_n

Dans cette partie, on utilisera les points $A(0)$ et $B(1)$.

De plus, on définit pour tout entier n :

- ▶ P_n est le périmètre de K_n ;
- ▶ C_n est le nombre de côté de K_n ;
- ▶ ℓ_n est la longueur d'un côté de K_n ;
- ▶ A_n est l'aire de K_n .

a. $P_0 = 3, P_1 = 4, C_0 = 3, C_1 = 12, \ell_0 = 1, \ell_1 = \frac{1}{3}, A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

et $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. À chaque étape, chaque côté se transforme en quatre segments. On en déduit que $C_{n+1} = 4C_n$ et donc que la suite C est géométrique de raison 4, ainsi $C_n = C_0 4^n = 3 \times 4^n$.

c. $\ell_{n+1} = \frac{1}{3} \ell_n$, donc la suite ℓ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On en déduit que : $\ell_n = \ell_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d. $P_n = \ell_n \times C_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

e. $\frac{4}{3} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$: le périmètre des flocons tend vers l'infini.

f. $A_{n+1} = A_n + C_n \times \left(\frac{\ell_{n+1} \sqrt{3}}{2} \times \ell_{n+1}\right) = A_n + C_n \ell_{n+1}^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = A_n + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

g. Par récurrence, on obtient : $A_n = A_0 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\left(\frac{4}{9}\right)^0 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$.

h. $\left(\frac{4}{9}\right)^0 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme 1.

Donc $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{20\sqrt{3}} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$,

or $\frac{4}{9} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{20\sqrt{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

i. La figure K_n lorsque n tend vers $+\infty$ tend vers une figure de périmètre infini et d'aire finie.

Compréhension d'algorithmes

1 a. Cet algorithme détermine le rang à partir duquel les termes d'une suite géométrique non constante de raison positive deviennent supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée en fonction de la valeur de la raison.

b. U_0 représente le premier terme de la suite géométrique, Q représente sa raison et S la valeur seuil choisie.

c. Lorsque $Q < 1$, l'information donnée en sortie est le rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à S . Lorsque $Q > 1$ l'information donnée en sortie est le rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à S .

2

Casio

```
"U"?→U#
"Q"?→Q#
"S"?→S#
0→N#
If Q<1#
Then While U>S#
N+1→N#
Q×U→U#
WhileEnd#
Else While U<S#
N+1→N#
Q×U→U#
WhileEnd#
IfEnd#
N
```

TI

```
Prompt U
Prompt Q
Prompt S
0→N
If Q<1
Then
While U>S
N+1→N
Q*U→U
End
Else
While U<S
N+1→N
Q*U→U
End
End
Disp N
```

3 a. U=?
Q=?0.1
S=?0.001
Fait 4

b. U?
Q?
S?
1000
8

2 1 Pour tout $n > 0$, $n! > n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2 Algorithme A : ne convient pas, car il ne compare jamais les termes de u obtenus à la valeur 10^{-5} .

Algorithme C : ne convient pas, car il n'y a pas de boucle. Le test n'est fait que sur le premier rang.

Algorithme B : convient.

3 Le but de l'algorithme étant de déterminer un intervalle d'amplitude au plus p par diminutions successives, celui-ci doit se terminer lorsque $b - a$ devient inférieur à p . Or la condition insérée dans la boucle **TantQue** ne fait tourner l'algorithme que lorsque $b - a < p$, ce qui ne convient pas. Il faut donc modifier cette condition :

ALGO

Début

Lire(a, b, p)

$$\frac{a+b}{2} \rightarrow c$$

TantQue $b - a > p$ Faire

Si $f(a) \times f(b) < 0$ Alors $c \rightarrow b$ Sinon $c \rightarrow a$

FinSi

FinTantQue

Afficher(« α est dans l'intervalle :] a, α ; α, b »)

Fin.

4 1 L'algorithme proposé, compare les images de chaque entier de l'intervalle $[1; 4]$ avec celle de leurs opposés. Si une telle paire a des images distinctes, la variable p est mise à 0, sinon elle aura une valeur finale de 1.

a. Puisque $f(-1) = 0 \neq 4 = f(1)$, l'algorithme affichera « f n'est pas paire », ce qui est vrai.

b. L'algorithme affichera « f est paire », ce qui est vrai.

c. Les points d'abscisses entières opposées de la courbe représentant f étant symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, l'algorithme affichera « f est paire », ce qui est faux.

2 Pour qu'une fonction soit paire il faut que pour tout réel de son ensemble de définition symétrique par rapport à 0 on ait :

$$f(x) = f(-x).$$

Or l'algorithme proposé ne teste cette propriété que sur les entiers de l'ensemble de définition.

3 L'algorithme proposé ne permet donc pas d'être certain qu'une fonction est paire. En revanche, lorsqu'il indique qu'elle ne l'est pas, c'est toujours vrai.

5 1 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un $k \in \mathbb{R}$

tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, donc $\begin{cases} a = kx \\ b = ky \\ c = kz \end{cases}$, ainsi $xb = kxy = ay$;
 $xc = kxz = az$ et $bz = kyz = cy$.

Réciproquement : On suppose que $\begin{cases} xb = ay \\ xc = az \\ bz = cy \end{cases}$.

► Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

► Sinon, l'une des coordonnées de $\vec{u}$ est non nulle. Supposons $a \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{a}$. On a alors :

$x = ka$, $y = kb$ et $z = kc$, donc $\vec{v} = k\vec{u}$. Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. De même, en supposant $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

2 Dans chacun des algorithmes, on a au final, dans le cas où les vecteurs sont colinéaires : $a = Lx$, $b = Ly$ et $c = Lz$, donc $\vec{u} = L\vec{v}$. Les algorithmes 2 et 3 sont donc à exclure, car ils donnent la mauvaise relation vectorielle dans le cas de la colinéarité. Les deux autres algorithmes conviennent mais l'algorithme 1 fait une succession d'affectations inutiles. En effet, dans le cas de la colinéarité, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ il est inutile d'affecter la valeur $\frac{a}{x}$ à L , puis de lui affecter $\frac{b}{y}$.

Ces deux valeurs sont égales et on répète l'opération d'affectation inutilement.

Dans l'algorithme 4, ceci est évité grâce à l'imbrication des instructions conditionnelles.

6 Nous savons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Donc l'angle non orienté cherché vaut :

$$\arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

On constate donc que, dans l'algorithme proposé, les deux racines carrées ont été omises :

ALGO

```

Lire (a) ; Lire (b) ; Lire (c) ;
Lire (x) ; Lire (y) ; Lire (z) ;
a*x + b*y + c*z → S
Racine(a*a + b*b + c*c)*Racine(x*x + y*y + z*z) → N
S/N → C
Afficher (Acos(C))

```

7 **1** La variable p est initialisée à 0 et la boucle TantQue est exécutée dès lors que $p \geq 0$, elle le sera donc au début de l'algorithme lorsque $p = 0$.

2 L'utilisateur doit entrer une valeur négative pour p , correspondant à une valeur x_i non prise par la variable aléatoire X .

3 a.	n	p	x	S	E
Initialisation	-1	0	0	0	0
P >= 0 premier passage dans la boucle TantQue	0			0	0
		0,5	-2		
P >= 0 deuxième passage dans la boucle TantQue	1			0,5	-1
		0,2	0		
P >= 0 troisième passage dans la boucle TantQue	2			0,7	-1
		0,2	3		
P >= 0 quatrième passage dans la boucle TantQue	3			0,9	-0,4
		0,1	7		
P >= 0 cinquième passage dans la boucle TantQue	4			1	0,3
		-1,24	46546		
P < 0 : sortie de la boucle TantQue					

Puisqu'à l'état final S contient la valeur 1, l'affichage serait : « L'espérance est : 0,3. »

8 **1** La boucle **TantQue** réalise des tirages aléatoires d'entiers entre 1 et 10 jusqu'à ce que les deux entiers ainsi choisis soient différents.

2 On peut considérer que les nombres entiers entre 1 et 7 correspondent aux sept jetons blancs du sac et que les

nombres entiers entre 8 et 10 correspondent aux trois jetons noirs du sac. Dans ce cas, la condition de l'instruction Si simule le tirage de deux jetons blancs.

3 La variable S est incrémentée à chaque fois que deux jetons blancs ont été tirés au sort. Celle-ci contiendra donc en fin d'algorithme le nombre de fois où l'événement A s'est réalisé durant les n tirages au sort.

4 $p(A)$ peut être approché par la fréquence d'apparition de l'événement A si le nombre de tirages est suffisamment grand. Pour en obtenir une valeur approchée à l'aide de l'algorithme, il suffit donc d'exécuter celui-ci pour une grande valeur de n et de diviser la valeur affichée de S par n .

5

Casio

```

"N"?→N
0→S
For 1→K To N
0→T:0→U
While T=U
RandInt#(1,10)→T
RandInt#(1,10)→U
WhileEnd
If (T≤7) And (U≤7)
Then S+1→S
IfEnd
Next
S

```

TI

```

:Prompt N
:0→S
:For(K,1,N)
:0→T:0→U
:While T=U
:entAléat(1,10)→T
:entAléat(1,10)→U
:End
:If (T≤7) et (U≤7)
:Then
:S+1→S
:End
:Disp S

```

L'exécution sur T.I. Affiche : 472 ; on en déduit que :

$$p(A) \approx \frac{472}{1000} = 0,472.$$

$$\begin{aligned}
 \text{6 } p(A) &= \frac{\text{nbre de tirages favorables à A}}{\text{nbre de tirages possibles}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} \\
 &= \frac{\frac{7!}{2!5!}}{\frac{10!}{2!8!}} = \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{7}{15}.
 \end{aligned}$$

Ainsi l'erreur relative commise par l'approximation

précédente est de : $\frac{0,472 - \frac{7}{15}}{\frac{7}{15}} \approx 0,0114$, soit environ

1,1 % d'erreur par rapport à la valeur théorique. L'erreur absolue est : $0,472 - \frac{7}{15} \approx 0,005$.

$$\text{9 } \text{1 } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{2 } p = \frac{\text{aire du domaine coloré}}{\text{aire de la cible}} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{m(b-a)} = \frac{\mu}{m}.$$

3 L'idée des algorithmes présentés est d'approcher la valeur de p par la fréquence de réalisation de l'événement « $y \leq f(x)$ » lors du tirage au sort de deux réels : x dans l'intervalle $[a, b]$ et y dans l'intervalle $[0, m]$. Une fois cette valeur approchée de p déterminée, on obtient $\mu = m \times p$.

Les algorithmes 2 et 4 ne conviennent pas, car ils déterminent la fréquence de l'événement « $x \leq f(y)$ ».

L'algorithme 3 ne convient, car le calcul final est $m \times p \times (b-a) \neq \mu$.

Seul l'algorithme 1 convient.

10 1

$p(X \in [np - \sqrt{np(1-p)}, np + \sqrt{np(1-p)}]) \approx 0,683$.

2 a. L'algorithme proposé permet de trouver le premier entier pour lequel l'approximation précédente crée une erreur inférieure à 10^{-3} .

b.

Casio

```
"P"→P
1→N
1→B
While Abs(B-0.683)<1
0.33→E
N×P→E:J(N×P×(1-P))→S
0→B
For 0→K To N
If (K≤(E-S)) And (K≤(E+S))
Then B+BinominalPD(K,
N,P)→B
IfEnd
Next
N+1→N
WhileEnd
N-1
```

TI

```
:Prompt P
1→N:1→B
:While abs(B-0.6
83)>10^(-3)
:N×P→E
:J(N×P×(1-P))→S
:0→B
:For(K,0,N)
:If (K≤(E-S)) et
(K≤(E+S))
:Then
:B+binomFde(N,P,
K)→B
:End
:N+1→N
:End
:Disp (N-1)
```

À l'exécution avec $p = 0,6$, on obtient $n = 104$, c'est le rang à partir duquel l'erreur absolue commise par l'approximation est inférieure à 10^{-3} .

Rédaction d'algorithmes

11 1

Par récurrence sur n :

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 2 \times 3^0 + 4 = 2 + 6 = 6 = v_0.$$

Hérédité : Soit $k \geq 0$, supposons que $u_k = v_k$, alors on a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= 3v_k - 8 = 3u_k - 8 \\ &= 3(2 \times 3^k + 4) - 8 \\ &= 2 \times 3^{k+1} + 12 - 8 \\ &= 2 \times 3^{k+1} + 4 = u_{k+1}. \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier n .

2 ALGO

```
Lire(n)
2*3^n + 4 → u
Afficher(u)
```

3 ALGO

```
Lire(n)
6 → v
Pour k allant de 1 jusqu'à n
3*v - 8 → v
FinPour
Afficher(v)
```

4 Pour le premier algorithme : $2 \times 3^5 + 4$ nécessite cinq multiplications et une addition.

Pour le second algorithme : chaque boucle nécessite une multiplication et une soustraction. Il y a cinq boucles, donc un total de cinq multiplications et cinq soustractions.

12

a. v est une suite géométrique de raison positive

$$\frac{1}{2} < 1 ; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

b.

ALGO

```
Lire(k)
1 → n
1 → m
TantQue 1/n! > 10^-k Faire n+1 → n FinTantQue
TantQue 1/2^n > 10^-k Faire m → m+1 FinTantQue
Si n < m
Alors
Afficher(« La suite u devient inférieure au égale à
10^(-k) la première »)
Sinon
Afficher(« La suite v atteint la précision fournie
la première »)
FinSi
```

13 1

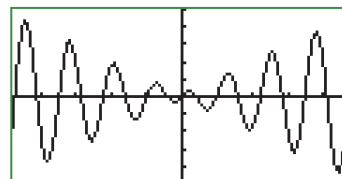
ALGO

```
Début
Lire(a,b,p)
TantQue b-a < p
Faire
c ← (2a+b)/3
d ← (a+2b)/3
Si f(a)×f(c) < 0 Alors c ← b
Sinon
Si f(c)×f(d) < 0 Alors
c → a
d → b
Sinon
d → a
FinSi
FinSi
FinTantQue
Afficher(« α est dans l'intervalle : [»,a,b,«] »)
```

2

	a	c	d	b
a. Première boucle	0,8	1,1	1,4	1,7
b. Deuxième boucle	1,4	1,5	1,6	1,7

14 1



ALGO

Lire(a,b)

Si $(a*\cos(a) + \sin(a))*(b*\cos(b) + \sin(b)) < 0$

Alors

Afficher(« L'équation admet au moins une solution dans l'intervalle »)

Afficher(« À quelle précision souhaitez-vous en obtenir une ? »)

Lire(p)

$a \rightarrow x$

TantQue $(a*\cos(a) + \sin(a))*(x*\cos(x) + \sin(x)) > 0$

Faire $x + p \rightarrow x$

FinTantQue

Afficher(« une solution à », p, « près est : », p)

Sinon

Afficher(« Il n'est pas certain que l'équation admette une solution dans cet intervalle »)

FinSi

$$15 \quad 1 \quad \frac{G(x_{k+1}) - G(x_k)}{h} = \frac{G(x_k + h) - G(x_k)}{h} \approx \frac{1}{x_k}.$$

$$2 \text{ Ainsi } G(x_{k+1}) \approx G(x_k) + \frac{h}{x_k}.$$

ALGO

Lire(n)

$1 \rightarrow x$

$0 \rightarrow y$

$10/n \rightarrow h$

Pour k allant de 1 jusqu'à n **Faire**

$y + h/x \rightarrow y$

$x + h \rightarrow x$

FinPour

Afficher(« Une valeur approchée de G(11) est », y)

$$4 \quad G(x) = \ln x.$$

5

Casio

```
1→N
0→Y
While Abs (ln (11)-Y)
>10^(-2)
1→X
0→Y
10÷N→H
For 1→K To N
Y+H/X→Y
X+H→X
Next
N+1→N
WhileEnd
N-1
```

TI

```
1→N
0→Y
While abs(ln(11)-Y)
>10^(-2)
1→X:0→Y:10÷N→H
For(K,1,N)
Y+H/X→Y
X+H→X
End
N+1→N
End
Disp N-1
```

Le plus petit entier n obtenu est 457.

16

ALGO

Lire(a,b,c)

$b*b-4*a*c \rightarrow D$

Si $D < 0$

Alors

$-b/2a \rightarrow R$

$RACINE(-D) / 2a \rightarrow I$

Afficher(« Le trinôme admet deux racines complexes »)

Afficher(« $z_1 = \text{»}, R, \text{« } -i \text{»}, I$)

Afficher(« $z_1 = \text{»}, R, \text{« } +i \text{»}, I$)

Sinon

Si $D == 0$

Alors $-b/(2*a) \rightarrow x_0$

Afficher(« Le trinôme admet une unique racine

$x_0 = \text{»}, x_0$)

Sinon

$(-b - RACINE(D))/(2*a) \rightarrow x_1$

$(-b + RACINE(D))/(2*a) \rightarrow x_1$

Afficher(« Le trinôme admet deux racines distinctes »)

Afficher(« $x_1 = \text{»}, x_1$)

Afficher(« $x_2 = \text{»}, x_2$)

FinSi

FinSi

17

ALGO

Lire(a) ; **Lire**(b) ; **Lire**(c) ;

Lire(x) ; **Lire**(y) ; **Lire**(z) ;

Afficher(« $a*x + b*y + c*z$ »)

ALGO

Lire(a) ; **Lire**(b) ; **Lire**(c) ;

Lire(x) ; **Lire**(y) ; **Lire**(z) ;

Si $a*x+b*y+c*z == 0$

Alors

Afficher(« les vecteurs sont orthogonaux »)

Sinon

Afficher(« Les vecteurs ne sont pas orthogonaux »)

FinSi

18

1 Aire du trapèze de la figure 1:

$$h \times \frac{b+B}{2} = (b-a) \times \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

2 L'aire sous la courbe de la figure 2 peut être approchée par la somme des aires des trois trapèzes représentés. Chacun de ces trapèzes ayant une hauteur égale à $\frac{b-a}{3}$. L'aire recherchée vaut donc :

$$A \approx \frac{b-a}{3} \left(\frac{f(a)+f\left(a+\frac{b-a}{3}\right)}{2} + \frac{f\left(a+\frac{b-a}{3}\right)+f\left(a+2\frac{b-a}{3}\right)}{2} + \frac{f\left(a+2\frac{b-a}{3}\right)+f(b)}{2} \right).$$

3 De même pour la figure 3. Les n trapèzes ont la même hauteur qui vaut $\frac{b-a}{n}$ et les abscisses des points du découpage de l'intervalle $[a; b]$ sont de la forme $\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ avec $0 \leq k < n$. La somme des aires des trapèzes vaut alors :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1) \times \frac{b-a}{n}\right)}{2}$$

ALGO

```

Lire(a, b, n)
0 → S
Pour k allant de 0 à n-1 Faire
    S + f(a + k*(b-a)/n) + f(a + (k+1)*(b-a)/n) → S
FinPour
Afficher((b-a)/(2*n)*S)
FinSi
    
```

19 **1** L'amplitude l'encadrement est :

$$R_n - S_n = \frac{b-a}{n} \left(f\left(a + n \times \frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + 0 \times \frac{b-a}{n}\right) \right) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

2 Si L est l'amplitude de l'encadrement souhaité, alors il faut que :

$n = \left\lceil \frac{b-a}{L} (f(b) - f(a)) \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x . On notera « Plafond » la fonction permettant d'obtenir le plus petit entier supérieur ou égal à un réel donné. Ainsi :

ALGO

```

Lire(a, b, L)
Plafond((b-a)*(f(b)-f(a))/L) → n
0 → S
0 → R
(b-a)/n → h
Pour k allant de 1 à n-1 Faire
    S + f(a+k*h) → S
    R + f(a+(k+1)*h) → R
FinPour
S*h → S
R*h → R
Afficher(« L'intégrale est comprise entre », S « et », R)
    
```

20

1 ALGO

```

Lire(a0, b0, a1, b1)
a0 * a1 - b0 * b1 → Re
b0 * a1 + a0 * b1 → Im
    
```

2

ALGO

```

Lire(a0, b0, a1, b1, a2, b2)
a0 * a1 - b0 * b1 → Re
b0 * a1 + a0 * b1 → Im
Si (Re + a2 == a0) ET (Im + b2 == b0)
Alors
    Afficher(« z0 est solution de (E) »)
Sinon
    Afficher(« z0 n'est pas solution de (E) »)
FinSi
    
```

Les probabilités et les statistiques au lycée

54 1 a. On a $1 - e^{-7\lambda} = 0,6$.

Donc : $\lambda = -\frac{\ln 0,4}{7} \approx 0,131$.

2 $P(X \geq 5) = e^{-5\lambda} \approx 0,52$.

3 On a $P_{(X \geq 9)}(X \geq 4) = P(X \geq 5) = 0,52$.

4 $P(6 \leq X \leq 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda} = 0,19$.

5 a. Une loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,52)$.

b. $P(Y = 3) = 0,20$.

c. $E(Y) = 8 \times 0,52 = 4$.

6 On appelle Z le nombre de cas où le temps de fonctionnement entre deux pannes est inférieur à 5 heures. Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(120; 0,52)$. On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique associé à cette variable : $[0,43; 0,61]$.

La fréquence observée est de $\frac{50}{120} = 0,42$.

On peut donc remettre en cause l'hypothèse de probabilité : les machines ont sans doute vieilli.

55 Partie A

1 $[0,869; 0,926]$.

2 a. Une loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,1)$.

b. $E(X) = 0,1n$.

c. $P(X = 2) \approx 0,285$.

d. On veut $P(X = 0) < 0,5$.

D'où $0,9^n < 0,5 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,6$.

Donc $n \geq 7$.

Partie B

1 $P(Y \leq 35) \approx 0,734$,

$P(Y > 25) \approx 0,734$,

$P(25 \leq Y \leq 35) \approx 0,468$.

2 $P(22 \leq Y \leq 38) \approx 0,683$.

3 On cherche le plus petit n tel que $P(Y \leq n) \geq 0,99$.

On peut utiliser la calculatrice ou un tableur pour tabuler les valeurs :

n	$P(Y \leq n)$
44	0,959 940 84
45	0,969 603 64
46	0,977 249 87
47	0,983 206 69
48	0,987 775 53
49	0,991 225 52
50	0,993 790 33
51	0,995 667 55
52	0,997 020 24
53	0,997 979 86
54	0,998 650 1
55	0,999 110 97
56	0,999 422 97

On peut donc choisir $n = 49$.

56 1 a. D'après le cours, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

D'où $\lambda = \frac{1}{0,9} \approx 0,990$.

b. $P(X < 0,5) = 1 - e^{-0,5\lambda} \approx 0,393$.

c. $P(X > 2) e^{-2\lambda} \approx 0,135$.

2 a. $P((X_1 \leq 1) \cap (X_2 \leq 1) \cap \dots \cap (X_n \leq 1)) = (1 - e^{-1})^{50} \approx 0$.

b. $p = 1 - P((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t) \cap \dots \cap (X_n \leq t)) = 1 - (1 - e^{-t})^n$.

3 a.

ALGO

```
Saisir(n)
m := 0 ; alea := 0
Pour i = 1 jusqu'à n Faire
    alea := ALEAEXPO(1)
    m := max(m, alea)
FinPour
Afficher (m)
Fin
```

b.

i		1	2	3	4	5
X_i		0,25	1,1	0,92	1,25	0,36
m	0	0,25	1,1	1,1	1,25	1,25

4 On a $(Y \leq t) = (X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t) \cap \dots \cap (X_n \leq t)$.

D'où : $P(Y \leq t) = (1 - e^{-t})^n$.

On dérive cette expression et on pose :

$$f(t) = -ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}.$$

On a alors : $\int_0^x f(t) dt = (1 - e^{-x})^n = P(Y \leq x)$.

D'où le résultat.

57 1 a. 0,64. b. $1 - 0,64 = 0,36$. c. $p_n = 1 - 0,8^n$.

d. $p_n > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,8^n > 0,99 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$.

D'où $n \geq 21$.

2 $p = 0,25 \times 0,2 + 0,25 \times 0,36 + 0,25 \times (1 - 0,8^3) + 0,25 \times (1 - 0,8^4) \approx 0,4996$.

3 On détermine un intervalle associé à une loi binomiale $\mathcal{B}(200; 0,25)$: $[0,189; 0,311]$.

On calcule les fréquences associées à chaque face.

Face	1	2	3	4
Fréquence	0,29	0,245	0,26	0,205

Toutes les fréquences sont dans l'intervalle de confiance. Les résultats sont donc compatibles avec l'hypothèse du dé équilibré.

58 Partie A

1 Intervalle de fluctuation : $[0,279 ; 0,387]$.

La fréquence observée est de 0,167. Valérie doit rejeter sa première hypothèse.

2 a. $p_{20} \in [0,09 ; 0,214]$; $r_{20} \in [0,10 ; 0,224]$.

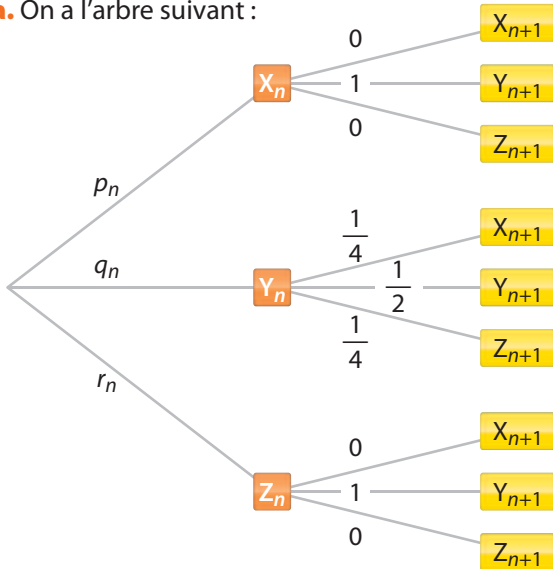
Les deux ensembles ne sont pas disjoints, on ne peut pas rejeter l'hypothèse.

b. Il aurait fallu : $\frac{47}{300} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{50}{300} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{3}{300}$.
 $n \geq 40\,000$.

Partie B

1 $p_1 = 0$; $q_1 = 1$; $r_1 = 0$.

2 a. On a l'arbre suivant :



On en déduit les formules demandées en appliquant la formule des probabilités totales.

b. Les suites p et r sont égales, l'hypothèse de Valérie est donc fausse.

3 a. On a : $u_{n+1} = 2p_{n+1} + q_{n+1} = q_n + p_n + r_n = q_n + 2p_n$, car $p_n = r_n$.

b. $v_{n+1} = 4p_{n+1} - q_{n+1} = 0,5q_n - 2p_n = -0,5v_n$.

c. $v_n = -(-0,5)^{n-1}$ et $u_n = 1$.

$$\text{D'où : } p_n = r_n = \frac{u_n + v_n}{6} = \frac{-(-0,5)^{n-1} + 1}{6}.$$

$$\text{et : } q_n = u_n - 2p_n = \frac{4 + 2 \times (-0,5)^n}{6}.$$

4 p_n et r_n convergent vers $\frac{1}{6}$ et q_n converge vers $\frac{1}{3}$.

59 1 [0,71 ; 0,84].

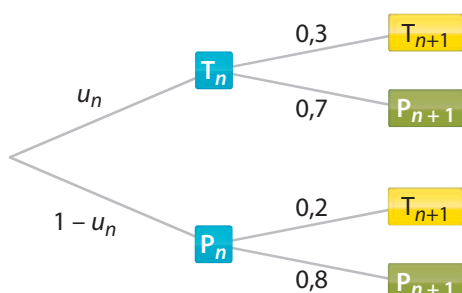
2 a. $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$;

$p_{T_1}(T_2) = 0,3$;

$p_{P_1}(P_2) = 0,8$.

b. $p(T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,25$.

c.



$$u_{n+1} = 0,3u_n + 0,2(1 - u_n) = 0,1u_n + 0,2.$$

d. On peut conjecturer que la suite converge vers 0,22.

3 a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9}$;

$$v_{n+1} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9};$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}u_n - \frac{2}{90} = \frac{1}{10}v_n.$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = \frac{5}{9}$.

b. $v_n = \frac{5}{9} \times 0,1^{n-1}$ et $u_n = \frac{5}{9} \times 0,1^{n-1} + \frac{2}{9}$.

c. u_n converge bien vers $\frac{2}{9} \approx 0,22$

60 1 a. La formule donne 1 avec une probabilité p , et -1 avec une probabilité $1 - p$.

b. $=C2+B2$

2 a. Il s'agit du bloc :

ALGO

```
Si choix==1 Alors h:=h+1 ;
Sinon n:=h-1 ;
```

b. L'instruction $H:=H+h$ permet d'accumuler dans la variable H la somme des hauteurs obtenues à chaque trajectoire du vaisseau.

L'instruction $H_{\text{moy}}:=H/1\,000$ permet à la fin des 1 000 boucles d'obtenir la hauteur moyenne.

c. Il faut ajouter une variable N , initialisée à 0 (la première ligne devient $H:=0$; $N:=0$).

Après FinTantQue il faut ajouter l'instruction :

ALGO

```
Si h<0 Alors N:=N+1
Sinon N:=N
FinSi
```

Et faire afficher N après avoir fait afficher H_{moy} .

3 a. Une loi $\mathcal{B}(50 ; 0,6)$.

b. $E(X) = 50 \times 0,6 = 30$.

c. $H = X - (50 - X) = 2X - 50$.

$E(H) = 2E(X) - 50 = 10$.

La hauteur moyenne sur un grand nombre de trajectoires est donc de 10.

61 1 a. $m = 4,49$; $s = 0,19$.

b. $p = 0,99$.

c. On utilise l'intervalle $[d - 2s ; d + 2s] = [4,11 ; 4,87]$.

2 a. Une loi $\mathcal{B}(25 ; 0,05)$.

b. $P(X = 1) = 0,365$.

c. $P(X \leq 1) = 0,642$.

62 1 a. $P(M < 955) = 0,067$.

b. On utilise l'intervalle $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma] = [940 ; 1\,060]$.

2 a. Une loi $\mathcal{B}(0,07 ; 100)$.

b. $P(X = 3) = 0,049$.

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,999$.

d. $E(X) = 7$.

3 a. Y suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

b. $t = 2,326$.

c. On déduit du **b.** que : $P(Y > -t) = 0,99$.

On a donc $-\sigma t + m = 955$.

D'où : $m = 955 + \sigma t = 1\,024,78$.

63 1 a. $[0,04; 0,21]$.

2 $p = \frac{7^{12}}{8} \approx 0,201$.

3 a. X suit une loi $\mathcal{B}\left(30; \frac{7^{12}}{8}\right)$.

b. $X = 30$: les 12 groupes étaient présents tous les jours :

$P(X = 30) = 0$.

$X = 0$: tous les jours, au moins un groupe était absent.

$P(X = 0) = 0,001$.

c. $E(X) = 30 \times \frac{7^{12}}{8} = 6,04$: il y a en moyenne 6 jours où tous les groupes sont présents.

4 $P(S = 11) = 0,345$ et $E(S) = 12 \times \frac{7}{8} = 10,5$.

5 a. $P_{13} = \frac{7^{13}}{8} = 0,176$.

b. $P(R = 2) = P_{13}$ et $P(R = 0) = 1 - P_{13}$;

$E(R) = -2P_{13} = -0,352$.

c. On opère par disjonction de cas, suivant le nombre de groupes présents. La probabilité que k groupes soient présents est égal à $P(Y = k)$, où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(13; 1 - p)$, et la somme reçue par l'association est alors de $k - R$. D'où la formule.

d. Application numérique : 11,023

Sans cette décision, le gain moyen par jour était de $12 \times \frac{7}{8} = 10,5$ euros. La décision est donc rentable.

64 1 $p = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28$.

2 $p = \frac{0,08}{0,28} = \frac{2}{7}$.

3 a. $p = 1 - 0,8^n$.

b. On veut $1 - 0,8^n > 0,99 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$.
Il faut $n \geq 21$.

4 a. Intervalle de fluctuation : $[0,148\,86; 0,251\,14]$.

La fréquence observée est de 0,1787. Elle est bien conforme aux données (on a bien $n \geq 30$; $np > 5$; $n(1 - p) > 5$).

b. Il faudrait que $0,2 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2 \times 0,8}}{\sqrt{n}} > 0,1787$.

D'où : $n > \left(\frac{1,96 \sqrt{0,2 \times 0,8}}{0,0213} \right)^2 \approx 1\,354,8$.

65 Partie A

1 $P(A) = 0,02 \times 0,04 = 0,000\,8$;

$P(B) = P(E \cup T) = 0,02 + 0,04 - 0,000\,8 = 0,059\,2$;

$P(C) = 1 - P(B) = 0,940\,8$.

Partie B

1 X suit une loi $\mathcal{B}(50; 0,06)$.

2 $P(X \leq 2) = 0,42$.

Partie C

1 $f' = 0,1$.

2 $[0,0134; 0,107]$.

3 La fréquence est à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation, il n'y a pas lieu de considérer que la nouvelle photocopieuse est de moins bonne qualité.

66 1 a. $P(X = -1) = \frac{10n + 10n}{(n + 9)(n + 10)}$ car un gain de -1

correspond au tirage d'une boule rouge suivie d'une blanche, ou au tirage d'une blanche suivie d'une rouge, le nombre total de tirages étant $(n + 9)(n + 10)$.

b. $P(X = -6) = \frac{n(n - 1)}{(n + 9)(n + 10)}$

et $P(X = 4) = \frac{10 \times 9}{(n + 9)(n + 10)}$.

c. $E(X) = \frac{-20n - 6n^2 + 6n + 360}{(n + 9)(n + 10)}$
 $= \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n + 9)(n + 10)}$.

d. On étudie le trinôme $-6n^2 - 14n + 360$.
Il est positif pour $0 \leq n \leq 6$.

a. Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(20; \frac{n}{n + 10}\right)$.

b. On veut : $1 - \left(\frac{10}{n + 10}\right)^{20} > 0,999$

$\Leftrightarrow \ln(n + 10) > \frac{20 \ln 10 - \ln 0,001}{20}$

$\Leftrightarrow n > e^{\frac{25 \ln 10 - \ln 0,001}{20}} - 10$.

D'où $n \geq 5$.

4 a. $E(Y) = 0,75 \times 500 = 375$

et $V(X) = 500 \times 0,75 \times 0,25 = 93,75$.

b. Il s'agit du théorème de Moivre-Laplace.

c. $P(350 \leq Y \leq 375)$

$= P\left(\frac{-25}{\sqrt{500 \times 0,75 \times 0,25}} \leq T \leq 0,495\right)$

$\approx 0,495$

5 a. $P(Z \leq 50) = 1 - e^{-0,5} \approx 0,423$.

b. $P_{(Z \geq 50)}(Z \leq 60) = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{1 - e^{-0,5}} \approx 0,147$.

67 1 $[0,54; 0,65]$.

2 a. $P(X = 0) = 0,4^{10} \approx 0,0001$.

b. $P(X = 1) = 0,6$.

c. $P(X = k) = 0,6 \times 0,4^{k-1}$.

d. $E(X) \approx 0,666$.

3 La variable choix prend les valeurs 0 ou 1 avec des probabilités respectives 0,4 et 0,6.

La variable X prend la valeur k si choix = 1 (cela correspond à Pile). La boucle s'arrête alors et on affiche cette valeur k . Si choix n'est jamais égal à 1, la boucle s'arrête et affiche donc X qui est resté à 0.